Revue québécoise de didactique des mathématiques

Numéro thématique 1, Tome 1 (2022)

Étude et modélisation didactiques de différentes facettes de l'activité mathématique de la personne apprenante

www.rqdm.quebec

Table des matières

Université de Sherbrooke, Sherbrooke

ISSN : 2563-6995

Mot éditorial du numéro thématique : Étude et modélisation didactiques de différentes facettes de l'activité mathématique de la personne apprenante

Sarah DUFOUR
Université de Montréal
sarah.dufour.3@umontreal.ca
Patrick GIBEL
Université de Bordeaux
patrick.gibel@u-bordeaux.fr
Patricia MARCHAND
Université de Sherbrooke
patricia.marchand@usherbrooke.ca

Le comité éditorial a le plaisir de vous proposer cinq articles dans ce premier tome de ce numéro thématique, un deuxième tome sera publié au printemps 2023. À la suite de notre appel à contribution, nous avons reçu une réponse très positive de la communauté et une dizaine de textes ont été soumis pour ce numéro thématique. Considérant ce nombre élevé d'articles, le comité éditorial a pris la décision de proposer deux tomes pour cette thématique.

Rappelons d'abord la thématique de ce numéro qui a su réunir ces premiers travaux. L'intention de ce numéro thématique est de porter notre regard sur la modélisation de l'activité mathématique en classe aux différents ordres d'enseignement. Ce champ d'études peut prendre différentes formes selon le paradigme considéré, le cadre théorique mobilisé et selon le contexte dans lequel il est sollicité, qu'il soit scolaire, extrascolaire ou culturellement différent. En ce sens, une étude sur l'activité mathématique de personnes apprenantes peut être conduite en prenant en considération leur environnement, l'enseignement vécu,

Revue québécoise de didactique des mathématiques, 2022, *Numéro thématique 1* (Tome 1), p. 1-4.

les médiations anticipées et réalisées, les situations et le matériel mis de l'avant guidant ainsi cette action. La question qui oriente cette réflexion didactique pour ce numéro thématique est la suivante :

> Comment l'activité mathématique de la personne apprenante, analysée en prenant en considération les conditions de sa réalisation, étudiée par la mise en œuvre d'un outillage didactique, contribue-t-elle à nous informer précisément sur le processus d'apprentissage d'un concept mathématique ou le développement de compétences?

Nous avions, dans le texte de cadrage, regroupé un certain nombre de questions sous différents thèmes. Nous présentons les principales questions qui ont guidé les réflexions didactiques des études de ce premier tome :

> Comment analyser l'activité de la personne apprenante lorsque cette dernière est confrontée à une ingénierie ou à un dispositif pédagogique spécifique visant notamment à lui accorder une place centrale dans la construction ou l'usage de notions ou de concepts, objets d'apprentissage(s), dans l'enseignement primaire, secondaire ou supérieur?
>
> Comment définir, caractériser et analyser précisément l'activité de la personne apprenante de différents points de vue (disciplinaire, langagier, gestuel, matériel ou du point de vue de la personne enseignante ou des médiations) lorsque cette dernière est confrontée à une tâche mathématique en classe ou encore dans un environnement reposant principalement sur l'usage de ressources numériques?

Chacun des textes proposés dans ce premier tome apporte un éclairage sur ces questions, selon une porte d'entrée spécifique. Dans ce qui suit, un sommaire des recherches menées pour chacun de ces articles est exposé. Ce premier coup d'œil permet d'explorer l'angle d'analyse de ces derniers et, ainsi, leur contribution à l'avancement des connaissances de ce champ de recherche.

Le premier article de ce numéro, rédigé par Céline Constantin et Lalina Coulange, traite de l'activité mathématique d'élèves âgés de 6-7 ans. Les didacticiennes étudient, à travers cette recherche, le sens et l'interprétation du signe « = » avec un regard sémiolinguistique, en étudiant précisément les représentations sémiotiques en référence aux travaux de Duval. Elles analysent très finement des épisodes choisis provenant de classes de première année de primaire en France. Les autrices proposent donc des exemples concrets d'analyses didactiques d'interactions langagières afin de mettre en exergue des éléments théoriques s'appuyant sur leur perspective sémiolinguistique. À partir de ces analyses, elles identifient une ambivalence sémantique qui joue un rôle important dans la construction du sens du signe « = » chez les élèves. Cette ambivalence est susceptible de provoquer une certaine incertitude par rapport au signe « = », et ce, autant chez les élèves que les enseignants. Les autrices suggèrent que l'identification de ces ambivalences pourrait servir de leviers pour l'apprentissage offrant, d'une part, une certaine vigilance et, d'autre part, une mise en relation de ces dernières. De plus, elles relèvent un lien important avec le contexte construit autour des tâches proposées.

Le deuxième article, réalisé par Sylvie Grau, traite de l'activité mathématique d'élèves âgés de 14 à 16 ans en lien avec la modélisation fonctionnelle. Elle nous propose un cadre d'apprentissage par la problématisation des situations en jeu. Ce regard théorique sur l'activité mathématique des élèves en résolution de problèmes s'appuie sur les changements de registres explicatifs prenant en considération les dimensions épistémologique, sociale et cognitive des élèves. Les outils d'analyse mis en œuvre dans ce cadre mettent en exergue la dynamique et la complexité de la problématisation par les élèves en classe selon quatre composantes illustrées dans des losanges gradués. Ce cadre vient compléter celui de la TSD en précisant des éléments de compréhension en lien avec l'*agir*, la *pensée* et le *dire* des élèves lors d'une telle activité mathématique par une caractérisation de leur niveau de problématisation et de la manière de la faire progresser en classe.

Inen Akrouti propose une étude réalisée en Tunisie sur la modélisation d'un phénomène physique en tant qu'approche spécifique adéquate pour l'enseignement et l'apprentissage du concept d'intégrale au niveau universitaire. La situation du barreau, initialement élaborée par Legrand et exploitée dans cette recherche, privilégie des allers-retours entre le concret et l'abstrait, entre l'intuition et la formalisation. Les étudiants doivent déterminer la valeur de la force d'attraction exercée par un barreau de longueur finie sur une masse ponctuelle située dans son prolongement à une distance donnée. L'étude de l'activité de l'étudiant est modélisée dans le cadre de la théorie des situations didactiques en identifiant précisément les situations d'action, de formulation et de validation de la séquence. L'autrice effectue une analyse a priori détaillée au cours de laquelle elle définit précisément les différents niveaux de milieux, explicitant pour chacun d'eux la nature et la fonction des raisonnements que les étudiants sont susceptibles de produire. Pour ce faire, elle utilise le modèle de Bloch et Gibel qu'elle enrichit en associant au raisonnement le niveau de rationalité correspondant. L'activité de l'étudiant au cours de la séquence est étudiée très finement par l'analyse des différentes formes de raisonnements élaborés en situation. Au cours de la situation de validation, la chercheuse effectue une analyse précise des interactions langagières entre étudiants, visant à étudier la capacité des étudiants à valider ou à invalider les conceptions erronées de certains par la production d'arguments adéquats.

Le quatrième article de ce numéro représente une étude réalisée par Fabienne Venant à l'Université du Québec à Montréal avec des personnes étudiantes suivant un cours universitaire de mathématiques dans le cadre de leur formation initiale des maîtres. Cette autrice a analysé l'activité mathématique de ces personnes apprenantes en situation de résolution de problèmes *d'une situation* novatrice, complexe et signifiante, leur demandant de programmer un robot afin qu'il réalise une danse. Conjuguant l'approche constructionniste de Papert et les modèles récents liés à la résolution de problèmes de Polya et Rott, l'analyse didactique des productions et des journaux de bord de ces derniers a permis de mettre en lumière la nature de leur activité pour chacune des phases de l'activité de résolution de problèmes. Il en résulte un modèle illustrant les différentes phases de résolution de problèmes en contexte de robotique adapté à celui de Rott. De plus, le texte met en exergue l'activité mathématique de ces personnes apprenantes en tenant compte de la complexité de cette situation se situant à l'intersection des mathématiques, des sciences, de la technologie et de la danse.

Le cinquième article de ce premier tome qui porte sur l'étude et la modélisation didactiques de différentes facettes de l'activité mathématique de la personne apprenante est celui de Luis Radford. Ce dernier texte aborde le concept même de l'activité et de l'apprenant. L'activité de la personne apprenante prend ici appui sur la perspective dialectique matérialiste. Ce texte appelle ainsi à une réflexion didactique de ce concept selon la théorie de l'objectivation. Ce cadre historico-culturel de l'activité est opérationnalisé par une analyse de trois types de médiations mises en place lors de séances de classe du primaire en lien avec l'enseignement-apprentissage de l'algèbre. Ces trois médiations sont issues d'un processus collectif impliquant l'élève, l'objet d'apprentissage, l'enseignant et surtout les interactions entre toutes ces composantes. Par cette réflexion, l'auteur nous convie à considérer une troisième voie possible, outre celle de mettre l'accent sur l'activité ou sur l'apprenant, en proposant d'envisager ces deux personnes à la fois comme productrices et produits d'une activité conjointe qu'il nomme l'activité d'enseignement-apprentissage.

Bonne lecture!

Sens et interprétation du signe « = » du point de vue d'élèves de 6-7 ans

Céline CONSTANTIN
LIRDEF, Univ Montpellier, Univ Paul Valéry Montpellier 3, Montpellier, France
celine.constantin@umontpellier.fr
Lalina COULANGE
LaB-E3D (EA 7441), Univ Bordeaux, France
lalina.coulange@u-bordeaux.fr

Remerciements : Nous tenons à remercier Florence Luong Dinh Giap et Martine Champagne pour les extraits de transcriptions (Luong Dinh Giap, 2020) et les échanges avec elles deux, non sans lien avec le sujet au cœur de cet article. Un très grand merci également à toutes les enseignantes qui se sont prêtées au jeu délicat de l'observation filmée sur l'introduction délicate de ce fameux « = ».

Résumé : La prise en compte du point de vue de l'élève dans des situations d'introduction du « = » en première année de primaire nous a amenées à identifier des phénomènes nouveaux d'ambivalence sémantique quant au sens et à la dénotation des représentations sémiotiques, auxquels peuvent se référer les élèves dans ces situations d'enseignement-apprentissage. Les analyses d'épisodes de quatre classes de CP en France (élèves de 6-7 ans) montrent que cette ambivalence joue un rôle important dans la construction de significations du signe « = » du point de vue des élèves. Ces significations dépendent également de contextes construits autour de tâches scolaires variées et des ressources relevant de la littératie (chronotopique) convoquées par les élèves.

Mots-clés : Signe égal, sens, dénotation, contextes interprétatifs, littératie (chronotopique), point de vue de l'élève.

The meaning and interpretation of the "=" sign from 6-7-year-old pupils' point of view

Abstract: Taking into account pupils' point of view in situations where the "=" sign is introduced in the first year of primary school led us to identify new phenomena of semantic ambivalence surrounding the meaning and denotation of semiotic representations, to which pupils can refer in these teaching-learning situations. Analysis of sessions from four first-grade classes in France (with 6-7-year-olds) shows that this ambivalence plays a significant role in pupils' construction of meanings associated with the "=" sign . These meanings also depend on the context of various school tasks and on the (chronotopic) literacy resources used by the pupils.

Keywords: Equals sign, sense, denotation, interpretative contexts, chronotopic literacy, students' point of view.

Introduction

Les recherches internationales en didactique des mathématiques sont nombreuses à avoir identifié des difficultés de compréhension autour du signe « = ». Dès les années 1970, elles montrent la prégnance de l'interprétation de ce signe comme « annonce de résultat » ou comme « opérateur » tout au long du primaire (notamment, Denmark et al., 1976 ou Behr et al., 1980) voire au-delà (Kieran, 1981) constituant un obstacle potentiel à l'entrée dans l'algèbre élémentaire dans le secondaire. Se centrant sur la première année de primaire (élèves de 6-7 ans), Falkner et. al. (1999) et Theis (2005a) ont conçu et expérimenté des séquences d'enseignement destinées à améliorer les apprentissages autour du signe « = ». Si des progrès notables sont constatés, les chercheurs montrent qu'ils prennent du temps, avec des retours à une interprétation comme « opérateur » amenant Theis (2005b) à conclure que « l'apprentissage du signe = est un puissant obstacle cognitif pour des élèves de première année d'études » (Theis, 2005b, p. 11) y compris pour des élèves en réussite. Des observations dans des classes de première année de primaire en France (CP) montrent que, confrontés à des tâches d'écriture pour rendre compte de leur activité dans la résolution de problèmes arithmétiques, les élèves peuvent rencontrer bien plus de difficultés à produire une écriture d'égalité valide qu'à trouver la réponse au problème (Margolinas, 2019). Explorant l'articulation entre comptage, opérations numériques et écritures en ligne d'égalités lacunaires, Conne (1988) souligne l'importance d'éléments liés à la syntaxe, mais aussi des interactions entre enseignants et élèves susceptibles de contribuer à la (re)construction de significations. Ces recherches montrent également que si les élèves investissent des connaissances sur l'écrit elles paraissent peu identifiées par les enseignants. Dans le cadre d'une recherche codirigée par l'une d'entre nous (Luong Dinh Giap, 2020), une enquête conduite auprès d'enseignants français de CP a montré que 75 % d'entre eux considéraient l'introduction du signe « = » comme facile. Ceci explique sans doute la moindre attention qui semble être accordée à cette introduction par rapport aux symboles opératoires « + » ou « - »[1].

Nous avons donc, d'une part, supposé que les difficultés des élèves de première année de primaire sont encore peu reconnues ou prises en charge par la profession enseignante en France, et ce, malgré de nombreuses propositions formulées par des enseignants ou des formateurs dans des revues d'interface, anciennes (Daniau, 1976) ou plus récentes (Brignon et Eysseric, 2012). D'autre part, nous avons choisi d'adopter un nouveau point de vue sur l'activité des élèves lorsque des situations introductives du signe « = » sont effectivement organisées par des enseignantes et enseignants. Nous cherchons à mieux identifier dans quelle mesure et comment les élèves peuvent construire de premières significations autour du signe « = » en prenant en compte la coprésence d'autres signes liés aux nombres et aux opérations. Nous avons observé des situations d'enseignement et d'apprentissage visant à introduire le signe « = » dans quatre classes françaises de CP (élèves de 6-7 ans). De ce point de vue, les classes ne sont pas tout à fait représentatives de l'ordinaire de l'enseignement des mathématiques au CP. Précisons de plus que parmi les quatre enseignantes qui nous ont ouvert leurs portes, trois ont des proximités avec la formation ou la recherche en didactique des mathématiques, sans que nous puissions faire l'hypothèse qu'elles aient développé des connaissances spécifiques des questions qui nous préoccupent. De fait, ce ne sont pas les caractéristiques de leurs pratiques qui nous ont intéressées, mais l'opportunité qu'elles nous ont donnée d'étudier l'activité mathématique d'élèves dans des situations dédiées à l'introduction du signe « = ». Avant de préciser la démarche méthodologique qualitative suivie pour cette recherche, nous abordons dans une première partie les choix d'éléments de cadrage théorique fondant ce que nous qualifions qu'un point de vue sémiolinguistique ancré en didactique des mathématiques sur l'activité des élèves. Dans une deuxième partie, nous présentons les résultats d'analyses d'épisodes de classe en prise d'appui sur ces éléments. Ils mettent à jour des phénomènes qui révèlent le rôle joué par ce que nous qualifions d'ambivalence sémantique de certains signes (liés à des « collections » d'objets), mis en coprésence avec d'autres signes (liés aux écritures symboliques), dans les situations d'enseignement et d'apprentissage observées.

---

[1] Parmi les 32 enseignants de CP interrogés, 81 % affirment proposer une séance dédiée à l'introduction du signe « + ». Ils sont 41 % à répondre toujours (25 %) ou souvent (16 %) pour le signe « = » (Luong Dinh Giap, 2020).

1. Sens et interprétation de signes du point de vue de l'élève

À l'instar d'autres travaux en didactique des mathématiques (Bloch, 2015; Conne, 2008; Drouhard, 1992; Drouhard, 2012; Gobert, 2013; etc.), nous nous intéressons à la construction de connaissances mathématiques en prenant en compte les interactions des élèves avec une certaine variété de signes. Nous nous intéressons plus spécifiquement à un moment de la scolarité où il s'agit d'inviter les élèves à produire des premiers « écrits mathématiques » (Margolinas, 2019). De ce fait, l'élaboration de significations de signes symboliques, ici du signe « = », peut s'avérer d'autant plus complexe que d'autres signes de nature variée (iconiques, matériels, etc.) interviennent, renvoyant eux-mêmes à des connaissances mathématiques plurielles, comme celles des nombres et des opérations. Afin d'éclairer la complexité de ce qui se joue, nous allons dans cette partie centrer nos analyses sur des signes désignant potentiellement des nombres avant d'approfondir le cas de l'égalité dans la partie suivante.

1.1 Représentations sémiotiques, sens et dénotation

Nous postulons que le signe « = » s'inscrit d'emblée dans un système de signes, celui des écritures symboliques mathématiques (des nombres, des opérations, etc.), que nous considérons comme un registre de représentation sémiotique au sens de Duval (1993).

Dans les premières années d'enseignement, les écritures symboliques d'égalités interagissent avec d'autres représentations sémiotiques, par exemple au niveau scolaire considéré, des représentations iconiques de collections d'objets (figure 1).

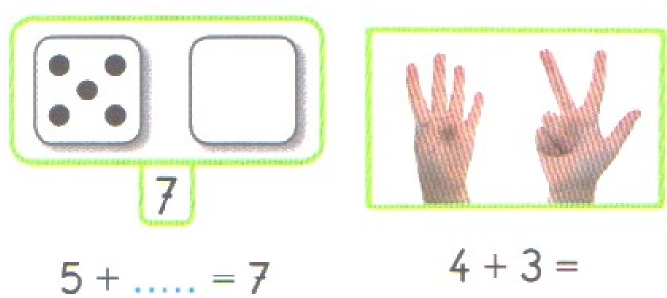


Figure 1. Diversité de représentations sémiotiques associées au signe « = »,
extraits du manuel de CP Opération Maths (Peltier et al., 2019, p. 17)

Ces collections peuvent être représentées graphiquement par le biais de « marques unités » (Duval, 2006a) comme les points des constellations de dé, ou effectivement présentes et manipulables comme les doigts d'une main ou des cubes. Ceci peut dès lors être l'occasion d'opérations de conversion d'un registre sémiotique à l'autre ou bien de traitements internes à un registre sémiotique donné. Ces opérations dépendent pour partie des propriétés des représentations sémiotiques en jeu. Ainsi le caractère « déplaçable » ou non de collections (Laparra et Margolinas, 2016) peut apparaître comme une propriété d'une représentation sémiotique iconique donnée, importante à prendre en compte pour caractériser les opérations permises sur ou avec cette représentation sémiotique. Traitements et conversions peuvent se réaliser alternativement ou simultanément dans l'activité mathématique (Duval, 2006b) selon des processus cognitifs complexes, l'enjeu majeur étant celui de l'articulation des représentations pour la compréhension des concepts en jeu.

Du point de vue des savoirs associés aux écritures symboliques autour du signe « = », suivant Drouhard (2012), nous considérons que la construction de significations de ces écritures articule des savoirs spécifiques des représentations sémiotiques (les traitements en faisant partie) et des savoirs correspondant aux notions mathématiques en jeu (comme l'égalité ou l'équivalence ou la commutativité). Ces deux dimensions sémiolinguistique et notionnelle fonctionnent en étroite interrelation et sont constitutives des significations des écritures. La distinction entre sens et dénotation introduite par Frege (1892/1971) et reprise par Drouhard (1992) permet de les étudier plus avant.

Ainsi, les écritures symboliques « 3 + 4 » et « 6 + 1 » dénotent le même nombre, la dénotation renvoyant à un objet mathématique dans la dimension notionnelle. Le dénoté de l'écriture symbolique « 3 + 4 = 6 + 1 » est alors « Vrai » [2]. Les deux écritures « 3+4 » et « 6+1 » n'ont cependant pas le même sens, s'agissant de deux sommes avec des paires distinctes de termes. Frege définit en effet le sens du signe comme résidant « où est contenu le mode de donation de l'objet » (Frege, 1892/1971, p. 103). Autrement dit, le sens réside dans la manière spécifique dont l'objet dénoté est donné « à voir » par le signe. Nous étendons l'emploi des notions de sens et de dénotation, envisagé dans les travaux de Drouhard (1992) pour les écritures symboliques, aux représentations sémiotiques iconiques liées aux collections (figure 1). Ceci nous conduit à envisager des aspects spécifiques de ces notions au regard des propriétés de ces représentations, ce que nous illustrerons plus loin à partir d'un exemple (voir 1.4).

1.2 Un point de vue sémiolinguistique sur l'activité de l'élève

En général, les liens entre signe, sens et dénotation sont objectivés et ne recouvrent pas de dimension singulière liée aux sujets (élèves ou enseignants) et aux usages des signes qu'ils font dans leurs activités. Voulant réintégrer le point de vue de l'activité de l'élève, tout en prenant en compte la production et la communication

---

[2] À l'instar de Drouhard, nous notons entre guillemets les écritures, ce qui permet par exemple de distinguer l'écriture d'une égalité comme « 3 + 4 = 6 + 2 » de son dénoté, ici « Faux ».

de signes, nous empruntons une voie qui nous semble proche d'une « approche pragmatique dans l'analyse de productions sémiotiques » telle que décrite par Duval (2006a). Il s'agit pour nous d'identifier des significations potentielles données aux signes par les élèves dans et par leur activité (notamment langagière) au sein de la classe de mathématiques, significations potentielles que nous qualifions d'interprétations.

1.2.1 Contextes d'interprétation des signes dans des tâches scolaires

Ces interprétations seront appréhendées au regard de caractéristiques des tâches mathématiques scolaires à même de les solliciter, mais aussi au regard de l'activité (notamment langagière) des élèves et des enseignants qui accompagne ou est convoquée par ces tâches. Ceci renvoie à la notion de contexte (Brossard, 1993, Bernié, 2004) – c'est-à-dire à tout ce qui participe de la « compréhension »[3] d'une tâche scolaire par les élèves et qui est coconstruit par les élèves et les enseignants au sein d'une situation d'enseignement et d'apprentissage. Ces contextes participent de l'interprétation des signes mis en présence ou en coprésence dans ces situations par les élèves (Gobert, 2013). Ils intègrent des dimensions (intra ou inter-) subjectives, propres aux usages de signes faits par les élèves et les enseignants dans leur activité. Si nous n'accédons d'ailleurs a priori qu'aux contextes liés aux tâches dans des situations scolaires à un instant donné (celui de notre observation), nous faisons l'hypothèse que les signes en présence ou en coprésence sont potentiellement « chargés » de significations déjà construites ou coconstruites (que ce soit au sein ou à l'extérieur de l'école) et que ces significations antérieures participent de ces contextes. Ainsi, nous nous interrogerons parfois sur l'origine des interprétations des signes, convoquées par les élèves et qui entrent en jeu de leur point de vue, dans une tâche scolaire donnée.[4] Nous intéressant à l'activité de jeunes enfants (de 6-7 ans), il nous a paru, de plus, essentiel de considérer les négociations de ces interprétations au regard des corps et des mouvements des corps. Nous rejoignons en cela Laparra et Margolinas (2012) qui

---

[3] Compréhension n'est pas à entendre ici comme une compréhension qui serait nécessairement celle visée par l'enseignant. Bernié (2004) définit le contexte comme tout ce qui fait sens pour les élèves dans une tâche scolaire – mais le mot « sens » prenant précisément une tout autre signification dans les travaux préalablement cités de Frege – nous avons préféré éviter de le reprendre ici.

[4] En cela, notre point de vue associant contexte (interprétatif, en lien avec une tâche scolaire) et interprétation (de signes par les élèves) se rapproche de celui de Laparra et Margolinas (2016), quand elles parlent « d'objets du monde », mais l'importance que nous accordons aux interactions langagières dans la façon dont se négocient des interprétations de signes par les élèves nous conduisent à préférer parler de contextes que de milieux de situations.

distinguent les connaissances relevant de ce qu'elles ont qualifié de l'oralité et de la littératie en référence aux travaux de Goody (1997).

1.2.2 Oralité et littératie

Les connaissances relevant de l'oralité renvoient aux « ressources corporelles » (Laparra et Margolinas, 2016) dont disposent les élèves pour faire usage et interpréter des signes. Les représentations sémiotiques iconiques (mais pas seulement) peuvent ainsi renvoyer aux mouvements des corps lorsqu'une collection est explorée en ligne ou en colonne, ou lorsque les objets sont déplaçables. Parallèlement, les signes relevant des écritures symboliques (mais pas seulement), peuvent nécessiter de convoquer des ressources typiques de l'écrit et des usages raisonnés de ces ressources, soit des connaissances relevant de la littératie. Se pose dès lors la question d'un continuum entre ces connaissances dans l'interprétation des signes par les élèves. Margolinas (2019) interroge précisément ce continuum dans la production d'écritures symboliques relevant d'égalités par des élèves de CP. Elle montre combien les ressources de l'écrit qui permettent de manifester un lien entre l'espace et le temps sont importantes à prendre en compte dans l'analyse de ces premiers écrits mathématiques par les élèves, ce qui l'amène à parler de littératie chronotopique (Laparra et Margolinas, 2016) pour rendre compte de cet empan spécifique de la littératie considéré comme « transparent » pour les enseignants. De ce point de vue, les représentations sémiotiques iconiques de nombres nous amènent à nous questionner plus avant. En effet, elles convoquent potentiellement des ressources relevant de l'oralité plus que les représentations symboliques, tout en posant la question du continuum possible avec la littératie, dans le rôle que l'on peut faire jouer à ces représentations dans la production ou l'interprétation d'écritures symboliques mathématiques. Nous avons dès lors cherché à approfondir des spécificités potentielles de ces représentations iconiques, du point de vue de la distinction entre sens et dénotation.

1.2.3 Sens et dénotation d'une représentation iconique de nombre?

Nous cherchons à déterminer dans quelle mesure, dans la classe de mathématiques, les représentations sémiotiques iconiques peuvent renvoyer à une incertitude quant à l'objet dénoté du point de vue de l'élève.

Prenons l'exemple de deux représentations sémiotiques iconiques liées aux doigts d'une main. L'une est issue de la figure 1, l'autre sera montrée aux élèves dans l'une des classes observées.

Figure 2. Deux représentations iconiques avec les doigts d'une main

On peut considérer que ces deux représentations dénotent le même objet : le nombre 4. Elles peuvent être regardées comme équivalentes de ce point de vue, à la condition que ces deux représentations soient effectivement considérées comme celles d'un nombre. Toutefois, une telle dénotation de type nombre nous semble renvoyer à un usage de cette représentation sémiotique comme un signe de signe au sens de Frege (1892/1971), car elle suppose une prise d'appui sur le sens de cette représentation sémiotique, elle-même liée à une autre dénotation, celle d'une collection constituée d'unités à dénombrer. Le cas des signes de signes fait partie des exceptions soulevées par Frege (1892/1971) au lien régulier entre signe, sens et dénotation. Il advient, par exemple, lorsque le sens du signe ou le signe lui-même peuvent devenir des objets de discours. Les représentations iconiques que nous avons considérées à la figure 2 peuvent alors être appréhendées comme dénotant une collection (de cardinal 4). Dans ce cas, elles ne dénotent pas le même objet, les deux collections étant organisées différemment par rapport à la partie du corps que constitue la main (l'une englobant le pouce, l'autre le petit doigt). Ceci renvoie à une différence de sens entre les deux représentations dans le cas de la dénotation de type nombre, puisque le nombre 4 est en quelque sorte « donné à voir » différemment du point de vue de l'organisation spatiale des doigts d'une main.

Nous considérons donc qu'il y a ici une incertitude quant à la dénotation d'un même signe (de type iconique et collection) selon qu'il soit considéré comme signe de nombre ou signe de signe, c'est-à-dire signe d'une collection elle-même signe de nombre, ainsi que l'illustre la figure ci-dessous (à l'instar de Drouhard, nous utilisons la notation δ pour la dénotation).

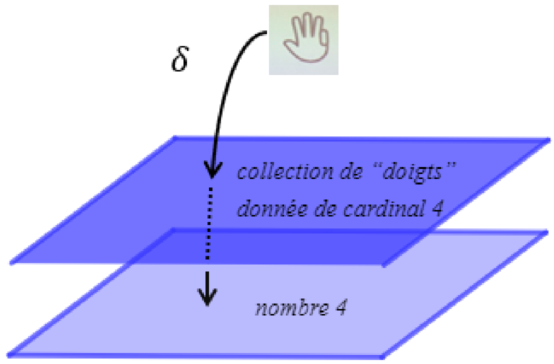


Figure 3. Une représentation iconique comme signe ou signe de signe

De telles représentations sémiotiques iconiques dénotent possiblement, tantôt des collections (même si représentées graphiquement) de cardinaux donnés, tantôt des nombres, prenant pour sens, les cardinaux de ces collections.

Nous résumons, dans le schéma ci-après, ce que cette ambivalence dénotationnelle recouvre plus précisément :

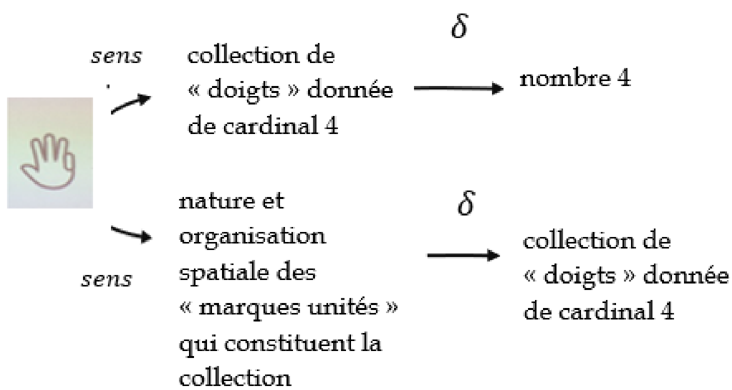


Figure 4. Ambivalence sémantique d'une représentation iconique

L'ambivalence sémantique des représentations sémiotiques iconiques fait émerger la nécessité d'analyser la situation de l'interprétant (enseignant ou élève) en ouvrant la possibilité que celui-ci les interprète au regard d'une dénotation ou d'une autre. Lorsque de telles représentations sont utilisées pour introduire le signe « = », la construction possible de significations associées à l'équipotence de collections nous semble présenter d'emblée une certaine forme d'épaisseur au regard de cette ambivalence sémantique. Suivant les différentes entrées présentées en 1.2., nous avons donc analysé des séances d'introduction du signe « = » dans quatre classes différentes de première année de primaire. Nous présentons notre corpus avant d'aborder les résultats de nos analyses dans la deuxième partie de ce texte à partir des critères d'analyse retenus en lien avec notre étude théorique.

1.3 Présentation du corpus et des critères d'observation et d'analyse liés aux interprétations de représentations sémiotiques

Notre corpus est constitué de films et de retranscriptions de quatre séances d'introduction au signe « = » réalisées par quatre enseignantes de CP. La première classe filmée (celle de P1) se situe dans un « quartier prioritaire » d'une grande ville, ce qui va de pair avec un public d'élèves majoritairement issus de milieux socio-économiques défavorisés, voire très défavorisés. Les trois autres classes se situent dans des milieux ruraux. Les élèves de l'une de ces classes (celle de P3) sont issus de milieux socio-économiques défavorisés, contrairement aux deux autres (celles de P2 et P4). Ainsi que nous l'avons présenté en introduction, ces enseignantes n'ont pas des pratiques tout à fait ordinaires, mais nous les avons sollicitées parce qu'elles avaient l'habitude ou l'intention de proposer une séance spécifique autour du signe « = ». Les séances ont eu lieu sur deux années scolaires, mi-septembre 2018 (P1), mi-octobre 2018 (P2), début février 2019 (P4) et octobre 2019 (P3).

Lorsque cela a été possible (pour P2 et P4), nous avons utilisé plusieurs caméras (face et dos aux élèves, fixes et mobiles) afin de collecter davantage de données sur les gestes et regards des élèves et de l'enseignant. Nous avons complété nos retranscriptions par des photos ou extraits de films.

À des fins de concision, les situations choisies et aménagées par les enseignantes seront présentées au fur et à mesure des épisodes retenus pour illustrer nos résultats. Nous pouvons cependant dire que dans tous les cas, les situations proposées aux élèves renvoient à des comparaisons de cardinaux de collections représentées ou « manipulables » pour introduire l'égalité. Les représentations sémiotiques présentes dans ces situations sont toutefois d'une grande diversité, comme nous le verrons.

Au travers de nos analyses, nous cherchons quel(s) sens ou quelle(s) dénotation(s) peuvent être assignés aux représentations sémiotiques à la fois iconiques et symboliques par les élèves (et l'enseignante). Nous cherchons aussi à déterminer dans quelle mesure des opérations sur et permises par ces représentations sémiotiques (comme des conversions et des traitements) peuvent contribuer aux apprentissages autour du signe « = », tant du point de vue notionnel que sémiolinguistique. Nous cherchons enfin à identifier quels sont les points d'appui liés à des éléments de contexte susceptibles d'entrer en jeu dans l'activité de l'élève. Il s'agit de prendre en compte des caractéristiques des tâches données, mais aussi les activités (y compris langagières) des enseignantes ou d'élèves à même de participer à la construction ou à la coconstruction d'interprétations par les élèves, des représentations sémiotiques utilisées. Nous interrogeons également le rôle des connaissances liées à l'oralité et à la littératie dans cette (co)construction au regard des spécificités des représentations iconiques et symboliques mises en avant plus haut.

2. Une diversité de représentations sémiotiques : verrou ou levier pour accéder au sens du « = »?

Dans cette partie, nous abordons les résultats de nos analyses selon trois sections qui correspondent aux principaux types de résultats obtenus. La première section concerne des ambiguïtés potentielles des représentations sémiotiques utilisées dans les situations d'enseignement et d'apprentissage observées. Des épisodes de classe donnent à voir comment ces ambiguïtés peuvent prêter à des malentendus du point de vue de l'activité sollicitée de la part des élèves. Les deux sections suivantes visent à montrer comment et sous quelles conditions de telles ambiguïtés peuvent se muer en verrous mais aussi parfois en leviers pour la construction de significations pertinentes des écritures symboliques par certains élèves.

2.1 Des représentations sémiotiques iconiques ambiguës

Nous nous appuyons dans cette section sur deux épisodes observés dans deux classes différentes.

2.1.1 Un malentendu sur le sens

Le premier épisode concerné a été observé dans la classe de P1. L'enseignante a élaboré une situation à partir d'un jeu présenté dans un ouvrage pédagogique, le « jeu du Lucky Luke » (Charnay et al., 2005). Elle en a revu le scénario pour introduire le signe « = ». Le jeu mis en œuvre dans la classe est donc le suivant : la maîtresse donne un nombre à l'oral et les élèves doivent le représenter à l'aide des doigts de leurs deux mains. Il est possible de fermer le poing pour représenter le nombre 0. Lors de la séance filmée, la maîtresse utilise des représentations sémiotiques dessinées de mains gauches (ce qui ne correspond pas tout à fait à la situation vécue par les élèves qui utilisent leurs deux mains).

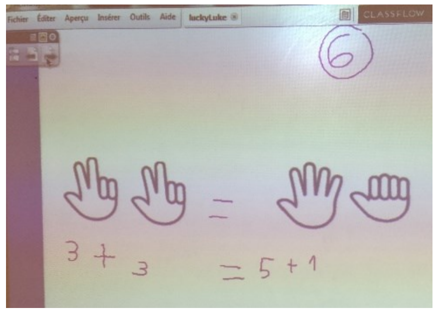


Figure 5. Représentations sémiotiques et symboliques du 6 – situation du Lucky Luke

Les nombres qui font l'objet de l'introduction du « = » sont 5, 6 et 7. Ainsi ci-dessus, le nombre 6 (« 6 » étant entouré en haut du tableau numérique) a été représenté de deux façons différentes avec les images de deux mains. Ces représentations correspondent à deux organisations possibles de deux sous-collections de marques unités : trois marques unités et trois marques unités ou cinq marques unités et une marque unité. Le signe « = » a été apposé entre ces deux représentations iconiques pour indiquer qu'elles dénotent le même nombre 6. En dessous, P1 a produit une écriture symbolique qui correspond pour partie à une conversion dans le registre des écritures symboliques des représentations iconiques données – même si le signe « = » était déjà écrit en amont. L'enjeu de la tâche donnée collectivement aux élèves semble être précisément la production de telles écritures symboliques.

L'épisode qui nous intéresse est lié au nombre 7. Les dessins donnés au tableau sont les suivants.

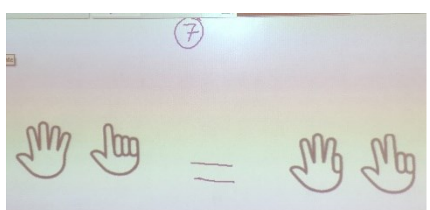


Figure 6. Égalité et représentations sémiotiques et symbolique du 7 – situation du Lucky Luke

La maîtresse introduit le signe « = » entre ces deux représentations sémiotiques iconiques et interroge les élèves sur la signification de ce « = » verbalisé « signe égal » à l'oral.

Tableau 1. Extrait de transcription sur le « 7 » – situation du Lucky Luke

P1	Égal / qu'est-ce que ça veut dire SOL / égal /? pourquoi on a écrit le signe égal / ici?// LAM /
LAM	pour dire que / ça fait / heu / ça fait encore sept /

P1	pour dire que / cinq doigts et deux doigts / ça donne le même nombre de doigts que / quatre et trois / ça veut dire que de ce côté-là et de ce côté-là / on a le même nombre / la même quantité / d'accord?/ (*à ALIY*) je te vois qui fais comme ça // comment?/
ALIY	ça fait / heu / (*lève quatre et trois doigts mais en disposant ses doigts différemment*)
P1	[...] comme ça / non, regarde /il a levé quatre / il a quand même levé quatre et trois / quatre et trois on l'a ici / déjà /
YAN	non / comme ça /
ALIY	ça fait /
P1	(*à YAN*) oui / mais c'est quand même quatre / et trois / YAN /
ALIY	ça fait sept /
P1	ce n'est pas les mêmes doigts / mais c'est quand même quatre / et trois / tu m'entends?/ et ça fait / c'est quand même égal / et ça fait sept / bien sûr / puisque c'est quatre et trois [...]

Certains élèves comme LAM semblent s'inscrire assez spontanément dans les attentes de l'enseignante en se référant au nombre dénoté par chacune des représentations sémiotiques iconiques données (comme cardinal des deux collections organisées en deux sous-collections différentes) pour justifier l'introduction du « = ». Cependant, d'autres comme ALIY et YAN sont visiblement perturbés par l'une des deux représentations iconiques données, liée à 4 et 3, car elle ne correspond pas à la configuration obtenue avec leurs propres mains. Une forme d'ambivalence dénotationnelle apparaît ainsi dans cette situation d'enseignement et d'apprentissage. Les représentations sémiotiques iconiques dénotent soit le nombre cardinal de la collection (du point de vue de l'enseignante et peut-être d'un élève comme LAM), soit la collection (du point de vue de ALIY et YAN) avec une importance à accorder à son organisation spatiale. Le contexte de production de collections de doigts lors de la séance précédente joue un rôle non négligeable de ce point de vue dans la classe. Les interventions de P1 tentent de revenir sur la dénotation de type nombre de la sous-collection de cardinal 4 (« c'est quand même quatre ») pour lever le malentendu visiblement rencontré par certains de ses élèves. Toutefois si l'on considère ce que révèle ce malentendu du point de vue des élèves investis dans la tâche donnée par l'enseignante, celle-ci peut paraître particulièrement ambiguë au regard des deux dénotations possibles des représentations sémiotiques en jeu. D'un côté, l'organisation spatiale des « 4 doigts » levés sur une seule main n'a pas d'importance. D'un autre côté, l'organisation spatiale des deux mains est déterminante pour que la représentation sémiotique iconique dénote un nombre cardinal d'une collection, lui-même somme des nombres cardinaux des deux sous-collections ainsi représentés. Implicitement, la tâche nécessite donc de considérer conjointement une dénotation de type nombre, renvoyant au sens lié au cardinal de la collection et aux cardinaux des deux sous-collections réunies, et une dénotation de type collection pour envisager le sens lié à l'organisation spatiale en deux sous-collections d'une collection de cardinal 7. Ce jeu interprétatif peut être d'autant moins accessible pour les élèves que le signe « = » a été écrit entre les deux images. Le propos tenu par LAM qui s'inscrit visiblement davantage dans les attentes de l'enseignante est particulièrement révélateur de ce point de vue. En disant « ça fait encore sept », cet élève paraît investir la dénotation de type nombre des représentations sémiotiques des deux mains en lien avec le sens « cardinal » de chaque collection, ce qui correspond aussi à la mémoire de la situation précédente vécue (il fallait faire 7 avec les mains lors de la séance précédente). Dès lors, on peut penser que l'écriture symbolique qui traduirait un tel propos d'élève n'est ni le signe « = » entre les deux représentations sémiotiques des mains, ni même l'écriture produite par la suite en dessous « $5 + 2 = 4 + 3$ », mais plutôt « $7 = 7$ ». En effet, cette écriture traduit directement l'identité des dénotés de chacune des deux représentations – liés au sens du cardinal de chaque collection. Au contraire, « $5 + 2 = 4 + 3$ » nécessite une conversion qui s'appuie sur une transformation préalable de la collection de doigts en réunion de deux sous-collections spatialement visibles – pour envisager ce cardinal comme somme des cardinaux de chaque sous-collection. Si l'enseignante est attentive (et cela démontre une forme d'expertise de sa part) au malentendu que recouvrent les interventions de deux de ses élèves au sujet de la représentation sémiotique liée au nombre 4, l'analyse de la tâche mathématique proposée révèle ainsi une forme d'épaisseur dans les interprétations attendues de la part des élèves. L'ambivalence dénotationnelle de telles représentations sémiotiques iconiques éclaire ainsi une part des difficultés rencontrées par certains élèves lors de l'épisode analysé. Dans le même temps, si les élèves n'accèdent pas aux sens finalement indirects de ces représentations iconiques de nombres comme cardinaux de collections, alors il est fort à parier que ces représentations ne jouent pas leur rôle par rapport à la construction du sens du signe « = » et des écritures symboliques introduites par la suite. C'est un peu ce que tend à montrer la section suivante à partir d'une observation faite dans une autre classe.

2.1.2. Un projet d'introduction du signe « = » rendu impossible?

Dans la classe de CP de P2, les élèves disposent d'étiquettes avec des représentations sémiotiques faites de marques unités. Ils ont à les ranger dans les colonnes d'un tableau, chaque colonne étant surmontée d'un nombre représenté par son écriture symbolique chiffrée (entre 1 et 9).

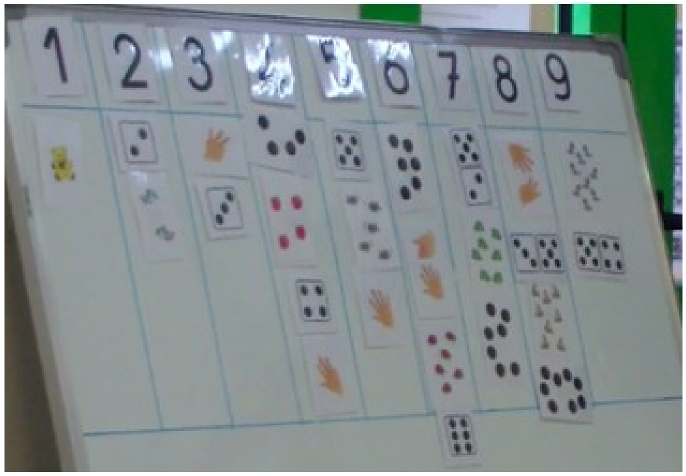


Figure 7. Représentations sémiotiques et symboliques – situation des étiquettes

Les représentations iconiques sur les étiquettes renvoient soit à des représentations de mains ou de dés, soit à des collections non organisées spatialement avec, par exemple, deux poissons, quatre coccinelles ou quatre points.

Dans la tâche ainsi aménagée par P2, la dénotation de type nombre de telles représentations iconiques sémiotiques peut permettre de penser ces représentations comme équivalentes entre elles et équivalentes également à ce que dénote le symbole emblème de chaque colonne. Le projet de l’enseignante est de s’appuyer sur le fait que ces représentations ont le même dénoté (nombre) même si elles n’ont pas le même sens (collection) pour introduire l’égalité. Les élèves placent les étiquettes correctement dans le tableau sans éprouver de difficulté particulière. Toutefois, quand l’enseignante demande aux élèves de préciser ce qu’ils ont observé sur les étiquettes, il semble que les élèves résistent à revenir au sens (collection) de ces représentations sémiotiques du nombre. À plusieurs reprises dans la séance, les élèves montrent qu’ils considèrent d’emblée le dénoté nombre en répondant « j’ai deux » à la question « qu’est-ce que tu as toi [sur ton étiquette] », ou encore « moi j’ai neuf » ou plus tard, lorsqu’on leur demande ce qu’ils observent dans la colonne du six « y’a six à chaque fois ». L’enseignante relance sans cesse en demandant « y’a six quoi? » par exemple, alors que du point de vue de l’élève dans la tâche (placer dans la bonne colonne), c’est pourtant le dénoté « nombre » qui permet d’effectuer la conversion implicite entre l’écriture symbolique « 6 » (en tête de la colonne du tableau) et la représentation iconique.

Les élèves ne comprenant visiblement pas les attentes de l’enseignante, signalent des caractéristiques très variées des objets représentés (« poissons », « points noirs » ou « petits points alignés »). Ils précisent certes à chaque fois le cardinal de la collection d’objets concernés (« deux poissons », « trois points noirs » ou

« quatre petits points alignés ») mais semblent perdre de vue que nonobstant les différences relevées liées aux objets représentés ou à leur disposition spatiale, ce qui peut justifier leur regroupement (par colonne) provient précisément des cardinaux qui ne sont pas pointés par les élèves comme une caractéristique commune des collections. Si l'enjeu des formulations paraît être celui d'assurer la relation entre nombre (dénoté) et sens (collection) en appui sur le cardinal, du point de vue des élèves, on peut se demander au regard de leurs interventions s'ils ne restent pas sur un « autre » objet dénoté que celui visé par l'enseignante (la collection). Le malentendu perdure au moment de l'introduction du signe « = » qui se fait entre deux représentations sémiotiques iconiques (de la même façon que dans la classe de P1 d'ailleurs). Deux étiquettes sont placées sous le tableau (figure 8) et un élève vient écrire « = » entre les étiquettes au feutre.

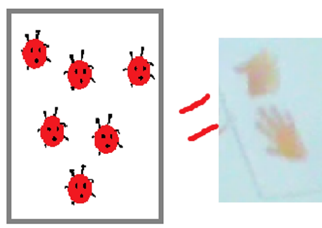


Figure 8. Introduction du signe « = » – reproduction du tableau

Tableau 2. Extrait de transcription sur l'introduction du signe « = » - situation des étiquettes

P2	*(prend deux cartes : six doigts et six coccinelles)* est-ce que les images sont les mêmes?
EE	noon
P2	Non / pourquoi c'est pas les mêmes images? TIM
TIM	parce que y'a des doigts / et sur l'autre y'a des coccinelles
P2	très bien, alors qu'est-ce qui est identique / qu'est-ce qui est pareil? (*P2 attend*) NOL?
NOL	le chiffre
P2	le chiffre / donc c'est … la quan…
EE	..tité (*en même temps que P*)
P2	c'est le nombre, quand on a des quantités qui sont pareilles, identiques, les mêmes, on dit qu'elles sont é./.
EE	./. gales
P2	Égales / vous le connaissez ce mot? Certainement que vous le connaissez / alors on peut dire que quand les quantités sont identiques / elles sont égales / et égal / c'est un signe qui existe en mathématiques / est-ce que quelqu'un le connaît ce signe?

L'ambivalence dénotationnelle tient au fait qu'en écrivant le signe « = » entre les deux représentations iconiques, on peut considérer que les représentations sont celles de nombres, alors qu'elles viennent d'être identifiées dans le discours à des images qui ne sont pas les mêmes, c'est-à-dire à des représentations de collections d'objets de nature différente. L'introduction du symbole « = » paraît presque contradictoire avec ce que l'enseignante tentait de faire en premier lieu, c'est-à-dire de faire distinguer deux représentations sémiotiques iconiques de collections différentes, comme un préalable nécessaire pour accéder au dénoté type nombre. *A contrario*, tout comme dans la classe précédente, l'égalité « 6 = 6 » qui paraîtrait plus cohérente avec son projet n'est pas apparue. Ainsi, les amalgames constatés entre représentations sémiotiques et dénotés semblent rendre a priori difficile d'accès l'idée même d'un dénoté commun à des représentations différentes, pourtant au cœur de la signification de l'égalité.

Finalement, que dénotent ces représentations sémiotiques iconiques? Peut-on dire qu'elles dénotent un nombre, sans pour autant renvoyer au mode de donation associé – une collection dont il est le cardinal– qui lui-même renvoie à une forme de dénotation directe d'une collection organisée d'une certaine façon (spatialement et du point de vue des éléments censés jouer le rôle d'unités)? Le difficile retour à un tel sens qui paraît au cœur du projet de cette deuxième enseignante, et les malentendus observés dans la classe de la première enseignante révèlent combien les interprétations en jeu peuvent être complexes pour les élèves au regard de l'ambivalence dénotationnelle des signes. Les phénomènes observés semblent constituer des verrous d'accès potentiels à la construction du sens du signe « = ». Pour autant, d'autres observations tendent à montrer que sous certaines conditions, des usages de ces mêmes représentations sémiotiques iconiques peuvent au contraire provoquer des interprétations d'élèves participant potentiellement à l'apprentissage de connaissances mathématiques. Ces connaissances paraissent toutefois assez difficiles à « capitaliser » pour les enseignants dans un registre de représentation sémiotique symbolique, car elles sont couplées à des connaissances relevant de l'oralité et de la littératie dans une forme de continuum (Laparra et Margolinas, 2016) peu aisé à négocier. C'est ce que nous abordons dans la section suivante.

2.2 Représentations sémiotiques iconiques et symboliques : quel continuum entre oralité et littératie du point de vue des élèves?

Retour sur le jeu du Lucky Luke. Revenons au jeu du Lucky Luke. Lors de la séance précédant l'introduction du signe « = », les élèves ont représenté un nombre donné oralement (comme « six » ou « sept ») à l'aide des doigts de deux mains. Les représentations iconiques dénotent donc a priori des nombres. Comme nous l'avons soulevé précédemment, la conversion en « 5 + 1 », par exemple, nécessite à la fois de considérer la dénotation collection et de réaliser un traitement visuel pour distinguer deux sous-collections tout en considérant les deux mains comme réunion de ces sous-collections. Au regard de la tâche de production de l'égalité symbolique, une forme de simultanéité statique devient nécessaire dans le point de vue à adopter sur la production sémiotique issue de la première séance pour y envisager une collection donnée, organisée en deux sous-collections données. Or, l'enseignante introduit dans son discours une forme de temporalité : liée tantôt à la façon dont cette représentation a été produite par les élèves ou tantôt à la façon dont elle peut être validée, par surcomptage ainsi que le montre l'extrait suivant.

Tableau 3. Extrait de transcription sur la production d'une représentation de 7 – situation du Lucky Luke

P1	ça c'était les façons qu'on avait trouvées pour faire cinq / (*change la page affichée au TNI*)
NEL	et là c'était les sept /
	oui / on avait essayé / NEL a dit / même sans lever le doigt / de trouver sept / mais qu'est-ce qu'on a écrit au tableau /
YAN	Lucky Luke /
P1	JOM ce serait bien que tu sois un peu attentive et que tu sois avec nous / SOL / pourquoi on a écrit ça au tableau // on va regarder ces doigts-là d'abord / (*montre la représentation de gauche*) qu'est-ce que c'est ça /
SOL	cinq /
P1	cinq /
EL2	moi je sais /
SOL	et deux /
P1	et deux /ça fait sept?/ (*lève ses deux mains avec cinq et deux doigts*)
EE	oui /
P1	ah /(*avance la main avec les cinq doigts*) cinq / (*touche son menton avec ses deux doigts*) six / sept / je compte / je rajoute deux / cinq / six / sept / et là / (*montre la représentation de droite*) qu'est-ce que c'est?/
EE	quatre et trois /
P1	est-ce que ça fait toujours sept?/(*lève quatre et trois doigts*)
EE	oui /
LAM	non / euh oui /
P1	quatre /
EL1	non/
LAM	oui /
P1	quatre / (*baisse tour à tour chacun des trois doigts*) cinq six sept / quatre et deux / cinq six / et encore un / sept /

Si on considère le champ additif tel que défini par Vergnaud (1991), les actions de l'enseignante liées au surcomptage convoqué conduisent à transformer un problème de relation partie-partie-tout (liée à la réunion des deux sous-collections) à un problème de transformation d'états (ajout d'une collection à une collection donnée initialement). Si l'on comprend bien la logique de l'action enseignante qui envisage le surcomptage comme nécessaire du point de vue de ses élèves pour produire ou valider de telles représentations sémiotiques iconiques, dans le même temps, on peut penser que ces actions brouillent le contexte interprétatif.

LAM semble ainsi résister à la réinterprétation formulée par l'enseignante qui introduit une forme de temporalité en disant « t'as fait quatre et après tu as rajouté pour faire cinq » dans l'extrait suivant.

Tableau 4. Extrait de transcription sur la production d'une représentation de 7 – situation du Lucky Luke

LAM	heu / en fait / moi j'avais dit cinq / j'avais /
P1	oui / comment tu l'as fait, toi / le cinq /
LAM	en fait /moi j'avais / moi j'avais / j'avais mis cinq / mais je me suis trompée avec les doigts /
P1	ah d'accord / mais comment est-ce que tu as fait, toi, le cinq / quand j'ai dit/ Lucky Luke cinq /t'as fait quatre et / et après tu as rajouté // pour faire cinq /
LAM	non / non / j'avais mis un /
P1	tu avais fait / quatre et un (*montre le cadre correspondant au TNI*) / mais tout le monde n'a pas fait la même chose / (*montre le deuxième cadre*) ça c'était quel Lucky Luke?/

Le désaccord de LAM conduit finalement P1 à une reformulation plus proche du sens visé de telles représentations sémiotiques (« tu avais fait quatre et un »). Si cette intervention peut paraître assez anodine à première vue, nous faisons l'hypothèse qu'elle ne l'est pas du point de vue de ce qui se joue en termes de contexte interprétatifs des représentations sémiotiques en présence. Il est d'ailleurs à noter que l'élève qui intervient ici est celui qui semble rentrer plus que les autres dans des interprétations des signes conformes au sens visé comme nous l'avons vu plus haut. Un autre fait notable concerne le couple de nombres dont il est question (4 et 1). La représentation « 4 + 1 » peut être produite en appui sur la relation arithmétique entre 4 et son suivant. On peut également questionner le rôle que peut jouer le « 5 », cardinal de la collection doigts d'une seule main auquel LAM se réfère précisément juste avant, « j'avais mis cinq, mais je me suis trompée avec les doigts ». Il est possible que ce soit en partant de ce « 5 », en faisant passer un doigt levé d'une main à l'autre que LAM ait produit le « 4 » et « 1 », dans une temporalité autre que celle mise en avant par l'enseignante. Nous reviendrons sur ce point plus loin, car d'autres faits observés dans d'autres classes nous semblent à même de confirmer cette hypothèse.

Deux tours de hauteurs « égales ». Dans l'une des autres classes observées, l'enseignante P3 a fait un choix de représentations sémiotiques iconiques qui présente à la fois des similarités et des différences avec celles du jeu du Lucky-Luke. Dès lors, il nous est apparu intéressant de rapprocher certains des faits observés lors des deux séances concernées[5]. La tâche mathématique proposée par

[5] Nous remercions Florence Luong Dinh Giap pour nous avoir permis de reproduire le corpus recueilli dans le cadre de son mémoire (Luong Dinh Giap, 2020) et sur lequel nous avons conduit une nouvelle étude au regard de la problématique qui nous occupe dans cet article.

l'enseignante prend appui sur le matériel suivant : des cubes colorés emboîtables de couleurs variées. Deux couleurs différentes sont censées coder deux sous-collections différentes et il s'agit de construire des tours de même taille mais en jouant sur ce codage de manière à faire apparaître plusieurs décompositions d'un même nombre. Notons que la situation d'enseignement et d'apprentissage observée dans cette classe présente plusieurs aspects intéressants à noter par rapport aux précédentes. Tout d'abord cette caractéristique des deux tours à construire « de même taille » peut faire apparaître l'égalité des cardinaux des deux collections constituées – celle-ci sera d'ailleurs codée dans le registre symbolique par une égalité « 5 = 5 » en début de séance comme l'illustre l'image ci-dessous.

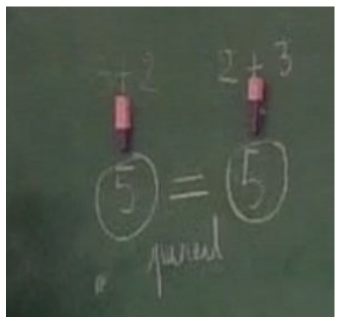
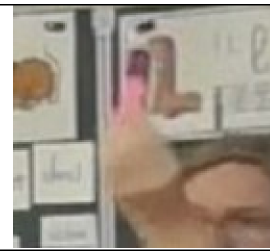


Figure 9. Représentations sémiotiques et symboliques du 5 – situation des tours (Luong Dinh Giap, 2020)

Ensuite, le codage par des couleurs différentes des cubes pour distinguer chacune des deux sous-collections (ce qui est souvent utilisé pour des problèmes de type partie-partie-tout) paraît a priori judicieux. Mais l'enseignante fait le choix de montrer deux collections avec deux sous-collections de cardinaux identiques 2 et 3 en jouant sur la couleur pour amener une connaissance qui relève de la propriété de commutativité de l'addition. De fait, une forme de chronologie est introduite dans l'écriture produite et dans l'organisation spatiale orientée verticalement des deux sous-collections codées par ces couleurs (« 3 roses puis 2 violets » et « 2 roses puis 3 violets »). Ainsi que le montre l'extrait suivant, les élèves et l'enseignante semblent s'accorder sur les organisations spatiales : roses en haut et violet en bas, les cardinaux correspondants étant codés de gauche à droite dans l'écriture additive. C'est une chronotopie (Laparra et Margolinas, 2016) qui n'était pas présente initialement dans la situation (relevant d'une réunion simultanée de deux sous-collections). Ceci rend sans doute complexe pour les élèves la compréhension de ce qui se joue.

Tableau 5. Extrait de transcription autour du « 5 » – situation des tours (Luong Dinh Giap, 2020)

EE	trois et deux / trois plus deux	
P3	trois / plus deux /	
EE	Plus	
P3 / EE	plus / deux / d'accord *la PE retourne la tour pour que les trois cubes roses soient en haut, puis écrit 3+2 au tableau et fixe cette première tour sous l'écriture symbolique*	
E	égal cinq	
EE	*Plusieurs élèves proposent des calculs, inaudibles, mais ils ne semblent pas d'accord* non /deux et trois *par un élève qui semble interrompre le débat entre d'autres élèves*	
P3	ah/ qu'est-ce qu'il dit? Tu préf/	
E	trois plus deux cinq	
P3	tu préfères faire trois plus deux/on est d'accord?/ et ça, alors, t'écris quoi là?/ *(P3 montre une deuxième tour aux élèves avec 2 cubes roses en haut et 3 cubes violets en bas)*	
E	deux plus trois / deux plus trois *P3 écrit 2+3 au tableau et fixe la deuxième tour montrée au tableau*	

Cependant, en amont de cet échange, un élève semble investir les représentations sémiotiques matérielles des deux mêmes tours concernées avec une autre logique. TEO envisage que la couleur rose s'est substituée à la couleur violette entre les sous-collections qu'il a visiblement identifiées comme équipotentes. Plus que la chronologie imposée dans la formation de l'écriture, en lien avec une organisation spatiale donnée, ceci aurait pu constituer un levier d'accès à une interprétation des écritures symboliques d'égalités proche de celle qualifiée de transformation de mouvement (Drouhard, 1992, Constantin, 2017) en lien avec la commutativité visée par l'enseignante de manière concomitante à l'introduction du signe « = ». Toutefois l'enseignante réintroduit une forme d'organisation spatiale (en retournant la deuxième tour) qui paraît presque contradictoire avec la proposition de l'élève, en prise d'appui sur le rôle d'une permutation constatée des couleurs – d'autant que le « pareil » alors formulé par l'enseignante semble renvoyer à une forme d'organisation identique des collections, peu importe la couleur et l'organisation spatiale.

Tableau 6. Intervention de TEO sur le « 5 » – situation des tours (Luong Dinh Giap, 2020)

TEO	Y a / y a la même chose en bas *TEO montre les deux cubes roses dans la tour tenue par la PE dans la main droite*	
E/TEO	ah oui / mais pas du même côté *TEO montre les deux cubes violets dans la tour tenue par P3 dans la main gauche*	
P3	tu veux dire que les deux roses / oui / remplacent les deux violets qui sont là en haut/c'est ça? (*TEO acquiesce de la tête*) /et les trois roses// remplacent les trois violets qui sont là (*TEO acquiesce de la tête*)/donc si je faisais ça/hop!/ cette fois//est-ce qu'ils sont pareils?	

À travers ces deux épisodes, on voit des effets potentiels de brouillage de contextes interprétatifs liés à la littératie chronotopique. L'ordre de formation des écritures symboliques semble piloter une organisation spatiale verticale des tours plus que les couleurs caractérisant une organisation de la collection en deux sous-collections dont la fonction sémiotique n'aura finalement pas été totalement élucidée.

Ceci peut éclairer pourquoi, par la suite, l'enseignante rencontre des difficultés à « faire vivre » la tâche mathématique prévue : construire des tours de taille identique pour produire des écritures symboliques correspondant à des égalités. Ainsi les élèves produisent parfois des tours identiques à la fois en taille, mais aussi en termes d'organisation en deux sous-collections, se contentant de « jouer sur les couleurs » de cubes. Suivant l'organisation spatiale explicitée en amont, ces choix donneraient lieu à la production d'égalités « tautologiques » (par exemple : « 2 + 3 = 2 + 3 » et « 3 + 7 = 3 + 7 »).

Figure 10. Photos des productions d'élèves – situation des tours (Luong Dinh Giap, 2020)

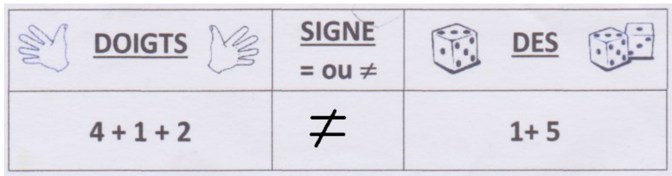
Ceci poussera l'enseignante à tenter de réguler collectivement la situation en prenant appui sur des productions plus conformes à ses attentes en apparence. Nous verrons plus loin que cet épisode collectif montre aussi que certains élèves (TEO) semblent bel et bien tirer parti des représentations sémiotiques iconiques en jeu pour construire des interprétations d'écritures symboliques d'égalités pertinentes, mais inattendues et délicates à interpréter par l'enseignante.

2.3. Des opérations sur les représentations sémiotiques situées dans un continuum oralité – littératie : des leviers pour certains élèves

Dans cette section, nous abordons les analyses de deux épisodes de classe montrant comment les ambivalences identifiées précédemment peuvent soutenir la construction de significations pour certains élèves. Celles-ci concernent des interprétations liées à la valeur de vérité d'une égalité pour le premier épisode, et à des transformations de mouvement pour le second épisode. Comme nous le verrons, ces interprétations émergent à partir d'opérations de conversions et de traitements multiples et concomitantes de représentations sémiotiques et symboliques.

2.3.1 Conversions, traitements et valeur de vérité d'égalités

Dans la classe de P4, le scénario d'introduction du signe « = » est adapté d'une situation documentée par la recherche en didactique, le jeu des annonces (Mercier et Quilio, 2018 repris de Parra et Saiz, 2000 dans le cadre du projet ACE). Les élèves jouent par deux et disposent d'un tableau dans lequel ils doivent écrire leur annonce faite à l'aide des doigts de trois mains (un joueur montre successivement trois mains en levant autant de doigts qu'il veut), et le nombre de points obtenus par l'autre joueur en lançant simultanément deux dés. Les joueurs doivent se mettre d'accord pour écrire le signe « = » ou le signe « ≠ » dans la colonne centrale. Chacun écrit à tour de rôle l'annonce, les points obtenus par les dés et le signe. Une ligne est prévue pour chacune des dix parties à jouer.



DOIGTS	SIGNE = ou ≠	DES
4 + 1 + 2	≠	1+ 5

Figure 10. Reproduction d'une ligne du tableau donné aux élèves – jeu des annonces

Rapidement dans les groupes, les élèves n'annoncent plus avec les doigts et écrivent directement une somme de trois termes dans la colonne de gauche. Ils lancent ensuite les dés, se mettent d'accord sur l'égalité ou non, avant d'écrire la somme de deux termes et le signe (dans cet ordre ou l'inverse) dans les deux autres colonnes. L'épisode qui nous intéresse ici correspond à l'extrait de transcription reproduit en annexe 1. Il s'agit d'un binôme d'élèves (ELI et MIA) qui donne à voir un premier phénomène intéressant du point de vue des représentations sémiotiques iconiques et symboliques mises en jeu.

Dans l'épisode, MIA écrit « 5 + 4 + 3 » en annonçant « cinq quatre trois », puis ELI lance les deux dés. Ceux-ci font apparaître des représentations iconiques de « 5 » et de « 6 ». Il s'exclame alors « oh cinq » en montrant successivement l'écriture chiffrée et la constellation concernée, ce qui montre qu'il associe spontanément les deux types de représentations sémiotiques iconique et symbolique, équivalentes, comme dénotant le même nombre. Il dit ensuite « neuf » en regardant tout d'abord l'écriture « 5+4+3 », ce qui laisse supposer qu'il identifie la sous-expression « 5+4 » dans l'écriture chiffrée comme dénotant 9. Il revient alors aux deux dés et compte le nombre de points sur le deuxième dé « un, deux, trois, quatre, cinq, six » avant que de s'exclamer « ben non » puis continue de compter en désignant du doigt les points du deuxième dé « six, sept, huit, neuf ».

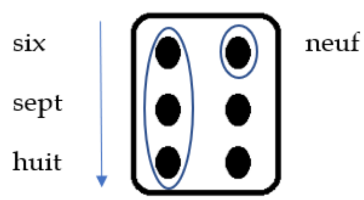
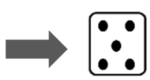
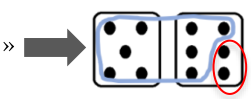


Figure 12. Comptage d'ELI sur le deuxième dé – jeu des annonces

Il s'arrête alors un instant et annonce à MIA : « onze / toi tu as fait douze ». Nous faisons l'hypothèse que derrière cette succession d'actions, ELI a isolé deux représentations sémiotiques et iconiques dénotant le même nombre : 9, puis isolé les deux représentations sémiotiques l'une, iconique, correspondant à « 2 » (voir figure ci-dessus) l'autre correspondant au terme de la somme restant : « 3 » dans l'écriture symbolique. Si nous n'avons pas trace de ce qui lui a permis d'obtenir les deux nombres 11 et 12 énoncés dans la suite de son intervention, au regard de l'immédiateté de leur association dans son discours « onze / toi tu as fait douze », nous pensons probable qu'il ait identifié « 3 » comme succédant au « 2 » représenté par les deux points restant sur la constellation. Cette particularité des nombres en jeu, l'un étant le successeur de l'autre, paraît jouer un rôle essentiel dans cette mise en relation des deux types de représentations sémiotiques iconique et symbolique. Ainsi, ELI a commencé par associer des représentations sémiotiques iconiques et symboliques équivalentes (car dénotant le même nombre) : 5 (face du premier dé et écriture symbolique) puis 9 (face du premier dé et collection partielle de la face du second dé et écriture « 5 + 4 ») avant d'isoler des représentations sémiotiques non équivalentes (car ne dénotant pas le même nombre). ELI semble alors identifier de manière saisissante que l'écriture chiffrée dénote le successeur 3 du nombre dénoté par les deux points restants dans la constellation, 2. Notons qu'il semble d'ailleurs avoir réussi à communiquer, partiellement du moins, une partie de son raisonnement à MIA qui exprime qu'à la place du « 3 » il aurait fallu mettre un « 2 ». On trouve également trace du raisonnement d'ELI lors de la mise en commun puisqu'il dira « parce qu'y en a un de plus » pour justifier qu'on ne peut apposer un « = » entre les deux écritures symboliques « 5 + 4 + 3 » et « 5 + 6 ». Ainsi, ce que l'on observe lors de cet épisode nous semble relever de transformations concomitantes de représentations sémiotiques iconiques et symboliques de nombres qui permettent de produire des interprétations d'élèves qui donnent le sens visé au signe « = » (comme dénotant le caractère vrai ou faux, dans le cas présent faux d'une affirmation liée à des dénotations nombres). Ces transformations s'appuient sur des éléments de contexte spécifiques investis par cet élève, que ce soit la mise en relation arithmétique entre des nombres qui se suivent (3 comme successeur de 2), ou la coprésence de représentations sémiotiques à la fois iconiques et symboliques. Celles-ci font visiblement l'objet de conversions : ce qu'ELI fait d'emblée d'ailleurs en associant « 5 » et les cinq points du premier dé, puis « 5 + 4 » et neuf points « surcomptés », etc. L'ambivalence dénotationnelle des représentations sémiotiques iconiques avec des « marques unités » déjà évoquée nous paraît jouer un rôle à la fois complexe et fructueux dans le cas présent, et ce, à de multiples égards. D'une part, elle permet (en dénotant indirectement une collection) le comptage, identifié par l'élève comme contexte de pertinence. Cette même dénotation rend possible un traitement dans le registre de la représentation iconique, celui-ci consistant en une reconfiguration visuelle (et gestuelle) des deux sous-collections (de cardinal 5 et 6) en deux nouvelles sous-collections (de cardinal 9 et 2), la comparaison avec le dénoté de « 5 + 4 » se faisant en retour à la dénotation « nombre ». D'autre part, l'ambivalence dénotationnelle permet de faire émerger la relation arithmétique entre les nombres dénotés, 3 et 2, du fait d'un « point manquant » dans la collection représentée sur la face de dé pour représenter « 3 ». Ce faisant, une égalité intermédiaire semble se dessiner implicitement, que l'on pourrait écrire « 5 + 4 + 3 = 5 + 4 + 2 » dont il chercherait le dénoté (« Vrai » ou « Faux ») pour soutenir la comparaison de « 5 + 4 + 3 » et « 5 + 6 ». L'expression « 5 + 4 + 2 » ne sera jamais écrite contrairement aux deux autres représentations symboliques. Ce qui se joue pour ce binôme n'est pas écrit, mais convoque et construit des connaissances de l'oralité et de littératie dont nous faisons l'hypothèse qu'elles participent de la construction de signification des écritures dans une forme de littératie chronotopique. Les conversions et traitements pourraient ainsi soutenir une transformation des écritures par le biais d'une lecture horizontale de l'égalité suggérée. Nous résumons dans le tableau ci-après les éléments que nous venons de développer.

Tableau 7. Rôle de l'ambivalence sémantique d'une représentation iconique – jeu des annonces

Première conversion	*Deuxième conversion et traitement*	*Troisième conversion*
« 5 » 	« 5+4 » 	« 5+4 + 3 » 
Ambivalence dénotationnelle de la représentation iconique Dénote le même nombre 5 que « 5 » ou collection de cardinal 5.	*Ambivalence dénotationnelle de la représentation iconique* Dénote le même nombre 9 que « 5 + 4 » ou collection reconfigurée par surcomptage des marques unités de la collection représentée jusqu'à « 9 »	*Ambivalence dénotationnelle de la représentation iconique* Une représentation qui ne dénote pas le même nombre que « 3 » car il manque une marque unité dans la collection dénotée indirectement (ou il en faudrait une en plus, 3 comme le successeur de 2)
Littératie chronotopique[6] « 5+… = 5 + … » Lecture orientée du premier terme à droite et à gauche de l'égalité - vraie	*Littératie chronotopique* « 5+ 4… = 5 +4 … » Lecture orientée et regroupée des premiers termes à droite et à gauche de l'égalité - vraie	*Littératie chronotopique* « 5+ 4 + 3 = 5 +4 + 2 » Lecture orientée du dernier terme à droite et à gauche de l'égalité – faux car « 3 » une marque unité de plus que « 2 » ou il manque une marque unité pour représenter « 3 »

[6] Nous mettons ci-dessous en lumière ce que recouvrent les usages faits du point de vue des représentations sémiotiques iconiques et symboliques en jeu en termes d'interprétations

Ainsi, il nous semble que sous certaines conditions observées lors de cet épisode de travail « en binôme », la présence concomitante des deux types de registres de représentations, iconique et symbolique, participe d'un contexte permettant de produire des interprétations pertinentes d'élèves au regard des savoirs visés sur le signe « = » et sur l'égalité. Ces interprétations prennent appui sur l'ambivalence dénotationnelle des représentations sémiotiques iconiques qui faisait précédemment l'objet de malentendus entre enseignantes et enseignants d'une part, et élèves d'autre part. En effet, l'élève prend appui sur cette ambivalence sémantique, tout en repositionnant l'une ou l'autre dénotation possible des représentations sémiotiques iconiques dans un continuum entre oralité (quand il compte ou surcompte en prise d'appui sur une dénotation de type collection) et littératie (quand il prend appui sur ces opérations de dénombrement pour regrouper des termes de l'addition, comparer des nombres, en prise d'appui sur la dénotation nombre). Toutefois, une telle observation et analyse, qui est celle du chercheur, révèle l'épaisseur que recouvre l'activité de l'élève concerné, ce qui éclaire en retour la difficulté pour un enseignant de récupérer une telle activité. Ainsi, lors de la phase conclusive de cette séance que nous ne décrirons pas ici, l'action enseignante ne permettra pas de retour sur les représentations sémiotiques iconiques qui auront permis aux élèves de statuer sur le caractère vrai ou faux des égalités. Seules des interprétations d'écritures symboliques *stricto sensu* et des traitements qui restent internes à ce registre de représentation, seront officialisées.

2.3.2 Conversions, traitements et émergence d'une transformation de mouvement

Un autre épisode observé dans la situation des tours de cubes illustre de notre point de vue comment l'ambiguïté dénotationnelle des représentations iconiques peut constituer un levier d'interprétation pertinente d'élèves du signe « = ». L'extrait de transcription lié à cet épisode est reproduit en annexe (voir annexe 2).

Lors de cet épisode, les deux écritures « $3 + 4 = 7$ » et « $5 + 2 = 7$ » sont positionnées l'une sous l'autre au tableau. Elles ont été réalisées collectivement à partir de tours de 3 cubes bleus et 4 rouges d'une part, et de 5 cubes bleus et 2 cubes rouges d'autre part. L'égalité est construite par double désignation des cardinaux (obtenus par dénombrements) des collections et sous-collections. L'enjeu de l'extrait ci-dessous vise, pour l'enseignante, à démontrer aux élèves

d'écritures symboliques d'égalités qui sont liées à la littératie chronotopique. Ces égalités n'ont toutefois pas été produites par les élèves qui eux avaient juste à statuer sur le vrai et le faux d'une égalité « complète » entre deux sommes, l'une de trois termes donnés et l'autre de deux termes donnés, exprimées symboliquement.

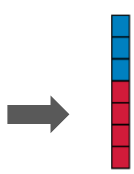
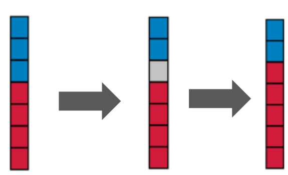
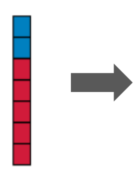
l'égalité « 3 + 4 = 5 + 2 » (qui ne sera pas écrite mais évoquée à l'oral) par le biais de l'identité des dénotés des sommes.

Tableau 8. Extrait de transcription autour du « 3 + 4 = 5 + 2 » - situation des tours (Luong Dinh Giap, 2020)

P3	égal // et regardez/ trois plus quatre égale sept (*la PE écrit la formule au tableau en même temps qu'elle la prononce, sous la première écriture 3+4 = 7*)/ regardez/qu'est-ce que vous remarquez?/
E	han! / que il y a deux fois le sept dans les mêmes /
P3	Et pourtant/ on a pas les mêmes nombres au début
TEO	en fait
P3	en fait quoi?
TEO	en fait / c'est parce que quatre c'est / cinq plus deux ça fait sept et trois plus quatre ça fait sept / en fait, si on enlève un seul du trois et on le met au quatre / cela fait cinq / et après le trois / ça fait deux du coup / ça fait sept comme au départ
P3	C'est vrai/ il a raison/parce qu' il change la place des pions/ comme là (*la PE montre les ardoises avec les balles*)/il me prendrait les pions /° il fait pareil / il prend
ENZ	au trois / un seul
P3	au trois / un seul / et tu le mets au quatre / il enlève un et il reste plus que deux et il le met au quatre / plus un et ça fait cinq / du coup on obtient pareil deux plus cinq ou cinq plus deux / c'est
EE	pareil
P3	c'est pareil/ voilà! Donc, lui se dit ça/donc on peut obtenir sept / avec / des combinaisons différentes/ ça /on retravaillera/on le retravaillera/

Cet épisode révèle de nouveau la complexité de l'activité sémiolinguistique dans laquelle l'enseignante tente de faire rentrer les élèves, notamment en raison de la transitivité de l'égalité à laquelle une telle dénotation renvoie au regard des écritures symboliques au tableau. Toutefois TEO investit une autre voie d'interprétation des représentations symboliques et iconiques. Ces dernières pourraient constituer un levier pour « penser » le sens que prendrait le signe « = » dans l'écriture « 3 + 4 = 5 + 2 ». Si cette égalité n'est jamais écrite, et s'il n'est pas certain que l'enseignante s'y réfère tout à fait, il n'en demeure pas moins que TEO tente de trouver une logique en rapprochant les écritures « 3 + 4 » et « 5 + 2 » des deux égalités écrites au tableau (l'une en dessous de l'autre) à la demande de l'enseignante (« qu'est-ce que vous remarquez? »). Quand TEO dit « en fait, si on enlève un seul du trois » pour le rajouter au « quatre », il paraît implicitement se référer à une transformation des représentations sémiotiques iconiques jouant sur leur ambivalence dénotationnelle. Il envisage ainsi le passage d'une marque unité d'une sous-collection (de cardinal « 3 ») à une autre (celle de cardinal « 4 ») tout en entrevoyant ce que ce passage traduit du point de vue des nombres dénotés par ces sous-collections. Il cherche et produit dans le registre des écritures symboliques, une transformation qui émerge en prise d'appui sur les représentations iconiques ou matérielles dans un double mouvement de conversions et de traitements concomitants. Autrement dit, l'ambivalence dénotationnelle se retrouve repositionnée au cœur de ce qui pourrait potentiellement justifier l'égalité donnée initialement. L'ambivalence sémantique des « tours de cubes » permettrait d'envisager une perspective de transformation de mouvement liée à l'écriture symbolique « 3 + 4 = 5 + 2 » (plus précisément : transformant « 3 + 4 » en « 5 + 2 »). La transformation se joue en prise d'appui sur la dénotation des représentations iconiques en présence, tour à tour de type nombre et collection. La conservation du dénoté nombre, qui prend le sens lié au cardinal de la collection de cubes réorganisée par la réunion de deux paires de sous-collections de cubes de couleurs différentes, permet de justifier l'égalité donnée initialement. Ainsi lorsque TEO lit les égalités au tableau « en fait, si on enlève un seul du trois et on le met au quatre / cela fait cinq », conversions et traitements sont étroitement imbriqués, « au quatre » ou « du trois » renvoyant à la fois aux représentations et aux dénotés nombre et collection. Les représentations verbales permettent ainsi à TEO de parler en même temps des écritures, des dénotés nombres et collection (« ça fait 5 » « et après le trois / ça fait deux du coup / ça fait sept comme au départ »), ce qui rend son discours particulièrement dense.

Tableau 9. Rôle de l'ambivalence sémantique d'une représentation iconique – situation des tours

Première conversion	*Traitement des représentations sémiotiques iconiques liées aux sous-collections*	*Deuxième conversion*
« 3+4 » 	 *Transformation de ces représentations pilotée par celle des représentations symboliques « 3+4 » en « 5+2 » , de part et d'autre du « = »*	 « 5+2 »
Dénotation nombre – le cardinal « conservé » de la collection justifie l'égalité « 3+4 = 5+2 »		
Ambivalence dénotationnelle de la représentation iconique La représentation iconique dénote le nombre qui équivaut à « 3+4 » (soit 7) ou la collection (de cardinal 7)	*Ambivalence dénotationnelle des représentations iconiques* Les représentations dénotent des sous-collections réorganisées en enlevant une marque unité à l'une pour la	*Ambivalence dénotationnelle de la représentation iconique* La représentation iconique dénote le nombre qui équivaut à « 5+2 » (soit 7) ou la collection (de cardinal 7)

réunion de deux sous-collections (de cardinal 3 et 4)	rajouter à l'autre – ce qui renvoie à des actions sur des dénotés de type nombres verbalisées par l'élève (rajout de 1, ça fait 5…) mises en lien avec les représentations sémiotiques symboliques	réunion de deux sous-collections (de cardinal 5 et 2) La dénotation nombre associé à la dénotation collection permet de justifier l'égalité
Littératie chronotopique[7] 3 cubes bleus; 4 cubes bleus Mise en relation avec l'écriture « 3+4 »	*Littératie chronotopique* 3 cubes bleus; 4 cubes rouges -1 cube bleu +1 cube rouge 2 cubes bleus; 5 cubes rouges Mise en relation avec « 5 » et « 2 » de l'écriture « 5+2 »	*Littératie chronotopique* 2 cubes bleus; 5 cubes rouges mis en relation avec « 5 + 2 » « 3 + 4 = 5 + 2 » mise en relation avec la conservation du cardinal de la collection

Un peu comme pour l'épisode précédemment analysé, on voit comment une forme de flexibilité entre deux dénotations devient une prise d'appui pour rentrer dans des interprétations liées à ce qu'est censé signifier le signe « = » et une écriture symbolique du type « 3 + 4 = 5 + 2 » même en l'absence de cette écriture *stricto sensu*[8]. L'ambivalence dénotationnelle tourne à plein comme levier d'interprétation pour TEO, et sans doute pour ENZ qui intervient à sa suite.

Toutefois, on entrevoit dans la façon dont l'enseignante cherche à s'emparer de l'intervention de TEO, des difficultés pour elle à identifier et à formuler les connaissances mises en fonctionnement par cet élève. De manière cohérente à son projet de départ (voir section précédente), elle semble considérer que ce raisonnement fait intervenir la propriété de commutativité de l'addition, ce qui est finalement éloigné de ce qui est en jeu du point de vue de l'élève. Il nous semble y avoir un amalgame entre une forme de littératie chronotopique convoquée par les élèves en prise d'appui sur les représentations sémiotiques iconiques en présence des écritures symboliques, et une connaissance littératienne tout autre qui prendrait appui sur la propriété de commutativité de l'addition, et ce, de manière

7 Pour représenter ce qui se joue du point de vue de la littératie chronotopique, nous renseignons ce qui, dans les opérations sur les représentations iconiques, se situe dans le *continuum* entre oralité (du point de vue des opérations sur les collections) et la littératie (du point de vue des significations d'écritures qui portent ces opérations ou qu'elles permettent de réinterpréter).

8 Si elle n'est finalement pas écrite dans la classe, elle nous paraît néanmoins centrale, car le raisonnement de TEO relève d'une transformation de mouvement associée à cette égalité. Nos analyses nous amènent à penser que les ressources liées à la chronotopie convoquées par TEO, sans qu'elles soient contrôlées par l'enseignante, pourraient conduire à des connaissances littératiées sur de telles écritures symboliques d'égalité.

récurrente lors de la séance observée. Dans le même temps, force est de constater que les connaissances mathématiques qui sont convoquées par des élèves comme TEO et ENZ, ou comme ELI et MIA (2.3.2) ne renvoient pas à des savoirs strictement notionnels sur les nombres en jeu, et à la littératie classiquement associée à ces savoirs notionnels. Ils renvoient plus véritablement à des savoirs sémiolinguistiques plutôt liés à ce que Laparra et Margolinas (2016) ont avant nous cherché à caractériser par la littératie chronotopique et qui pour reprendre les termes de ces deux auteures, semblent bel et bien « transparents » pour les enseignants.

Conclusion

Les résultats de notre recherche tendent à montrer une épaisseur importante des situations d'enseignement et d'apprentissage qui ont pour visée d'introduire le signe « = ». Cette épaisseur renvoie notamment à l'ambivalence sémantique des représentations sémiotiques iconiques que notre réflexion théorique a permis de mettre en exergue. Ceci nous amène à penser qu'elle puisse exister également dans les classes où des situations telles que celles que nous avons observées ne sont pas nécessairement aménagées. L'ambivalence sémantique portée par les signes peut se traduire par des incertitudes quant à la dénotation à laquelle se réfèrent des élèves (de 6-7 ans) ou qui peut être sollicitée par les enseignantes et enseignants quand ils ou elles font usage de représentations liées aux collections d'objets (et ce, que celles-ci soient représentées graphiquement ou effectivement présentes, voire déplaçables). Ces représentations paraissent néanmoins a priori nécessaires pour construire des significations sur les égalités à ce niveau scolaire.

L'incertitude postulée semble pouvoir se traduire par des interprétations par les élèves des tâches scolaires proposées et apprêtées par les enseignants qui questionnent quant à des malentendus possibles au regard de la (ou des) dénotation(s) possibles auxquelles de telles interprétations sont susceptibles de se référer dans la classe de mathématiques. Nos analyses ont pointé des amalgames possibles liés à une référence qui, dans les discours d'élèves et d'enseignant, semblait relever d'une dénotation de type nombre sans nécessairement renvoyer au sens visé de cardinal d'une collection. Certains éléments de discours ou de l'activité observable des élèves laissent penser que malgré la référence au nombre « déclarée », cela puisse être la dénotation de type collection qui tend à piloter l'activité des élèves avec la mise en fonctionnement de connaissances relevant de l'oralité. Cependant, en l'absence de lien avec la dénotation de type nombre, la représentation ne prend pas le sens voulu et nécessaire pour accéder à des significations pertinentes d'écritures symboliques d'égalités. Ainsi, la littératie visée, associée aux écritures symboliques paraît parfois difficilement accessible au regard d'un continuum entre oralité et littératie délicat à négocier du point de vue de l'action enseignante. Les analyses que nous avons conduites montrent la complexité des phénomènes en jeu, ce qui explique sans doute les amalgames qui émergent dans les classes. Parfois encouragés, ils sont *a minima* particulièrement difficiles à exploiter avec les élèves pour s'emparer de ce qui pourrait favoriser l'entrée dans une littératie chronotopique à même d'éclairer la construction de significations des représentations symboliques liées aux égalités, à partir de représentations sémiotiques iconiques liées quant à elles à des collections ou des réunions de collections. Pour autant, les deux derniers épisodes analysés dans le cadre de notre étude montrent que certains élèves tirent parti de cette ambivalence dénotationnelle pour construire des significations pertinentes au regard de ce que sont censées dénoter des écritures symboliques d'égalité. Les interprétations contextualisées apparaissent toutefois assez délicates à « déplier », car elles se réfèrent tour à tour ou de manière quasi concomitante à une dénotation ou à l'autre en jouant sur leurs sens respectifs (de collection organisée et composée d'une certaine façon ou de nombre cardinal d'une collection) pour faire émerger des nouvelles connaissances potentiellement porteuses sur les égalités codées symboliquement en prise d'appui sur des ressources relevant de la littératie chronotopique. Dans ces conditions, il ne paraît pas étonnant que ces connaissances émergentes peinent à être récupérées par les enseignantes lors d'épisodes collectifs. Ces épisodes s'avèrent fréquemment centrés sur des significations des écritures symboliques, plus orientées par des connaissances mathématiques (des opérations ou des nombres) ou par des connaissances qui relèvent de ressources liées à la littératie, éloignées de celles mises en fonctionnement par les élèves.

Pour autant, l'étude de ces épisodes de classe permet selon nous d'identifier des leviers possibles pour faciliter l'accès à des significations des écritures symboliques relevant d'égalités en début d'école primaire.

Tout d'abord nous pensons que l'identification de phénomènes liés à l'ambivalence sémantique des représentations iconiques peut permettre d'accroître une certaine vigilance quant aux possibles sens de ces représentations, auxquels se réfèrent enseignants et élèves dans la classe de mathématiques. Ceci pourrait par exemple conduire à envisager l'usage d'écritures symboliques du type « $n = n$ » (avec n cardinal de collections) pour construire des significations pertinentes du signe « = ». Ces écritures paraissent a priori privées de sens si on les regarde sur le strict plan du registre symbolique, mais considérant des représentations iconiques liées aux collections, elles pourraient constituer une façon d'opérer un retour sur le sens visé de cardinal d'une collection ou de cardinaux de sous-collection qui permettrait à son tour d’accéder au sens d’une égalité symbolique.

Plus encore, ce sont peut-être des mises en relation entre des sens distincts de telles représentations iconiques que recouvre cette même ambivalence sémantique qui nous paraissent aujourd’hui des points d’appui potentiels pour construire de nouvelles connaissances liées à l’égalité et aux écritures symboliques afférentes. Des comparaisons effectuées visuellement entre des sous-collections réunies dans une collection ou des traitements de ces sous-collections en prise d’appui sur la dénotation de type collection, mais réinterprétées au regard de la dénotation de type nombre peuvent éclairer des significations à donner aux égalités symboliques. Il reste toutefois à penser des situations d’enseignement et d’apprentissage qui permettent d’explorer plus avant de telles pistes en ne négligeant pas la mise en cohérence de l’activité de l’élève d’un point de vue sémiotique avec un continuum entre oralité et littératie prenant appui sur des ressources de la littératie chronotopique.

Références

Behr, M., Erlwanger, S. et Nichols, E. (1980). How children view the equals sign. *Mathematics Teaching*, *92*, 13-15.

Bernié, J.-P. (2004). L’écriture et le contexte : quelles situations d’apprentissage? Vers une recomposition de la discipline « français ». *Linx*, 51. https://doi.org/10.4000/linx.163

Bloch, I. (2015). Concepts, objets, symboles, enseignement des mathématiques … Réflexions sur l'épistémologie et la didactique. *Petit x, 97*, 71-79.

Brignon, P. et Eysseric, P. (2012). Des outils aux signes : construire des représentations arithmétiques du quotidien au CP. *Grand N*, *89*, 71-102.

Brossard, M. (1993). Un cadre théorique pour aborder l'étude des élèves en situation scolaire. *Enfance*, *47*(2),189-199. https://doi.org/10.3406/enfan.1993.2054

Charnay, R., Douaire, J., Valentin, D., Guillaume, J.-C., Colomb, J. (2005). *ERMEL, apprentissages numériques et résolution de problèmes. CP.* Éditions Hatier.

Conne, F. (1988). Comptage et écritures en ligne d'égalités numériques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *9*(1), 71-116.

Conne, F. (2008). L'expérience comme signe didactique indiciel. *Recherches en didactique des mathématiques*, *28*(2), 219-264.

Constantin, C. (2017). Unifier, formaliser, généraliser : une alternative pour l'enseignement du calcul algébrique au collège? *Recherches en didactique des mathématiques*, *37*(1), 53-9.

Daniau, J. (1976). Introduction du signe "=" en classe de CP. *Grand N*, *9*, 35-44.

Denmark, T., Barco, E. et Voran, J. (1976). Final report: A teaching experiment on equality. Rapport numéro PMDC – TR – 6. Tallahassee : Université de l'état de Floride.

Drouhard, J.-P. (1992). *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire* [thèse de doctorat, Université Paris VII, France].

Drouhard, J.-Ph. (2012). L'épistémographie, un outil au service de la didactique des mathématiques. Dans M. Abboud-Blanchard et M. Flückiger (dir.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques – Année 2011* (p. 129-133). IREM de Paris VII (Institut de recherche en enseignement des mathématiques), Université Paris Diderot.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, *(5)*, 37-65.

Duval, R. (2006a). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques? *Relime, Número Especial*, 45-81.

Duval, R. (2006b). Transformation de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. Dans J.-C. Rauscher (dir.), *Actes du XXXII^e^ Colloque COPIRELEM* (p. 67-89). Institut de recherche en mathématiques (IREM).

Falkner, K., Levi, L. et Carpenter, T. (1999). Children's understanding of equality: a foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics*, *6*(4), 232-236.

Frege, G. (1892/1971). *Écrits logiques et philosophiques* (C. Imbert, trad.). Éditions Points.

Gobert, S. (2013). Construire des significations dans et par le langage. Dans A. Bronner, C. Bulf, C. Castela et J.-P. Georget (dir.). *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*. *Actes de la XVIe école d'été de didactique des mathématiques* (p. 547-566). La Pensée sauvage.

Goody, J. (1977). *La Raison graphique. La domestication de la pensée sauvage* (J. Bazin et A. Bensa, trad.). Éditions de Minuit.

Kieran, C. (1981). Concepts Associated with the Equality Symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 317-326. https://doi.org/10.1007/BF00311062

Laparra, M. et Margolinas, C. (2012). Oralité, littératie et production des inégalités scolaires. *Le français aujourd'hui*, 177, 55-64.

Laparra, M. et Margolinas, C. (2016). *Les premiers apprentissages scolaires à la loupe. Des liens entre énumération, oralité et littératie*. De Boeck.

Luong Dinh Giap, F. (2020). *Contextes d'interprétation des signes +,= introduits dans les situations de résolution de problèmes arithmétiques en début de CP* [Mémoire inédit, Université de Bordeaux].

Margolinas, C. (2019). Ce que peut apporter l'analyse des implicites et des conversions à la compréhension des difficultés des élèves concernant l'écrit mathématique au début de l'école primaire. Dans M. Maurel (dir.), *Jean-Philippe Drouhard. De la linguistique à l'épistémographie* (p. 79-91). Édition privée.

Mercier, A. et Quilio, S. (2018). *Mathématiques élémentaires pour l'école. Nombres, grandeurs, calcul.* Presses universitaires de Rennes.

Parra, C. et Saiz, I. (2000). *Hacer Matemática 1,2 y 3.* Estrada.

Peltier, M.-L., Briand, J., Vergnes, D., Ngono, B. et Sampo, M. (2019). *Opération Maths CP*. Éditions Hatier.

Theis, L. (2005a). *Les tribulations du signe = dans la moulinette de la bonne réponse.* Éditions Bande didactique.

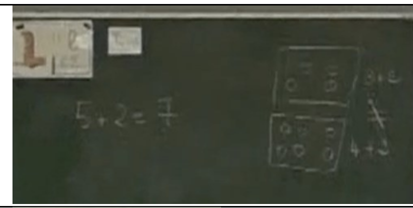
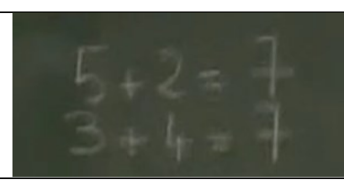
Theis, L. (2005b). L'apprentissage du signe = : un obstacle cognitif important. *For the Learning of Mathematics*, *25*(3), 7-12.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, *10*(2.3), 133-170.

Annexe 1

<table>
<tr><td>MIA</td><td>(MIA écrit 5 + 4 + 3 puis annonce :) cinq quatre trois</td><td>5 + 4 + 3</td></tr>
<tr><td>ELI</td><td>J’essaye de te faire gagner (lance les dés et obtient 5 et 6) Oh Cinq (montre l’écriture du 5 sur la feuille et montre le dé avec les 5 points)</td><td></td></tr>
<tr><td>MIA</td><td>Oui c’est bon / attends</td><td></td></tr>
<tr><td>ELI</td><td>neuf //</td><td rowspan="5">ELI dit « neuf » en regardant la feuille sur laquelle est écrit 5+4+3, puis compte le nombre de points sur l’autre dé : 1, 2, 3, 4, 5, 6, puis dit « beh non », regarde le premier dé annonce 5 et continue de compter en désignant les points sur le deuxième dé : 6, 7, 8, 9 fait une pause (il reste donc deux points à compter), regarde l’écriture sur la feuille puis 10, 11.
Pendant ce temps MIA cherche un moyen d’effectuer la somme de l’annonce : elle regarde le dé, dit « cinq » puis regarde la feuille dit « 4 » et montre 4 avec ses doigts, puis surcompte en levant les doigts au fur et à mesure : 5, 6, 7, 8 puis s’arrête un instant, ELI l’interrompt en annonçant 11. MIA regarde les dés, et ELI dit « toi tu as fait 12 »
</td></tr>
<tr><td></td><td>Un deux trois quatre cinq six / beh non</td></tr>
<tr><td></td><td>Cinq / six sept huit neuf</td></tr>
<tr><td></td><td>onze</td></tr>
<tr><td></td><td>Toi, tu as fait 12</td></tr>
<tr><td>MIA</td><td>Hooo// oh non</td><td></td></tr>
<tr><td>ELI</td><td>J’ai essayé, hein</td><td></td></tr>
<tr><td>MIA</td><td>(à voix très basse) mais en fait faudrait mettre 2 et ça fait 11 (montre le 3) (inaudible)</td><td></td></tr>
<tr><td>ELI</td><td>Là tu laisses comme ça / ben c’est toi qui as demandé c’est toi qui as demandé // là tu triches (MIA finit par écrire 5 + 6 puis écrit le signe différent dans la colonne centrale)</td><td></td></tr>
</table>

Annexe 2

P3	égal/ donc je remarque au tableau ce que moi je voulais que vous écriviez sur l'ardoise/ 5 plus 2 égale /7 (*P3 écrit au tableau « 5+2=7 »*)/on est d'accord?/allez/c'est ça que je veux/5+2=7/	
P3	*P3 propose un nouvel exercice de codage, elle montre une tour ayant 3 cubes bleus et 4 cubes rouges* alors regardez/vous codez celui-ci maintenant/°/on efface/allez on efface/on regarde tout le monde/j'ai les yeux de tout le monde?/ENZ?/#non#/on code/celui-ci (*la PE montre la tour*)/°/on va les compter ensemble/les bleus un deux trois /ensuite on compte:	
Élève	Les rouges	
P3	donc on écrit combien?	
Élève	quatre	
P3	ben non/qu'est-ce qu'on vient de compter?/	
Élèves	trois / deux /trois	
P3	trois / un deux trois quatre (*P3 compte les cubes rouges*) / voilà, j’ai combien en tout	
Élèves	Sept	
P3	sept? Donc, on écrit/	
	égal/ et nous on va vérifier/ si j'en mets sept/est-ce que ça fait la même hau:: teur/ donc un deux trois quatre cinq six sept (*P3 construit une nouvelle tour de sept cubes*)/ je le mets à côté / est-ce que j'ai la même hauteur?	
Élèves	Oui	
P3	Oui / donc ça veut dire que j'ai le droit d'écrire entre les deux::	
Élèves	égal/égal	
P3	égal // et regardez/ trois plus quatre égale sept (*P3 écrit l’égalité au tableau en même temps qu'elle la prononce, sous la première écriture « 3+4 = 7 »*)/ regardez/qu'est-ce que vous remarquez?/	
Élève	han ! / que il y a deux fois le sept dans les mêmes /	
P3	Et pourtant/ on a pas les mêmes nombres au début	
TEO	en fait	

P3	en fait quoi?
TEO/ENZ	en fait / c'est parce que quatre c'est / cinq plus deux ça fait sept et trois plus quatre ça fait sept / en fait si on enlève un seul du trois et on le met au quatre / cela fait cinq / et après le trois / ça fait deux du coup / ça fait sept comme au départ
P3	C'est vrai/ il a raison/parce qu'il change la place des pions/ comme là (*P3 montre les ardoises avec les balles*)/il me prendrait les pions /° il fait pareil / il prend
ENZ	au trois / un seul
P3	au trois / un seul / et tu le mets au quatre / il enlève un et il reste plus que deux et il le met au quatre / plus un et ça fait cinq / du coup on obtient pareil deux plus cinq ou cinq plus deux / c'est
Élèves	pareil
P3	c'est pareil/ voilà! Donc lui se dit ça/donc on peut obtenir sept / avec / des combinaisons différentes/ ça /on retravaillera/on le retravaillera/

Le cadre de l'apprentissage par problématisation : outils et enjeux en didactique des mathématiques

Sylvie GRAU
Maîtresse de conférences en didactique des mathématiques
Laboratoire du CREN – INSPÉ Nantes Université FRANCE
sylvie.grau@univ-nantes.fr

Résumé : Notre hypothèse de recherche est que certaines notions ne sont pas disponibles chez une majorité d'élèves du fait qu'elles ne sont pas problématisées ni même enseignées sous une forme problématisée. Le cadre de l'apprentissage par problématisation apporte des outils pour mieux comprendre comment les élèves posent, construisent et résolvent des problèmes et quelle est la dynamique de cette construction lors d'un travail d'équipe. Il nous a permis de concevoir un scénario pour enseigner la modélisation fonctionnelle d'une situation concrète et son expérimentation a été réalisée en France auprès d'élèves de 14 à 16 ans. L'objectif est d'amener les élèves à faire émerger collectivement des nécessités liées au problème (genèse des problèmes) et au savoir visé (genèse du registre explicatif). Dans cet article, nous allons exposer ce cadre théorique, les outils que nous avons construits, et donner quelques résultats d'analyse de l'expérimentation.

Mots clés : problématisation, activité mathématique, contrat didactique, institutionnalisation

The learning framework of problematization: tools and issues in mathematics teaching

Abstract: Our research hypothesis is that certain concepts are not available to most students because they are not problematized (formulated as problems) or even taught in a problematized form. The learning framework of problematization provides tools for better understanding how students formulate, construct and solve problems as well as grasping the dynamic of this construction process in a groupwork context. Based on this framework, we designed a lesson plan to teach the functional modeling of a concrete situation, and the lesson plan was implemented in France with pupils aged 14-16. The objective was to help pupils collectively identify the necessities linked to the problem (genesis of problems) and to the knowledge targeted (genesis of the explanatory register). This article presents our theoretical framework and the tools we developed, along with an analysis of some of the results.

Keywords: problematization, mathematical activity, didactic contract, institutionalization

Introduction

La place donnée à la résolution de problèmes dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques est de plus en plus importante. Elle a beaucoup évolué en France, passant d'un rôle d'évaluation en fin d'apprentissage avant 1950 à un rôle central de toute activité mathématique dans les derniers programmes de 2016 (Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse (s. d), comme cela est exposé dans les documents d'accompagnement des programmes en 2022 (Ministère de l'Éducation nationale et de la jeunesse (2022). Si cette place se justifie dans une perspective socioconstructiviste (Brossard, 2017), la mise en œuvre dans les classes montre des dysfonctionnements que les didacticiens continuent de mettre en évidence (Choquet, 2017). Les analyses ont cependant bien du mal à prendre en considération tout ce qui entre en jeu lors de la résolution de problèmes mathématiques en classe. Dans la théorie des situations didactiques (désormais TSD), Brousseau met en évidence deux concepts clés : la notion de « milieu » (Brousseau, 1988) et celle de « contrat » dont on peut définir deux facettes, la facette épistémologique et la facette sociale, ainsi que différents niveaux de granularité (Hersant, 2014). Ces notions ne suffisent cependant pas à élaborer des situations adidactiques – des situations à finalité didactique, mais où le sujet agit en interaction avec un milieu comme si la situation n'était pas didactique – porteuses des savoirs visés et suffisamment robustes pour pouvoir les utiliser dans les classes ordinaires. C'est bien que d'autres facteurs interviennent sur l'activité réelle de l'élève et qu'il est nécessaire de développer des outils d'analyse pour mieux comprendre cette activité mathématique. Il n'est cependant pas possible d'en rester à l'analyse de l'activité d'un élève générique comme en témoignent les travaux de Rayou (2020), tant les représentations, les expériences individuelles et le contexte, peuvent avoir une influence sur l'activité du sujet. S'intéresser à l'activité mathématique de l'élève demande de prendre en compte trois dimensions : la dimension épistémique, la dimension sociale et la dimension cognitive. De plus, l'activité mathématique de l'élève entre dans un processus au sein d'une communauté, ce qui signifie qu'il faut tenir compte de différentes temporalités et des interactions sociales, l'objectif étant de comprendre comment cette activité participe à la construction de connaissances partagées.

Dans cet article, nous nous intéressons à l'activité en classe de mathématiques de l'élève sujet, sur des temps de travail en groupes, sans interventions, ou très peu, de l'enseignant, pour analyser comment il problématise au sein d'un collectif de pairs. Nous considérerons ici l’activité mathématique de l’élève comme une activité de problématisation, c’est-à-dire comme un enchaînement de problèmes que l’élève pose, construit et cherche à résoudre. Nous observons l’élève individuellement en analysant les thèses et objections qu’il expose au cours de débats au sein d’un groupe, mais nous regardons aussi le collectif pour comprendre la manière dont les interactions font évoluer la construction du problème par le groupe. Ces moments d’échanges sont les seuls accès à ce qui se passe dans la tête de l’élève au cours de l’activité.

> Nous considérons que les élèves problématisent lorsqu’ils construisent les nécessités d’un problème en référence à une exploration empirique, c’est-à-dire lorsqu’ils ont une compréhension du problème qui est de l’ordre du “pourquoi ça ne peut pas être autrement” qui émane d’un travail mobilisant des “faits” et une construction du problème. (Hersant, 2022)

Si Piaget considère que le développement des structures de connaissances est produit par un double processus de déséquilibration et de rééquilibration (Legendre, 2006), dans le cadre de l’apprentissage par problématisation (désormais CAP), ce développement correspond à un changement de registre explicatif. Une problématisation s’effectue dans un cadre qui détermine « quels sont les types de questions et les types de réponses pertinentes dans un contexte donné » (Fabre, 2016, p. 17). Par registre explicatif, nous entendons le paradigme, le monde mental, la théorie, ce sur quoi s’appuie l’individu pour construire les modèles lui permettant de dire, agir et penser et lui permettant de construire des explications pour le problème traité. Il s’agit en fait de considérer que l’apprentissage modifie la structure des connaissances antérieures au sein d’un registre qui en assure la cohérence et permet de générer des raisons. Le CAP s’intéresse à la genèse de ce registre dit « explicatif ».

Dans ce registre, l’élève dispose de modèles lui permettant de construire le problème. Par exemple, si nous considérons le cadre de l’analyse comme registre explicatif – cadre étant ici pris au sens de Douady (1986) –, il offre des définitions, des théorèmes, des exemples de problèmes résolus et donc un certain nombre de modèles. Nous avons une adaptation des modèles en fonction des apprentissages au cours de la scolarité, et en parallèle une adaptation de leur usage en fonction des modèles à disposition. Ces adaptations proviennent de l’émergence de nouvelles contraintes que nous appelons des nécessités, contingentes du problème traité.

Les outils développés dans le CAP peuvent aider à comprendre l’articulation entre différentes dimensions de l’activité mathématique de l’élève. Utilisés pour analyser les interactions entre élèves lors de la recherche de problèmes au sein d’un collectif et lors de leurs productions écrites et orales, ces outils donnent une idée de la dynamique de problématisation et fournissent des éléments permettant de caractériser l'évolution du registre explicatif, et ce, à différents niveaux : micro pour ce qui concerne l'individu, méso pour ce qui concerne un petit groupe et macro pour ce qui concerne le groupe classe. Il est difficile d'isoler l'activité d'un seul élève au sein d'un groupe tant les interactions agissent sur cette activité, mais nous repérons l'évolution des explications que les élèves génèrent individuellement. À travers la définition de différents rôles, nous repérons les élèves qui peuvent endosser plusieurs rôles au cours du travail dans l'idée d'un débat intérieur en référence à la « surveillance de soi » chez Bachelard (Hersant, 2022). Bien sûr, la reconstruction de l'activité de l'élève à partir des traces écrites et orales est fonction de la quantité et de la qualité de ces traces, rendant l'analyse très difficile pour certains élèves, d'où la mise en place de situations favorisant la production d'explications individuelles par les élèves.

À partir de ces éléments d'analyse, nous avons utilisé le CAP pour concevoir des séquences tenant compte de ce processus considéré comme une double genèse : la genèse du problème et celle du registre explicatif. Nous allons voir comment cette approche permet de partir du point de vue de l'élève pour concevoir des séquences dont les étapes permettent aux élèves de faire des pauses réflexives rétroactives, mais surtout proactives. L'objectif de nos recherches est aussi d'aider les enseignants à construire des situations didactiques en utilisant le CAP comme cadre théorique d'analyse.

Nous allons d'abord présenter les outils du CAP. Ensuite nous analyserons avec ces outils une séquence visant l'enseignement des fonctions affines en fin de collège et début du lycée (élèves de 14-16 ans). Nous verrons que les différents rôles pris par les élèves sont essentiels dans la dynamique de problématisation. Nous verrons aussi que la forme de l'institutionnalisation, dans le CAP, donne une nouvelle responsabilité aux élèves et que le scénario proposé a une fonction d'aide à la problématisation. Nous conclurons sur les limites et perspectives de ce cadre théorique dans le champ de la didactique des mathématiques qui est le nôtre.

1. Le cadre de l'apprentissage par problématisation et ses outils d'analyse

Un problème peut être vu comme l'occasion d'apprendre par franchissement d'un obstacle au sens de Bachelard ou au fil d'une enquête au sens de Dewey (Fabre, 2005). Schématisée dans un losange (voir le schéma à la figure 1), la problématisation se joue entre quatre pôles qui délimitent l'espace problème : le problème posé, sa solution, les conditions et les données. Un problème est posé à partir du moment où on prend conscience de son existence. Construire le problème suppose de déterminer les contraintes et les ressources pertinentes pour le circonscrire et le résoudre. Ces contraintes et ressources peuvent être de deux natures. Celles internes au problème, liées au contexte, aux données qu'elles soient fournies ou construites, sont considérées comme des faits « hors question », c'est-à-dire comme des vérités devant être prises en considération; ce sont les données du problème. Les contraintes et ressources propres à l'actant que sont ses connaissances, représentations, schèmes d'actions, répertoires, modèles, conceptions, en lien avec le problème, et qu'il va mobiliser pour se représenter le problème et le traiter, sont les conditions. Si résoudre le problème amène à privilégier un premier axe du problème vers la solution, la problématisation suppose la mise en tension, sur un autre axe, des données et des conditions, toujours en lien avec le problème. Le modèle du losange permet d'analyser comment un problème est posé, construit et résolu, suivant les éléments qui caractérisent chacun de ces pôles. Il peut aussi permettre d'analyser la dynamique de problématisation par la modélisation des différentes étapes du processus. On parle alors d'un enchaînement de problématisation. Problématiser revient à une circulation dans l'espace problème en fonction de contraintes multiples et à une évolution des éléments sur chacun des pôles.

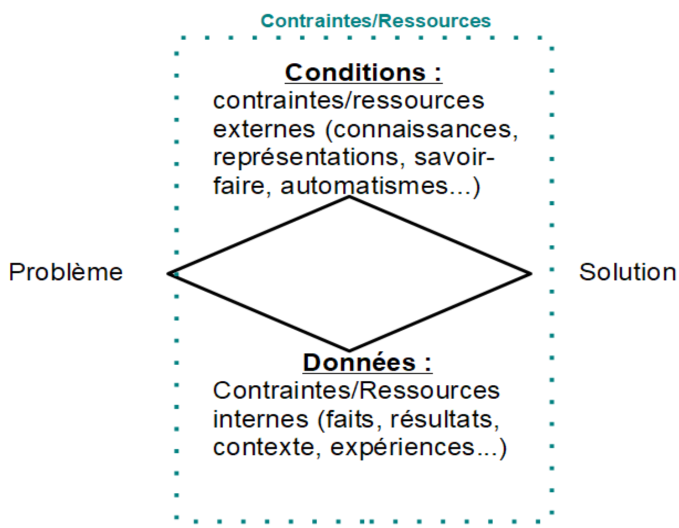


Figure 1. Losange de problématisation (Fabre, 2011)

La mise en tension des données et des conditions suppose des ouvertures et des fermetures du problème, la construction de problèmes transitoires (en particulier lorsqu'il s'agit d'établir de nouveaux faits, de construire de nouvelles données, sans toujours savoir comment ces nouveaux résultats vont ensuite participer à la résolution du problème initial), de sous-problèmes (par l'identification d'étapes dans la résolution ou de nécessités quant à la construction de données manquantes), des temps d'analyse rétroactive pour en tirer des éléments proactifs.

Appliqué aux mathématiques, le modèle du losange permet de considérer l'activité mathématique de l'élève comme un enchaînement de problèmes transitoires, de sous-problèmes, voire de problèmes de nature différente par transformation du but. Dans le champ de la didactique des mathématiques, la spécificité du CAP est qu'il permet d'analyser le problème mathématique tel que l'élève le construit en tant que sujet et non d'analyser le problème théorique pensé par l'enseignant et censé être construit par un élève générique dans une situation didactique.

Si les travaux de Fabre se sont penchés sur la manière d'amener l'élève à problématiser par un jeu d'inducteurs potentiels visant à orienter son activité sur l'un ou l'autre des pôles du losange (Musquer, 2017), nous nous sommes, quant à nous, intéressés à l'utilisation de cet outil pour décrire et analyser l'activité mathématique des élèves considérée comme un enchaînement de problématisation.

1.1 Les losanges de problématisation gradués pour analyser la genèse du problème

Face au problème initial tel qu'il est posé par l'enseignant, chaque élève construit son propre problème ou le plus souvent, un enchaînement de problèmes comprenant des problèmes transitoires et des sous-problèmes. Cette construction suppose des raisonnements qui correspondent à une certaine circulation dans le losange, la prise en considération ou non de certains pôles, mais aussi des manières différentes de considérer un même pôle. Nous avons essayé de les répertorier à partir de l'analyse des productions orales et écrites d'élèves lors de travaux de groupes et avons globalement identifié des niveaux nous permettant de mesurer l'évolution de ces constructions. Nous considérons ainsi trois niveaux de problématisation pour chacun des sommets du losange de problématisation qui décrivent une hiérarchie dans la problématisation que nous allons préciser. Ces niveaux nous ont permis de faire évoluer le losange de Fabre vers un losange gradué susceptible par ses déformations de rendre visible la dynamique de problématisation. Amener les élèves à problématiser en mathématiques revient à les amener à résoudre des problèmes explicatifs orientés vers la preuve. En effet, expliquer passe par la formulation de nécessités au sein d'un modèle, c'est-à-dire de ce qui fait que telle proposition est vraie au sein d'un cadre théorique mathématique clairement identifié en lien avec un problème spécifique. Notre hypothèse est que la formulation de ces nécessités permet de construire des connaissances plus disponibles car associées d'une part au problème qu'elles permettent de résoudre et d'autre part aux contraintes qui en définissent le domaine de validité.

La difficulté est d'avoir accès à la nature des différents problèmes, sous-problèmes et problèmes transitoires construits par les élèves au cours de l'activité. Pour ce faire, nous mettons les élèves en groupes et nous enregistrons les échanges, trois caméras fixes permettent de filmer l'ensemble des groupes, les chercheurs prennent des photographies et des notes, ils enregistrent sur clé USB les impressions des écrans des ordinateurs, photographient les affichages des écrans de calculatrice, pour décrire les gestes, attitudes. À partir de ces traces de l'activité, nous reconstruisons le problème construit par les élèves, tel qu'ils le font évoluer collectivement sur le temps d'une séance. Nous avons ainsi repéré que certains éléments permettent des avancées importantes du problème alors que d'autres semblent effectuer des boucles sans faire avancer le problème. Nous avons alors cherché à classifier ces éléments par pôles, puis nous les avons classés suivant leurs effets sur la construction du problème et les avons répartis arbitrairement en trois niveaux.

Concernant le premier pôle, celui du problème posé, un problème peut être orienté vers la solution (1er niveau), il s'agit alors de produire un résultat par la mobilisation d'une procédure plus ou moins disponible. Il peut être un problème de comparaison, de mise en relation (2e niveau), ce qui demande de préciser un critère, une structure, des références, etc. Il peut enfin être un problème explicatif, donc porteur d'arguments, orienté vers la preuve (3e niveau).

Concernant la solution attendue, elle peut être factuelle (1er niveau), il s'agit alors de produire un nouveau fait mathématique comme une réponse numérique, une propriété, une expression, etc. Mais la solution attendue peut aussi être une relation (2e niveau), c'est-à-dire la construction d'un nouveau critère, d'une nouvelle règle. Ce niveau suppose une plus grande généricité, il peut s'agir par exemple de faire une conjecture. Elle peut enfin être une nécessité (3e niveau) et gagner encore en généricité par l'explicitation du « pourquoi c'est ainsi et que cela ne peut pas être autrement ».

Concernant les données, elles sont contingentes, elles correspondent à des constatations, des informations prélevées, des faits, c'est-à-dire des propositions considérées comme vraies, non réfutables. À partir des travaux de Piaget et Garcia (1983) et reprenant les termes de l'épistémologie génétique, nous considérons qu'elles peuvent être traitées de manière intraobjectale (1er niveau) si une seule donnée porte le sens global de la situation, ce qui revient à ne considérer qu'une seule donnée et à interpréter les autres au regard de cette donnée de référence ou à les ignorer si elles ne correspondent pas au modèle interprétatif. Traiter les données de manière interobjectale (2e niveau) suppose que le sens global de la situation émane d'une mise en relation de différentes données, des inférences sont faites. Traiter les données de manière transobjectale (3e niveau) signifie que le sens de la situation est porté par une théorie permettant la prise en compte de l'ensemble des données.

Les conditions peuvent être assertoriques (1er niveau) si elles ont un statut non démontré – comme les théorèmes élèves par exemple --, problématiques (2e niveau) s'il s'agit d'une hypothèse de travail ou d'une ouverture de possible, ou apodictiques (3e niveau) si elles expriment une nécessité à l'intérieur d'un modèle. Nous préciserons ces niveaux dans l'exemple que nous présenterons plus avant dans cet article.

Nous avons alors identifié des événements de problématisation, considérés comme des événements qui, à des moments précis, viennent modifier la structure du problème au sein du losange. À un stade du travail, un problème factuel peut amener les élèves à la construction d'une nouvelle donnée, qui suppose un traitement différent de l'ensemble des autres données, ou la considération d'une nouvelle condition, voire à poser un nouveau problème qui devient explicatif. En fait, l'évolution n'est pas linéaire, à chaque événement de problématisation, nous avons une déformation du losange car le niveau correspondant à chaque sommet peut varier différemment (voir le schéma à la figure 2).

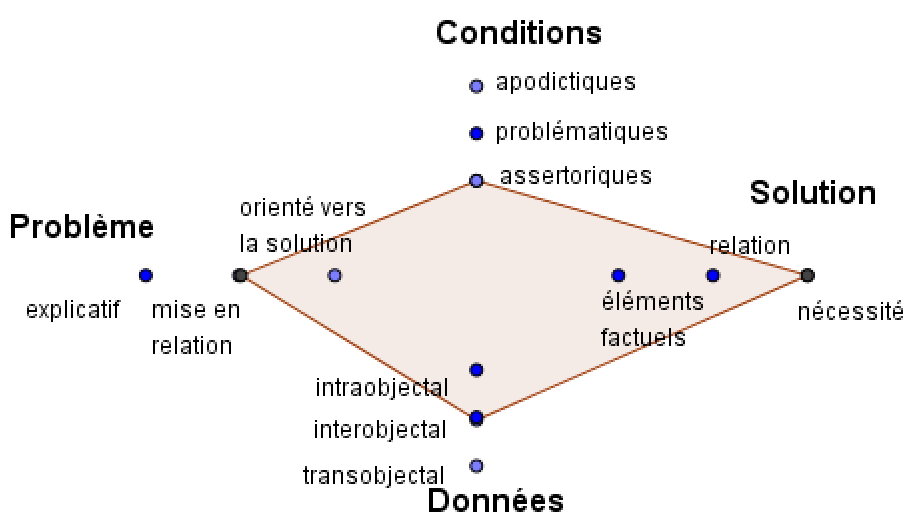


Figure 2. Losange de problématisation gradué (Grau, 2017b)

Nous considérons qu'un savoir mathématique est problématisé à partir du moment où un problème explicatif a permis d'en établir les nécessités, c'est-à-dire ce qui fait que le savoir est ce qu'il est et qu'il ne peut pas être autrement au sein d'un cadre théorique et en lien avec les problèmes qu'il permet de résoudre. Pour comprendre comment se fait cette construction d'un problème explicatif, nous avons analysé plus spécifiquement l'activité mathématique aux niveaux micro et méso d'élèves qui, lors d'un travail d'équipe, avaient effectivement abouti à la formalisation d'un savoir problématisé.

Le losange de problématisation gradué est renseigné pour chaque épisode entre deux événements de problématisation à partir de la question que les élèves mettent au travail et des différents arguments, des propriétés ou définitions qu'ils utilisent de même que de la solution temporaire qu'ils obtiennent et qui les amène à poser un nouveau problème. Lorsque le quadrilatère obtenu s'étire davantage vers l'un des pôles, cela signifie qu'un inducteur de problématisation a amené les élèves à prendre davantage plus en considération les éléments d'un pôle. L'analyse des débats au sein des groupes pendant les séances menées en classe montre l'avancée des arguments. Nous identifions ces inducteurs à travers des marqueurs langagiers (expression d'un doute ou d'une certitude, formulation de type « et si », évocation de travaux anciens, d'éléments du cours, de résultats de calculs antérieurs, etc.). Ainsi, la forme et l'aire du quadrilatère caractérisent un niveau de problématisation.

Par ailleurs, cette analyse des interactions verbales permet de caractériser différents rôles que peuvent prendre individuellement les élèves. La structure de ces débats n'est pas linéaire, elle montre des ouvertures et des fermetures qui peuvent émaner d'intervention d'acteurs différents, des retours en arrière, des pauses, des passages par des sous-problèmes factuels avant de revenir à un problème explicatif. Notre recherche a alors permis d'identifier quatre rôles dans les interactions. L'agissant propose, fait, opère, exécute, il construit de nouvelles données. Le vérificateur contrôle, il compare, vérifie la ligne directrice, le respect du cadre ou des consignes, il valide. Le questionnant remet en cause, demande des explicitations, il amène les autres à reformuler, à argumenter, à justifier. Enfin, le formulateur est celui qui synthétise, conclut, formule ou reformule, pose des conclusions provisoires, pose les problématiques, énonce des éléments du savoir. Chaque élève peut endosser alternativement ces rôles. Nous considérons que la problématisation est le résultat d'un changement régulier de rôles et que les nécessités émergent de ces allers-retours entre l'agir, le penser et le dire. Notre recherche a permis de montrer qu'un élève problématise – il construit des nécessités du problème par une mise en tension des données et des conditions - à partir du moment où il peut passer par chacun de ces rôles seul (dans l'idée d'un débat intérieur « self-talk ») ou au sein du groupe par adaptation au milieu. En fait, certains rôles orientent plus spécifiquement l'activité sur certains pôles du losange de problématisation. Par exemple, le vérificateur peut amener à interroger la validité d'un résultat au regard des conditions et donc à remettre en cause une condition assertorique (comme un théorème élève par exemple). Le vérificateur peut aussi amener à interroger cette même validité au regard des données et amener un traitement inter ou transobjectal, ou au regard du problème posé, ce qui peut alors amener le groupe à repositionner le problème.

Les losanges de problématisation gradués peuvent aider à comprendre comment les inducteurs de problématisation (Fabre et Musquer, 2009) agissent sur la dynamique de problématisation. Fabre et Musquer ont établi une typologie de ces inducteurs considérés comme des éléments qui orientent le travail d'un pôle du losange vers un autre, et précisé leur fonction suivant les pôles ainsi mis en relation. Lors de la conception de séances, ils parlent cependant d'inducteurs potentiels, car d'autres facteurs peuvent jouer sur leur efficacité en classe. Nos recherches ont mis en évidence que des inducteurs potentiels émergent en fait des interactions entre élèves dans les groupes. Nous avons donc cherché à provoquer l'émergence de ces inducteurs pour aider les élèves à problématiser.

Les losanges de problématisation gradués, établis à chaque étape du travail au sein des groupes d'élèves, permettent de rendre compte des différentes dynamiques de problématisation et d'identifier les arguments, les faits, les nécessités au cours du processus. Pour amener tous les élèves à prendre les différents rôles que nous avons définis et donc à problématiser, nous avons construit un enchaînement de situations. Un problème initial est posé aux élèves, les amenant à construire de nouvelles données (l'élève est agissant) afin de faire émerger un paradoxe, une incohérence (l'élève est questionnant). Les élèves sont ensuite amenés à produire des explications (l'élève est formulateur). La situation suivante est construite à partir des explications produites par les élèves. Il s'agit alors de faire émerger des nécessités (l'élève est vérificateur). La dernière étape consiste à proposer une situation construite à partir des nécessités, les élèves ont alors à formaliser une règle, une propriété, une définition, toujours en lien avec le problème construit (l'élève est formulateur). Cet enchaînement caractérise une problématisation par analyse des productions. Son but est d'amener les élèves à construire un savoir en lien avec le problème posé et avec des nécessités du problème. La présentation ici très linéaire de la problématisation par analyse des productions peut en réalité passer par des étapes intermédiaires où les élèves peuvent avoir de nouveau à produire des données, vérifier de nouveaux résultats, passer par des formulations temporaires. L'enjeu principal est que chaque élève soit acteur dans chacune des phases que nous considérons comme indispensables à une problématisation du savoir. Les losanges peuvent alors témoigner de ce que nous appelons la genèse du problème.

1.2 Les espaces de contraintes

Pour construire un scénario amenant les élèves à problématiser, une analyse a priori dans le cadre de la TSD peut s'avérer insuffisante car elle se contente souvent de lister des procédures possibles et de mettre en évidence les obstacles à partir du problème théorique et dans l'idée d'un élève générique. Tenir compte des problèmes réellement construits par les élèves considérés comme des sujets suppose d'anticiper d'autres représentations de la situation que celles imaginées par l'enseignant pour son projet d'enseignement parce que l'activité de l'élève est toujours située. Une analyse épistémologique et une praxéologie du savoir visé peuvent apporter des éléments que nous pouvons organiser dans un espace de contraintes (Orange, 2012). Cet espace se caractérise par trois registres : le registre empirique est l'ensemble des faits – tout ce qui est considéré comme vrai et non mis en question qu'il s'agisse d'un résultat obtenu, d'une donnée initiale, d'une propriété établie, d'une représentation mentale, etc. –, le registre des modèles est l'ensemble des modèles qui rendent compte des faits ou participent à leur construction, le registre explicatif étant le paradigme sur lequel s'appuie la construction des modèles. Initialement construit pour l'analyse en didactique des sciences et vie de la Terre, l'espace de contraintes mathématiques peut être construit à partir de la TAD (théorie anthropologique du didactique) en organisant dans cet espace ce qui peut relever de tâches, techniques, technologies et théories (Chevallard, 1992). En mathématiques, il est possible de construire un espace de contraintes a priori, mais aussi un espace de contraintes a posteriori à partir des traces de l'activité des élèves. Le registre empirique devient alors l'ensemble des données du problème théorique enrichi de ce que les élèves produisent par des traitements divers, au travers des tâches qu'ils se sont assignées, et qu'ils ne mettent pas en question, du moins temporairement. Ces traitements sont contraints par des nécessités qui, elles-mêmes, relèvent de modèles. Enfin, ces modèles s'inscrivent dans des cadres mathématiques ou non, ils font référence à un registre explicatif lui-même configuré par trois mondes : le monde scientifique, le monde social et le monde scolaire. Prenons l'exemple d'une modélisation d'une covariation de deux grandeurs. Les élèves peuvent utiliser différents registres sémiotiques pour envisager des traitements (Duval, 1995, 2006). Ils peuvent essayer de représenter les données (registre graphique), de faire des calculs (registre des écritures numériques) ou de tester des expressions algébriques (registre des écritures algébriques). Suivant les traitements, les formulations écrites et les registres sémiotiques utilisés, il nous est alors possible de repérer les contraintes qui ont organisé l'activité. Ces contraintes peuvent être des nécessités liées au nombre de données à traiter (trois suffisent pour un traitement dans l'idée de grandeurs proportionnelles, par exemple), au choix du repère pour le tracé, au choix des expressions testées, etc. L'articulation entre ces conditions et les données amène à penser le registre explicatif en termes de cadre mathématique (cadre algébrique, cadre fonctionnel, cadre des mesures de grandeurs) ou relevant d'une autre discipline (cadre des mesures physiques). Au sein d'un même registre explicatif interviennent des éléments de différents mondes. Par exemple, concernant la proportionnalité, certains éléments viennent du monde des théories mathématiques comme les propriétés de linéarité ou la notion de fonction affine. D'autres relèvent uniquement du monde scolaire et sont liés à des objets purement didactiques (ex. le tableau de proportionnalité qui est un construit scolaire), ou à la représentation de ce qu'est l'activité mathématique scolaire (statut de l'erreur, type de tâches habituellement demandé dans un contexte, comme l'utilisation de produits en croix dès que les données sont dans un tableau, par exemple). D'autres enfin viennent du monde social considéré comme l'ensemble des expériences vécues, des objets du monde, des concepts quotidiens.

L'organisation de ces éléments dans l'espace de contraintes a posteriori permet de visualiser des ouvertures et des fermetures. Il s'agit en fait d'une réorganisation dans un seul tableau des différents losanges de problématisation à chaque épisode. C'est aussi l'occasion de visualiser comment des nécessités incompatibles peuvent cependant cohabiter, preuve que certains élèves n'ont pas une vision globale de l'ensemble des données et qu'ils les traitent isolément. Cette compréhension plus fine de la manière dont les élèves construisent le problème peut donner des pistes pour concevoir des situations didactiques tenant compte des ouvertures et fermetures qu'il s'agirait de provoquer pour amener les élèves à des problèmes explicatifs orientés vers la construction des nécessités liées au savoir visé.

Le registre explicatif peut être un cadre mathématique au sens de Douady (1986), mais il peut être un paradigme plus général englobant différents cadres, par exemple le paradigme de la covariation (Passaro, 2013) qui traverse aussi bien le cadre de l'arithmétique, celui des mesures de grandeurs, que celui de l'analyse. Orange (2005) considère qu'il est possible d'attester d'un apprentissage si au cours de l'activité, les nécessitées évoluent en lien avec un changement de registre explicatif. Par exemple, en mathématiques, passer du cadre des mesures de grandeur au paradigme de la covariation permet d'aborder la question de la modélisation et d'envisager des traitements sur des fonctions théoriques et non plus des fonctions empiriques.

Les espaces de contraintes permettent de lister a posteriori les différents registres explicatifs mobilisés par les élèves à partir des nécessités mises en évidence au cours de leur activité. Établis à différents moments de l'apprentissage, ils rendent compte de l'évolution des registres explicatifs et donc témoignent d'apprentissages. Ils permettent aussi de mieux comprendre certaines représentations ou certains modèles qui peuvent devenir des obstacles à l'apprentissage. Ils témoignent donc de la genèse du registre explicatif.

Ces deux outils, les losanges de problématisation gradués et les espaces de contraintes a posteriori, sont complémentaires. Les losanges donnent à voir la genèse du problème au niveau méso. Il s'agit de comprendre comment chaque groupe construit collectivement le problème et de mesurer l'écart entre les problèmes construits par les différents groupes au sein de la classe. Au niveau macro, l'espace de contraintes a posteriori montre les différents registres explicatifs à l'œuvre dans la classe et met en évidence les faits et idées qui y prédominent sans rendre compte de la dynamique de problématisation. Pour l'enseignant, l'enjeu est de faire construire aux élèves un « problème pertinent par rapport aux savoirs que l'on veut leur faire construire » (Orange, 2012, p.31) et de les amener à générer des raisons. Ces deux outils apportent des informations qui peuvent utilement aider l'enseignant à élaborer des situations d'enseignement en jouant sur les inducteurs de problématisation : Faut-il ouvrir de nouveaux possibles ou au contraire amener à fermer une piste? Faut-il amener les élèves à valider ou invalider une solution? Faut-il les amener à une nouvelle factualisation? Faut-il apporter de nouvelles données? De nouvelles connaissances? Faut-il modifier la question? Proposer une solution? À partir des productions des élèves et de ces outils, l'enseignant peut concevoir l'enchaînement d'une problématisation par analyse des productions (désormais PPAP). Nous allons développer cet aspect à partir d'un exemple.

2. Un exemple de PPAP pour l'enseignement de la notion de fonction affine

La notion de fonction affine est enseignée en France à la fin du collège (élèves de 14-15 ans) et reprise au début du lycée au cours de l'année de 2de (élèves de 15-16 ans). Si la notion est mobilisable en mathématiques, elle n'est pas réellement disponible dans les autres disciplines, ni même au sein de la classe de mathématiques lorsque les élèves ont la charge de la modélisation, c'est-à-dire, ici, de l'utilisation, sans que cela soit induit par l'enseignant, d'une relation affine pour modéliser la relation entre deux grandeurs. Nous avons donc construit une PPAP visant l'émergence des nécessités liées à cette notion, relativement au problème de modélisation d'une covariation. Cette ingénierie a été expérimentée dans plusieurs classes (une en fin d'année de 3^{e} et deux autres en tout début d'année de 2de). Les productions écrites des élèves ont été recueillies, les échanges entre les élèves des différents groupes ont été enregistrés, filmés, des photographies ont été prises pendant les séances pour témoigner de l'usage de certains outils ou de productions intermédiaires, comme présenté dans la méthodologie plus avant. Nous avons transcrit les échanges et utilisé les vidéos et les photographies pour interpréter les propos, en particulier lorsque les élèves ont utilisé un langage déictique ou lorsque les échanges portaient sur des éléments dont nous n'avions plus trace dans la production finale (affichage de calculatrice ou sur écran de l'ordinateur, tracés au brouillon, etc.).

2.1 La structure de la PPAP pression-température

Nous avons vu que la PPAP comporte différentes étapes, de sorte que les élèves prennent différents rôles. Nous allons faire ici une analyse a priori rapide de chacune des étapes afin de repérer les niveaux de problématisation et les événements de problématisation attendus. La 1re étape est construite par le chercheur et mise en œuvre par un enseignant dans sa classe, les productions sont récupérées en fin de séance et servent à élaborer le support de travail de l'étape suivante et ainsi de suite. La PPAP se termine lorsque les productions attestent d'une formulation correcte des nécessités attendues. Suivant le savoir visé, le problème et le contexte, le nombre d'étapes peut donc varier. Dans cette recherche, les enseignants ne participent pas à l'élaboration de la 1re séance, mais ils sont associés à la suite de la conception. Lors de la mise en œuvre, les documents de travail et la consigne sont donnés aux élèves par le chercheur, ensuite le chercheur et l'enseignant observent et collectent des traces de l'activité mathématique des élèves, mais ils n'interviennent pas auprès des groupes.

Situation 1 :
Trois professeurs font la même expérience. Ils mesurent la pression en hPa (hectopascal) en faisant varier la température d'un même corps dans un même récipient. Voici le tableau de mesures obtenues pour un volume constant et un nombre de moles constant :
par le professeur A :

T en °C	– 15,2	7,5	10,2	23,7	41	43,7
P en hPa	774	842	850	890	942	950

par le professeur B :

T en °F	4,64	45,5	50,36	74,66	105,8	110,66
P en hPa	774	842	850	890	942	950

par le professeur C :

T en K	257,95	280,65	283,35	296,85	314,15	316,85
P en hPa	774	842	850	890	942	950

D'après ces données, la pression est-elle proportionnelle à la température?
Déterminer une relation entre la température et la pression qui est vraie quelle que soit l'unité choisie pour mesurer la température.

Figure 3. Le problème initial

1re étape : le problème initial (voir figure 3) est un problème de mise en relation (2e niveau) : il est d'abord demandé aux élèves de dire si la pression est proportionnelle à la température, à partir d'un tableau de mesures (A, B ou C). Un paradoxe va émerger au moment de la mise en commun du fait que les élèves ont les mêmes mesures, mais exprimées dans des unités différentes : les températures sont en degrés Celsius (tableau A), en degrés Fahrenheit (tableau B) ou en Kelvin (tableau C). La pression s'avère proportionnelle à la température uniquement dans le cas où la température est mesurée en Kelvin. Il s'agit alors pour les élèves de comprendre comment cela est possible. La consigne suivante appelle un haut niveau de généralisation puisqu'il s'agit de caractériser une famille de fonctions à partir de trois relations dont une seule a été caractérisée.

2e étape : les élèves ayant produit des calculs (dont des calculs de variations) et des représentations graphiques, ces éléments sont soumis à la comparaison (problème de mise en relation donc toujours de 2e niveau). Il s'avère que dans les trois cas, le graphique obtenu est une droite. La question posée aux élèves est toujours de déterminer une relation entre la température, mais à partir de ces nouvelles données. Le problème devient explicatif (3e niveau), les élèves se demandent comment expliquer l'alignement des points à partir des données des tableaux. Cette étape amène les élèves à formuler une nécessité : les variations de pression doivent être proportionnelles aux variations de température.

3e étape : La proportionnalité des variations a été mise en évidence par des calculs, des tracés sur les graphiques ou des écritures algébriques. Il est demandé aux élèves de trouver comment exprimer cette nécessité dans les différents registres sémiotiques qu'ils ont utilisés : graphiques, tableaux, écritures algébriques? Les élèves ont alors à expliquer comment chaque caractéristique s'exprime dans ces différents registres sémiotiques : la proportionnalité des écarts par l'alignement des points et la mise en évidence des variations dans le tableau de valeurs, la relation entre la pression P et la température T par une expression de la forme $P = aT + b$ où a est le coefficient de proportionnalité et b la pression pour une température nulle.

4e étape : Un document reprend les explications fournies à l'étape 3 pour montrer le lien entre les différentes manières de représenter la proportionnalité des variations. Il est demandé aux élèves une formalisation de ce qu'est une fonction affine en lien avec le problème de modélisation de la covariation de deux grandeurs et avec les nécessités construites concernant : l'identification de la grandeur dépendante, la proportionnalité des variations, le choix des unités, la valeur en zéro. Un document de synthèse présente la solution du problème et la formalisation de la proportionnalité des variations dans les différents registres sémiotiques.

Plusieurs contextes permettront ensuite de généraliser et d’aller vers une formulation théorique, c’est-à-dire la définition d’une fonction affine sur des nombres et non plus sur des grandeurs.

On comprend qu’une PPAP suppose un temps long. Il s’agit d’amener les élèves à faire la synthèse de différentes productions regroupées dans un document contrairement à la pratique la plus usuelle qui consiste à mettre les solutions en débat en classe entière et à l’oral. Ce qui est mis en discussion est alors « pourquoi c’est vrai », pour faire émerger des nécessités liées aux éléments du savoir visé.

L’espace de contraintes lié aux premières étapes (voir tableau 1) met en évidence les éléments du registre empirique, considéré comme l’ensemble des faits donnés ou construits par les élèves, ce qui est hors question. Au niveau du registre des modèles émergent des nécessités liées à la manière dont les élèves se représentent le problème, la manière dont ils le modélisent – ici comme une situation de proportionnalité d’abord puis de relation affine, le registre explicatif étant ce qui sous-tend les modèles utilisés.

Tableau 1. Espace de contraintes problème pression-température

Registre empirique	Le graphique montre un alignement des points.	Une même variation sur une grandeur amène une même variation sur l'autre, une variation double de l'une amène une variation double de l'autre.	Le produit en croix ne donne pas de bons résultats.	On a un coefficient de proportionnalité pour les données dans un seul des tableaux.
Nécessités au sein des modèles	Si deux suites de nombres sont proportionnelles, on peut appliquer le produit en croix.		La représentation graphique est une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, donc c'est la représentation graphique d'une fonction affine.	
Registre explicatif	Suites numériques proportionnelles	Grandeurs proportionnelles	Proportionnalité dans le cadre fonctionnel (covariation)	Fonction affine

L’espace de contraintes met en évidence les registres explicatifs, considérés comme les grands paradigmes dans lesquels les modèles sont mobilisés par les élèves pour construire le problème. Il s’agit en fait de l’espace théorique dans lequel les losanges de problématisation ont une cohérence. L'enjeu ici est d'amener les élèves à un changement de cadre (Douady, 1986; Rogalski, 2001) pour passer du registre explicatif des suites numériques proportionnelles à celui des fonctions affines. Dans nos travaux de thèse (Grau, 2017b), notre analyse épistémologique a permis de mettre en évidence l'importance du passage par le point de vue covariationnel en appui sur les travaux de Passaro (2009, 2013, 2016), point de vue qui semble naturel chez les plus jeunes élèves et abandonné au profit de techniques apprises au cours de la scolarité. Il s'avère cependant que certains groupes d'élèves ne mobilisent aucun de ces registres explicatifs car ils n'inscrivent pas leur activité dans le cadre disciplinaire scolaire des mathématiques. Nous avons alors utilisé les losanges de problématisation pour montrer les dynamiques de problématisation – différentes suivant les groupes d'élèves et suivant les individus dans le groupe – et mettre en évidence certains écarts entre l'attendu et le réalisé en lien avec le contrat didactique (Grau, 2020).

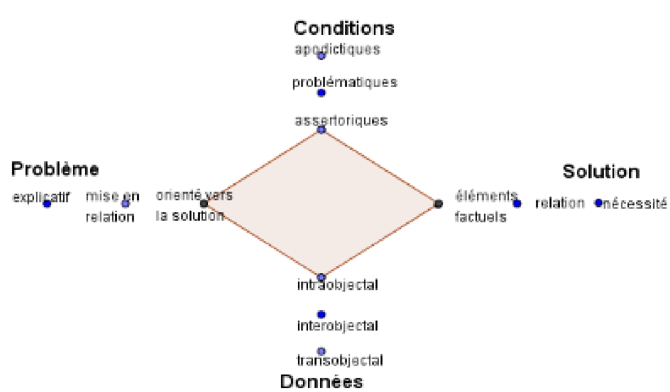
2.2 L'analyse des interactions dans un groupe de quatre élèves

Les losanges de problématisation nous permettent de modéliser les questions que les élèves cherchent à traiter. Nous avons pu ainsi montrer que les groupes qui parviennent à faire émerger les nécessités sont ceux au sein desquels les élèves se répartissent implicitement les rôles et peuvent en changer pendant le travail, passant alternativement de l'élève agissant à l'élève questionnant, vérificateur, formulateur. Certains rôles ouvrent ou ferment les possibles et permettent de délimiter ce qui est hors question et ce qui est en question. Ainsi, le formulateur peut clore un échange s'il énonce un fait ou une nécessité qui fait consensus ou a été démontré, ou au contraire ouvrir un nouveau questionnement si cet énoncé met en évidence un paradoxe ou une incohérence. L'enchaînement des problèmes amène une construction apodictique du savoir si les problèmes deviennent explicatifs et si les solutions permettent de formaliser les nécessités en lien avec le savoir et le problème. Dans notre situation, il s'agit d'amener les élèves à formaliser la nécessité d'utiliser un modèle affine pour exprimer la relation entre la température et la pression, nécessité qui vient, d'une part, du fait que les deux grandeurs sont proportionnelles dans le cas où la température est exprimée en K, que dans les autres unités, la représentation graphique montre un alignement des points et que d'autre part les variations de la température sont proportionnelles aux variations de la pression.

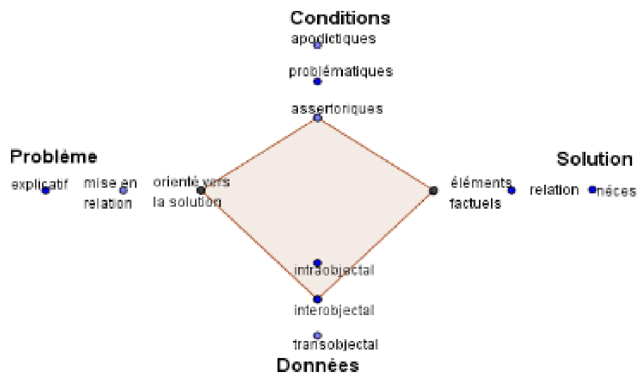
Prenons l'exemple d'un groupe de quatre élèves lors de la deuxième étape de recherche du problème pression-température qui va durer environ 25 minutes. Les élèves doivent rédiger une narration de recherche expliquant comment ils ont pu déterminer une relation entre la pression et la température à partir des tableaux de mesures et des graphiques qui leur étaient fournis. L'analyse des échanges permet un découpage des interactions suivant différents épisodes. Nous les organisons dans le tableau suivant pour mettre en regard le problème et le losange de problématisation associé. Les niveaux du losange sont définis à partir des explications et arguments donnés dans le groupe. Le rôle pris par certains élèves à certains moments amène la formalisation d'éléments explicatifs ou de preuves, les affirmations témoignent alors de faits, la défactualisation intervient au contraire quand un élève remet en question ce qui était considéré comme vrai. Les rappels de cours, certains schèmes ou routines attestent de « hors question » quand d'autres interventions témoignent au contraire d'ouvertures par l'expression d'hypothèses, ou l'utilisation de raisonnement inductifs.

La forme globale des polygones obtenus grâce aux losanges gradués (voir tableau 2) permet de voir si la problématisation s'organise sur l'axe de la résolution ou sur celui de la problématisation, la taille indique un niveau de problématisation. Lorsque tous les pôles sont au premier niveau, il s'agit d'un problème technique que souvent l'élève a déjà appris à résoudre. Lorsque tous les pôles sont au second niveau, le problème est un problème d'analyse. Plusieurs mises en relation doivent permettre une catégorisation, une mise en évidence de propriété, la formulation d'une conjecture. Lorsque tous les pôles sont au troisième niveau, il s'agit d'un problème de synthèse proche d'une démonstration. Par comparaison entre les groupes, il est alors intéressant de voir le nombre d'épisodes, les niveaux de problématisation et individuellement il est aussi intéressant de voir quels sont les élèves qui interviennent dans les sauts de problématisation observés et quels rôles endossent ces élèves qui favorisent l'avancée du problème.

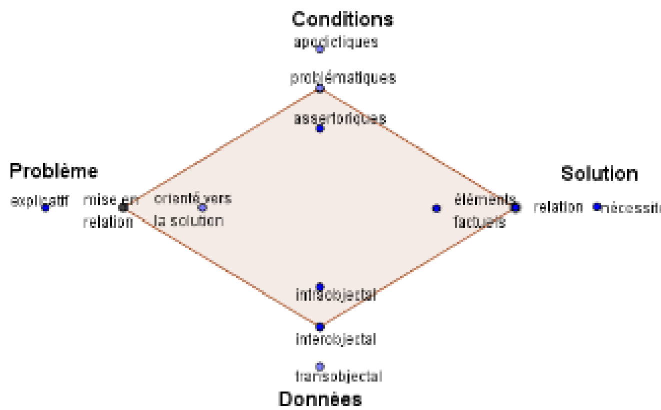
Tableau 2. Analyse de la construction du problème pression-température dans un groupe de quatre élèves en début de classe de seconde

Épisode 1 (01:08) = le coefficient de proportionnalité Les élèves cherchent à déterminer un coefficient de proportionnalité. Ils utilisent leurs connaissances assertoriques sur l'objet. Le problème est technique amenant un travail sur des données isolées (intraobjectal)	

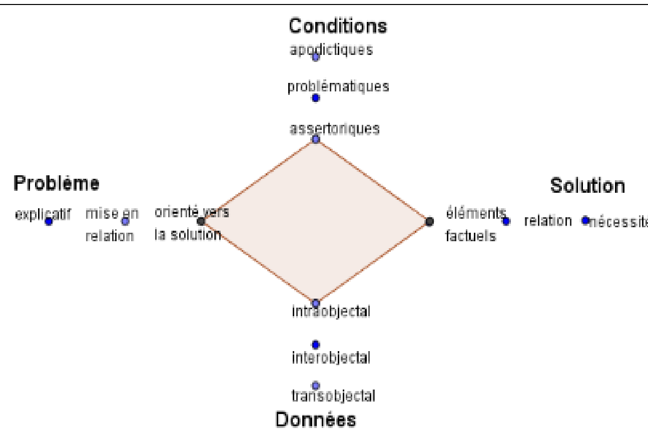
Épisode 2 (05:45) = les différentes unités de température
Les élèves prennent conscience des unités dans le problème (mise en question des unités par comparaison). Ils utilisent des connaissances assertoriques mais ils comparent des faits (interobjectal) : les unités sont différentes, mais les mesures sont identiques. Ils cherchent toujours une réponse factuelle au problème de la proportionnalité.



Épisode 3 (07:07) = le lien entre pression et température
Les élèves font des hypothèses sur la forme de la réponse attendue par l’enseignant. Ils mettent en relation les différentes données. Le problème est bien de mettre en relation, mais ils n’ont pas de savoirs assertoriques pour y répondre, ils utilisent d’hypothétiques propriétés (ils utilisent des formules du type « et si… »)

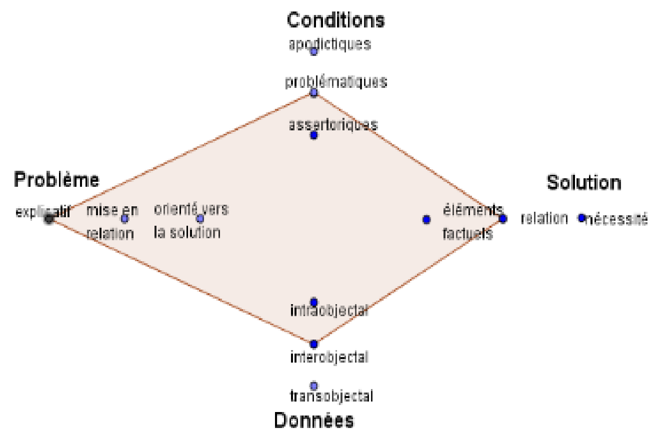


Épisode 4 (09:43) = la conversion des °C en K
Les élèves cherchent à convertir toutes les mesures dans une même unité en utilisant les règles de conversion assertoriques. Ils reviennent à un problème technique de conversion en traitant les données de manière isolée (intraobjectal) : ils cherchent à produire les conversions des °F et K en °C.

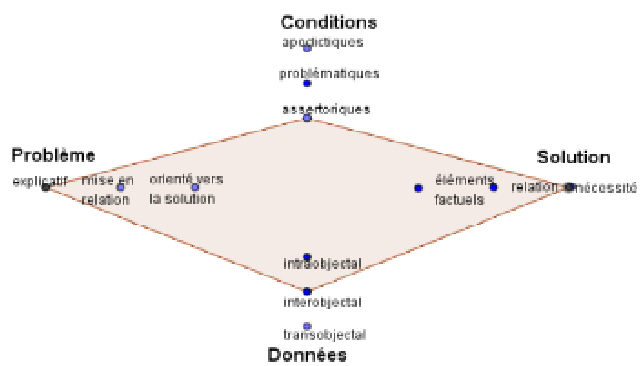


Épisode 5 (11:26) = la rédaction du compte-rendu
Les élèves discutent de la forme attendue et de la manière d’écrire les choses. Il n’est plus question du problème, mais de propreté, d’orthographe, de mise en page…

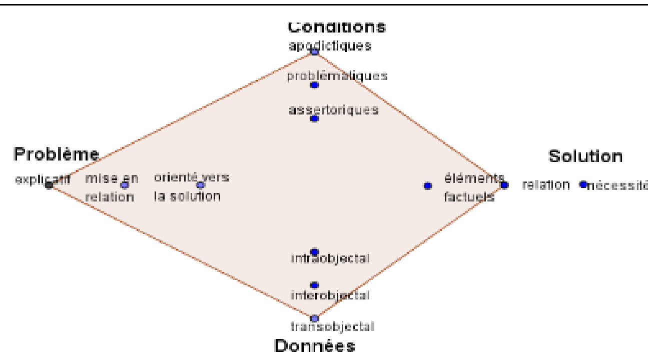
Épisode 6 (16:20) = le paradoxe
Les élèves mettent en évidence un paradoxe (mise en question de la cohérence des résultats). Ils cherchent une explication, mais n'ont aucune réponse assertorique à donner.
Ils comparent les données et cherchent une relation.



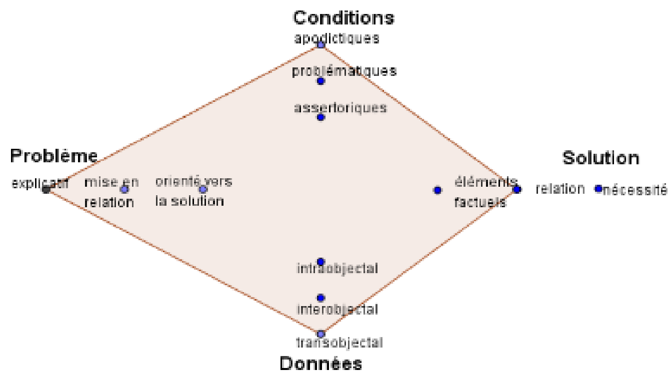
Épisode 7 (17:58) = les fonctions affines et linéaires.
Ouverture d'un nouveau possible par la mobilisation des connaissances assertoriques qu'ont les élèves sur les fonctions affines pour mettre en évidence la nécessité d'une modélisation affine.



Épisode 8 (19:42) = le modèle pour les °F
Les élèves cherchent une relation dans le cas de mesures en °F (recherche d'une explication), ils utilisent le concept d'affinité pour traiter l'ensemble des données en utilisant les nécessités construites : les points sont alignés, les écarts sont proportionnels, la relation doit être affine.



Épisode 9 (20:49) = la formalisation avec les écritures algébriques
Les élèves cherchent une formalisation dans le registre sémiotique des écritures algébriques tenant compte des nécessités (proportionnalité des variations, relation affine) et permettant d'expliquer le paradoxe.



Épisode 10 (24:53) = la rédaction et la conclusion
Le problème n'est pas évoqué sur cet épisode.

La succession des losanges illustre les mouvements d'ouverture et de fermeture par la nature même des problèmes transitoires et sous-problèmes construits par le groupe. Par comparaison, les dynamiques sont très différentes d'un groupe à l'autre. Nous avons d'abord étudié les groupes pour lesquels nous avions des traces de problématisation, pour comprendre comment s'était faite la construction du problème. Notre analyse a alors porté au niveau micro sur les élèves pour lesquels il était possible, individuellement, de reconstruire l'activité du fait des traces qu'ils en avaient laissées. Dans cette perspective, le groupe que nous venons d'étudier plus haut est particulièrement intéressant à plusieurs égards. Les élèves qui le composent ont des niveaux scolaires très différents, ce qui amène les élèves plus en difficulté à questionner les résultats obtenus par d'autres. Chacun prend successivement différents rôles l'amenant à construire de nouveaux faits, à faire de nouvelles hypothèses, à confronter ses connaissances avec celle des autres, à devoir reformuler pour vérifier la compréhension commune, qui amènent le groupe à construire de nouveaux sous-problèmes ou de nouveaux problèmes transitoires (comme le problème des conversions d'unités). Nous avons ensuite porté notre attention sur les groupes pour lesquels nous n'avions pas de traces d'une quelconque problématisation pour essayer de comprendre ce qui pouvait faire obstacle à la problématisation.

2.3 Les obstacles à la problématisation dans les groupes

L'analyse des dynamiques de problématisation permet de mieux comprendre l'impact du contrat didactique, du contexte et du climat de classe sur l'activité des élèves (Grau, 2019). En effet, certains malentendus perdurent lorsque la situation est trop éloignée des tâches habituellement proposées à l'élève, lorsque le contexte multiplie les confusions possibles en mélangeant des domaines différents sans les expliciter. Par exemple, dans notre expérimentation, la situation initiale est l'analyse de résultats de mesures lors d'une expérience en sciences physiques. Les élèves hésitent entre ce qui est attendu d'eux en cours de sciences physiques et en cours de mathématiques. Dans le domaine des sciences physiques, les élèves peuvent se contenter de lectures et de valeurs approchées liées à la précision de l'appareil de mesurage, en mathématiques le contrat usuel suppose d'établir des résultats précis, exacts. Nous allons maintenant détailler quelques-uns de ces obstacles.

Dans certains groupes, les élèves ne prennent pas tous les rôles, restent sur un rôle qu'ils se sont attribué en fonction de la représentation qu'ils ont de leurs compétences en mathématiques au sein du groupe. Ainsi, nous avons pu observer que des élèves qui ont une faible estime de leurs compétences exprimée dans les échanges au sein du groupe, peuvent avoir du mal à questionner ou vérifier et rester dans un rôle d'agissant, ou même d'exécutant. Certains peuvent d'ailleurs ne pas entrer dans l'activité mathématique s'ils sont maintenus dans des tâches rédactionnelles, par exemple. D'autres, au contraire, peuvent questionner, valider et tester ainsi leur compréhension des notions manipulées par les autres. Nous avons pu montrer qu'un même élève peut avoir une posture très différente suivant la composition du groupe, passant d'un rôle à l'autre dans un groupe soutenant, ou maintenu dans un rôle d'exécutant dans un autre groupe où il se sent moins légitime.

Par ailleurs, l'analyse didactique ne permet pas de toujours comprendre les difficultés que rencontrent certains groupes. Les interactions entre élèves attestent que certains arguments, non mathématiques, entravent la construction des problèmes. Les difficultés peuvent alors être analysées en termes de malentendus socioscolaires (Rayou, 2020). Ces malentendus peuvent devenir des obstacles à la problématisation et sont certainement une cause importante de discrimination dans le système scolaire français. Il nous faut donc comprendre comment les éviter afin que l'apprentissage par problématisation ne se révèle pas discriminant. Certains malentendus peuvent être identitaires, c'est-à-dire qu'ils montrent un écart entre la manière dont le sujet s'engage dans la communauté d'apprentissage au niveau du style, des besoins ou du ressenti, et ce qui est attendu par l'enseignant (nous avons eu l'exemple d'élèves qui ne se considèrent pas membres d'une certaine communauté scolaire du fait qu'elles ne sont pas « filles de profs » ou ne sont pas « des savants »). Ils peuvent être culturels (ici, certains élèves n'identifient pas ce qui relève des mathématiques et restent dans le domaine des sciences physiques ou s'arrêtent à la question de l'existence de différentes unités pour mesurer la température suivant les pays). Ils peuvent aussi être cognitifs en ce sens que l'activité cognitive attendue par l'enseignant n'est pas celle menée par l'élève, l'obstacle peut alors être didactique (certains élèves ne comprennent pas ce qu'on attend d'eux lorsqu'on leur demande la relation entre deux grandeurs. Est-ce un calcul, une propriété, une causalité, un point commun?) ou cognitif (il leur est impossible de considérer les variations des deux grandeurs en même temps).

L'expérimentation menée dans différentes classes de fin de collège et début du lycée montre aussi l'effet important des pratiques d'enseignement sur l'activité des élèves à niveau égal (un prétest a permis d'évaluer les prérequis des élèves). Dans une classe où les élèves ont l'habitude de mener des recherches et où l'enseignant valide le moins possible, les élèves ont tendance à prendre plus facilement les rôles de vérificateurs et de formulateurs. Dans celles où le savoir passe essentiellement par l'enseignant et où les problèmes complexes sont plutôt proposés en fin de séquence, les élèves prennent peu d'initiatives et ne prennent pas le rôle de formulateur. Ces analyses montrent le rôle du contrat didactique. En effet, dans la TSD, les concepts de milieu et de contrat didactique sont essentiels (Brousseau, 1988; Perrin-Glorian et Hersant, 2003; Hersant, 2014). Le contrat didactique est défini par Brousseau comme l'ensemble de règles qui partage et limite les responsabilités de chacun, élèves et professeur, vis-à-vis d'un savoir mathématique enseigné, mais Hersant et Perrin-Glorian considèrent que d'autres composantes interviennent aussi dans ce contrat : le domaine mathématique, le statut didactique du savoir, et la nature et les caractéristiques de la situation (Perrin-Glorian et Hersant, 2003, p. 238). Le contrat est, pour le professeur, l'un des moyens de gérer les deux processus que sont la dévolution et l'institutionnalisation. Dans une PPAP, le contrat didactique n'est pas stable et il est posé par le chercheur, il suppose différentes ruptures : au niveau du domaine mathématique (changement de cadre), au niveau du statut didactique du savoir (savoir ancien ou nouveau), au niveau de la nature de la situation (changement de niveau de problème) et de la répartition des responsabilités (questions très ouvertes ou très fermées). La PPAP expérimentée ici montre que les pratiques usuelles des enseignants de mathématiques ne permettent pas toujours aux élèves d'interpréter correctement ce qui est demandé, les contraintes posées, les informations fournies dans les situations proposées du fait de ces ruptures du contrat didactique. En particulier, les élèves sont confrontés à assumer une responsabilité dans le processus d'institutionnalisation, ce qui est plutôt inhabituel.

2.4 La construction des étapes et les ruptures de contrat didactique

La recherche menée (Grau, 2017b) atteste cependant que, dans tous les cas, le fait de mettre au travail les productions des élèves les contraint à prendre plusieurs rôles et leur donne le temps de construire les nécessités. À l'issue de la PPAP, les élèves témoignent qu'ils préfèrent utiliser le bilan de la PPAP pour résoudre des problèmes qu'ils identifient comme relevant de la même notion plutôt qu'un cours plus formel sur les fonctions affines. Ceci atteste que la mise en évidence de nécessités en lien avec le problème permet une construction du savoir qui rend les connaissances plus disponibles.

Tout l'enjeu est alors de créer l'enchaînement des étapes de la PPAP en fonction de ce que construisent et produisent les élèves. Cela demande une analyse épistémologique et didactique du savoir, d'une part, mais aussi une bonne connaissance du construit sur lequel s'appuient les élèves pour agir, dire et penser, afin d'isoler dans les productions écrites et orales les indices des modèles explicatifs mobilisés par les élèves, d'autre part. Il ne s'agit plus simplement de hiérarchiser les productions des élèves pour les mettre en débat dans la classe, mais d'isoler des éléments signifiants du registre explicatif et d'introduire éventuellement des signes ou symboles permettant d'expliciter les concepts mobilisés, les représentations mentales et procédures utilisées (Grau, 2017a). Sur ce même objet d'enseignement – les fonctions affines –, l'analyse des interactions verbales lors de débats menés par les enseignants comparées à celles dans les groupes d'élèves pendant la PPAP montre un déplacement du questionnement. Les débats visent souvent à établir le vrai, alors que la PPAP vise à établir pourquoi c'est vrai. L'étape de travail sur la formalisation des nécessités est indispensable et contribue à ce que les élèves entrent dans une démarche de preuve, car la question de la validation a été réglée dans une étape précédente.

D'autres PPAP testées à différents niveaux de la scolarité et dans différents domaines des mathématiques mettent en évidence que l'élève ainsi mis en situation de construire ce qui peut être considéré comme une axiomatique, porte un regard différent sur la nature du savoir construit. Au lycée, la comparaison entre la formulation du savoir en fin de PPAP avec le savoir savant tel qu'il a pu être formalisé à différentes époques[1], amène aussi une représentation différente de l'activité mathématique et peut permettre à certains élèves de mieux entrer dans cette activité. Les mathématiques leur apparaissent non plus comme un savoir figé mais un savoir évolutif, créatif et situé. De plus, le fait que les nécessités soient liées au problème permet aux élèves d'identifier une classe de problèmes associée à ces nécessités et donc une meilleure reconnaissance du domaine d'application du savoir.

Par ailleurs, le scénario de la PPAP, tel qu'il est pensé et proposé aux enseignants, limite les interventions spontanées en situation, chaque étape suppose un travail autonome des élèves à partir du document fourni, l'étayage ne porte que sur des

---

[1] Nous avons en particulier proposé aux élèves de comparer la définition de la fonction affine dans des manuels scolaires de 1942, 1951, 1975 et 2011.

techniques ou savoirs anciens. L'objectif est de donner plus de visibilité au processus d'institutionnalisation en mettant l'élève au centre de ce processus. Contrairement aux pratiques usuelles de débats menés à l'oral à partir de productions de groupes, l'écrit permet une mise à distance et demande à ce que chaque élève reformule pour lui les arguments produits par la classe. Ces nouvelles productions attestent des écarts entre les interprétations et montrent qu'il est nécessaire de travailler les écrits intermédiaires si l'on veut que la formalisation du savoir ait un sens pour tous les élèves. Elles montrent en quoi mettre l'élève en position réflexive amène à développer une posture autonome de contrôle, posture indispensable lorsque l'on mène une activité mathématique (Grau, 2018, à paraître).

Enfin le travail autour des productions des élèves à ces différentes étapes apporte à l'enseignant et au chercheur des éléments de compréhension des erreurs, difficultés ou obstacles dans l'apprentissage d'une notion et donc, peuvent aider l'enseignant à mieux anticiper l'activité de l'élève et construire des situations permettant à chacun de progresser. Il permet aussi de mettre en évidence des difficultés liées à des malentendus socioscolaires non pris en compte lors de l'analyse a priori mais qui peuvent parfois empêcher l'apprentissage. Ces aspects ne doivent pas être négligés au moment de penser le contexte dans lequel est posé le problème.

Conclusion

Les outils du cadre de l'apprentissage par problématisation (CAP) permettent d'enrichir l'analyse a priori et l'analyse a posteriori des situations, telles qu'elles sont menées dans le cadre de la théorie des situations didactiques (TSD), en ce sens qu'ils fournissent des analyses de l'interprétation subjective et cognitive de la situation par l'élève en fonction du contexte dans lequel est rencontré le problème. L'écart entre le prévu et le réalisé apporte alors des éléments de compréhension dont nous pouvons tenir compte ensuite pour faire évoluer le milieu. En particulier les losanges gradués permettent de voir à quel niveau problématise un élève et comment le faire progresser. Certains élèves, par exemple, restent sur un traitement intraobjectal des données, ce qui peut les mettre en grande difficulté dans leurs apprentissages. D'autres ne sont jamais confrontés à des problèmes explicatifs et n'ont ainsi que très peu l'occasion de générer des explications. Mais cet outil est aussi utile pour l'enseignant afin de vérifier que les situations qu'il propose aux élèves sont de niveaux variés et leur permettent effectivement de problématiser.

Ce cadre nous a permis d'élaborer un scénario de séquence (la PPAP) basé sur la succession d'étapes permettant l'ouverture et la fermeture de possibles, la mise en évidence de nécessités, et la construction de problèmes explicatifs propres à amener l'élève à la preuve. L'analyse dans le CAP du processus de problématisation mené par les élèves, nous apporte des éléments de compréhension de ce qui les amène à agir, penser, dire en mathématiques d'une certaine façon, toujours en lien avec le problème qu'ils construisent. Ces éléments montrent la nécessité de mettre l'élève devant l'obligation de prendre différents rôles : l'agissant, le vérificateur, le questionnant et le formulateur. L'enjeu est donc de proposer aux élèves des situations qui induisent la prise de rôles spécifiques (par la demande explicite faite à l'élève d'agir, de vérifier, de questionner ou de formuler) à partir de ses productions intermédiaires et celles de ses pairs. L'objectif est de donner un temps long au processus d'institutionnalisation et de passer du problème rencontré à une généralisation des résultats par la mise en évidence des raisons pour lesquelles le savoir est ce qu'il est et ne peut pas être autrement. À la suite des expérimentations de PPAP, l'analyse des résultats des évaluations – mesure quantitative sur plus de 3 000 élèves, prétests et post-tests individuels dans les classes où ont été menées les expérimentation, et expérimentation d'apprentissages par problématisation sur toute une année scolaire dans une classe de seconde - a permis d'attester que les élèves qui problématisent, c'est-à-dire ceux qui, individuellement, montrent qu'ils peuvent construire des savoirs scientifiques raisonnés, mobilisent de manière plus autonome les savoirs face à des problèmes inédits, du fait qu'ils identifient des nécessités et des caractéristiques qui appellent ces savoirs. La mise en place de ce scénario dans les classes pose cependant deux difficultés majeures. La première réside dans la conception par les enseignants des différentes étapes de la PPAP : poser le problème, mettre en tension les faits et les conditions du problème, la mise en évidence de nécessités, la formalisation du savoir en lien avec ces nécessités et le problème. Cette conception doit s'appuyer sur l'épistémologie du savoir visé et permettre différentes genèses, celle du problème, d'une part, et celle du registre explicatif, d'autre part. La seconde est d'amener effectivement tous les élèves à problématiser, ce qui suppose d'expliciter certaines ruptures du contrat didactique et de tenir compte d'éventuels malentendus socioscolaires.

Ces recherches ouvrent de nouveaux champs d'exploration en particulier si nous articulons ces résultats avec d'autres cadres théoriques. L'articulation avec la théorie des situations didactiques de Brousseau (2011) amène à penser le milieu en lien avec un contrat didactique donnant plus de responsabilités à l'élève dans le processus d'institutionnalisation. L'articulation du CAP avec la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1992) nous amène à repenser l'organisation mathématique de certains savoirs scolaire (Matheron, 2000) sur la base d'une axiomatique basée sur les nécessités. L'articulation du CAP avec les espaces de travail mathématiques (Kuzniak, 2011) doit nous permettre de mieux spécifier la genèse du registre explicatif en lien avec les genèses sémiotique, instrumentale et discursive. Ces approches en didactique comparée pourraient être intéressantes pour rendre opérationnelle l'idée d'un apprentissage mathématique par problématisation dans les classes à tous les niveaux de la scolarité.

Références

Brossard, M. (2017). Apprentissage et développement I. Dans M. Brossard (dir.), *Vygotski : Lectures et perspectives de recherches en éducation* (p. 87-111). Presses universitaires du Septentrion.

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*, *9*(3), 309-336.

Brousseau, G. (2011). La théorie des situations didactiques en mathématiques. *Éducation et didactique*, *5*(1), 101-104. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.1005

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *12*(1), 73-112.

Choquet, C. (2017). Profils de professeurs des écoles proposant des problèmes ouverts en mathématiques. *Recherche en didactique des mathématiques, 36*(1), 11-47.

Douady, R. (1986). Jeu de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(2), 5-32.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Duval, R. (2006). La conversion des représentations : un des deux processus fondamentaux de la pensée. Dans J. Baillé et A. Compeyron (dir.), *Conversion, du mot au concept* (p. 9-45). Presses universitaires de Grenoble.

Fabre, M. (2005). Deux sources de l'épistémologie des problèmes : Dewey et Bachelard. *Les sciences de l'éducation - Pour l'ère nouvelle*, *38*(3), 53-67. https://doi.org/10.3917/lsdle.383.0053

Fabre, M. (2011). *Éduquer pour un monde problématique : La carte et la boussole*. PUF

Fabre, M. (2016). *Le sens du problème*. De Boeck Éducation.

Fabre, M. et Musquer, A. (2009). Quels outils pour la problématisation? Analyse d'une banque de situations-problèmes. *Spirale*, 43, 45-68.

Grau, S. (2017a). *Les figurations : Écrit intermédiaire pour problématiser*. Actes du 44e Colloque COPIRELEM. Épinal.

Grau, S. (2017b). *Problématisation en mathématiques : Le cas de l'apprentissage des fonctions affines* [thèse de doctorat inédite]. Université de Nantes.

Grau, S. (2018). *Enseigner par les problèmes : la question de la mise en commun* [conférence]. CREN-CARDIE, Nantes.

Grau, S. (2019). *Apprentissage à et par la problématisation en classe de mathématiques : quelques conditions à partir de l'analyse des interactions entre élèves dans un travail de groupe en classe de seconde* [communication orale]. 16e colloque du réseau Probléma, Nantes.

Grau, S. (2020). Problématiser en mathématiques : le cas de l'apprentissage des fonctions affines. Dans J. Pilet et C. Vendeira (dir.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques, 2019* (p. 36-56). IREM de Paris 7.

Grau, S. (à paraître). Le modèle de séquence PPAP. Dans B. Lebouvier (dir.), *Aider les apprentissages par problématisation en classe*.

Hersant, M. (2014). Facette épistémologique et facette sociale du contrat didactique : une distinction pour mieux caractériser la relation contrat milieu, l'action de l'enseignant et l'activité potentielle des élèves. *Recherches en didactique des mathématiques*, *34*(1), 9-31.

Hersant, M. (2022). Usages et apports du cadre de la problématisation à la didactique des mathématiques. Dans S. Doussot, M. Hersant, Y. Lhoste et D. Orange-Ravachol (dir.), *Le cadre de l'apprentissage par problématisation : apports aux recherches en didactiques* (p. 57-74). Presses universitaires Rennaises.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 9-24.

Legendre, M.-F. (2006). *L'épistémologie de Piaget.* https://www.fondationjeanpiaget.ch

Matheron, Y. (2000). Analyser les praxéologies . Quelques exemples d'organisations mathématiques. *Petit x*, 54, 51-78.

Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse. (s. d.). *J'enseigne au cycle 4*. Éduscol.

Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse. (2022). *Ressources d'accompagnement du programme de mathématiques (cycle 4)*. Éduscol.

Musquer, A. (2017). *Cadrage, inducteurs, interventions de l'enseignant* [communication orale]. 14e colloque du réseau Probléma, Nantes.

Orange, C. (2005). Problème et problématisation dans l'enseignement scientifique. *ASTER*, 40, 3-12.

Orange, C. (2012). *Enseigner les sciences : problèmes, débats et savoirs scientifiques en classe.* De Boeck.

Passaro, V. (2009). Obstacle à l'acquisition du concept de covariation et l'introduction de la représentation graphique en deuxième secondaire. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *14*, 61-77.

Passaro, V. (2013). Jouer avec le concept de fonction ou explorer la fonction par l'étude covariationnelle. *Bulletin AMQ*, LIII(3), 73-86.

Passaro, V. (2016). *Analyse du raisonnement covariationnel et des situations qui en favorisent le déploiement chez des élèves de 15 à 18 ans au Québec. Enjeux et débats en didactique des mathématiques* [communication orale]. XVIIIe école d'été de didactique des mathématiques, Enseignement et apprentissage de l'analyse, Brest.

Perrin-Glorian, M.-J. et Hersant, M. (2003). Milieu et contrat didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *23*(2), 217-276.

Piaget, J. et Garcia, R. (1983). *Psychogenèse et histoire des sciences*. Flammarion.

Rayou, P. (2020). Des registres pour apprendre. *Éducation et didactique*, *14*(2), 49-64. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.6737

Rogalski, M. (2001). Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres de Régine Douady. *Actes de la journée en hommage à Régine Douady* (p. 13-30). IREM de Paris 7.

La situation du barreau : une alternative possible pour l’enseignement de l’intégrale à l’entrée à l’université

Inen AKROUTI
Université de Carthage/Université de Jendouba (ISSH)
LaRINa – Laboratoire en réseaux intelligents et nanotechnologie
inen.akrouti@isste.ucar.tn

Résumé : Cette étude se focalise sur la modélisation mathématique d’un phénomène physique. Les étudiants doivent mettre en place une intégrale pour trouver la force d’attraction gravitationnelle exercée par un barreau sur une masse ponctuelle située dans son prolongement. Nous exploitons l’activité mathématique des étudiants et le raisonnement qu’elle génère. La configuration d’une intégrale dans un problème de physique permet de mettre en œuvre concrètement les étapes de sa conceptualisation : la configuration de l'expression pour une quantité infinitésimale, l’accumulation de la quantité infinitésimale, la détermination de la variable d'intégration et la transformation de l'intégrale en une forme qui peut être évaluée mathématiquement.

Mots-clés : Modélisation mathématique, point matériel, intégrale et phénomène physique

The bar situation: a potential alternative for teaching integral concepts in the first year of university

Abstract: This study focuses on the mathematical modeling of a physical phenomenon. Students must think of the integral procedure to calculate the value of the gravitational force of attraction exerted by the bar on the point mass located in its extension. We explore the mathematical activity of students and the reasoning it generates. The configuration of an integral in a physics problem is a multi-level process that involves accumulating the infinitesimal quantity, determining the variable of integration, and transforming the integral into a form that can be evaluated mathematically.

Keywords: Mathematical modeling, material point, integral and physical phenomenon.

Introduction et problématisation

La question de la compréhension de l’intégrale par les étudiants nous paraît particulièrement importante, car elle sert de base à de nombreuses applications dans de nombreux domaines scientifiques et elle sera utile dans des cours ultérieurs (Akrouti, 2021a). En effet, plusieurs recherches soulignent que les étudiants ont des difficultés à utiliser correctement leurs connaissances sur l'intégration dans des problèmes de mathématiques et que, pour la plupart des acteurs (enseignant et apprenant), l’intégrale est une notion difficile à comprendre (Orton, 1983; Thompson, 1994; Kouropatov et Dreyfus, 2013a, 2013b, 2014). Elle repose sur un formalisme « accru », par rapport aux nouveaux entrants à l’université, ce qui rend compliqué l’utilisation des définitions et des propriétés dans les preuves demandées.

L’enseignement de l’intégrale a fait l’objet de plusieurs recherches, parmi lesquelles nous citons Legrand (1990), Thompson (1994), Haddad (2012), Kouropatov et Dreyfus (2014). Ces travaux ont proposé des alternatives afin de rendre la notion d’intégrale plus accessible aux sujets apprenants. Dans cet article, nous envisageons également de proposer une nouvelle alternative pour l’enseignement de l’intégrale à l’entrée à l’université en nous référant à la théorie des situations didactiques (TSD). Cette alternative se base sur la modélisation mathématique d’un phénomène physique. En effet, du point de vue historico-épistémologique, l’intégrale est une co-construction entre mathématiques et physique (Decroix et Rogalski, 2013). Cela a été exploité par Marc Legrand dans les années 1980 à l’Université de Grenoble afin de proposer une approche qui met en œuvre le recours à un phénomène physique pour définir un concept mathématique. Dans cette même perspective, Legrand souligne que l’on est en train de créer un faux divorce math-physique par l’absence de questions de nature épistémologique sur la mathématisation d’une réalité (Grenier et al., 1986). En Tunisie, l’idée du recours à la physique pour introduire une intégrale a été mise en œuvre bien avant, quand les mathématiques et la physique étaient plus couplées dans leur enseignement dans les réformes des années 1959 et 1970[1] (Haddad, 2006).

Pour mettre en œuvre notre idée, nous considérons le calcul intégral comme la mesure d’une grandeur, et que la structure sous-jacente de l’intégrale n’est que la somme de relations multiplicatives entre $f(x)$ et une partition du domaine d’intégration notée Δx. Legrand (1990) partage la même idée et considère que la

[1] Depuis l’indépendance du pays en 1957, l’enseignement secondaire tunisien a connu cinq réformes à travers lesquelles la notion d’intégrale a été inlassablement révisée et son écosystème sans cesse modifié (Haddad, 2006).

structure de l'intégrale correspond à une relation multiplicative entre deux grandeurs où l'une d'elles est une quantité variable ou plus précisément, il dit qu'il s'agit de « l'assouplissement du modèle linéaire simple produit à une réalité complexe » (p. 208). L'idée de la relation multiplicative n'est pas nouvelle en soi; elle se rattache au calcul infinitésimal et c'est son adaptation qui nous servira de base au développement et à l'expérimentation de l'alternative que nous envisageons pour l'enseignement du concept d'intégrale à l'entrée à l'université. Dans l'approche que nous souhaitons, l'introduction du concept d'intégrale repose sur l'acceptation de la priorité de la compréhension conceptuelle d'un élément de connaissance par rapport à l'acquisition des compétences formelles algorithmiques ou procédurales liées à son application.

Nous pensons que cette proposition est réalisable, car il n'y a pas de raison logique qui interdise la formation du concept avant d'étudier la procédure formelle, comme il est souligné par la TSD. Cela signifie qu'en partant de la procédure ponctuelle « simple produit » les étudiants vont, petit à petit, faire émerger la relation suivante : $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$. En plus, de nombreuses recherches portant sur l'étude de l'intégrale au lycée ou à l'université soulignent que l'approche didactique la plus courante, basée d'abord sur l'étude des compétences calculatoires ne conduit pas, pour la plupart des élèves ou étudiants, à développer une compréhension solide du concept d'intégrale (Kouropatov et Dreyfus, 2013a, 2013b; Rogalski, 2013; Akrouti, 2020, 2021b), car savoir calculer une intégrale c'est tout autre chose que de comprendre la notion d'intégrale (Haddad, 2012). Cela ne veut pas dire que tous les élèves ou les étudiants n'arrivent pas à maîtriser l'intégrale, mais il nous semble que l'approche actuelle n'apporte pas le résultat pédagogique souhaité par la communauté professionnelle des chercheurs et éducateurs dans le domaine de l'enseignement des mathématiques (Akrouti, 2021b). Par ailleurs, si nous considérons que l'un des objectifs d'un tel apprentissage est le développement de connaissances d'ordre conceptuel, force nous est d'admettre que l'approche didactique actuelle, en Tunisie, n'atteint pas tout à fait cet objectif.

Notre point de vue se base sur la structure multiplicative soulignée plus haut et sur la possibilité de rendre le concept d'intégrale expérimentalement accessible, c'est-à-dire développer des situations qui permettent des allers-retours entre le concret et l'abstrait, entre l'intuition et la formalisation. En fait, le concret ne se limite pas ici aux objets matériels, il pourrait bien être constitué d'objets suffisamment familiers pour les apprenants (Dias, 2008; Rogalski, 2010, 2018). Dans ce même ordre d'idées, Rogalski souligne :

> Il est indispensable d’avoir construit le concept mathématique à partir d’un problème de physique, et de comprendre la problématique physique (mesure des grandeurs), pour être ensuite capable de l’utiliser dans cette discipline et en même temps d’en saisir la pertinence mathématique. (Rogalski, 2018, p. 457)

À notre avis, le domaine de Calculus (calcul différentiel et intégral) n'est pas exclusivement un domaine mathématique, il est également un phénomène culturel qui représente le point de vue des individus sur la réalité. D'une façon générale, il est difficile d'imaginer un domaine scientifique moderne qui n'utilise pas le calcul différentiel et intégral (Kouropatov, 2015).

Les étudiants n’arrivent pas facilement à modéliser une mesure de grandeur par une intégrale, c’est-à-dire à saisir que dans ce problème, il s’agit d’une intégrale (Decroix et Rogalski, 2013). Or, nous ne pouvons pas changer les étudiants. Cependant, nous pouvons changer les stratégies d'enseignement. Si la formalisation dans le cas de la notion d’intégrale ne correspond pas exactement à l'idée intuitive, à la perspicacité qui a donné lieu à cette formalisation, nous pouvons quand même nous appuyer sur l’expérience personnelle des étudiants et leurs images intuitives pour développer la signification mathématique dont ils ont besoin[2]. Dans ce même ordre d’idées, Moreno-Armella (2014) souligne qu’il n'est pas judicieux d'introduire une définition formelle qui contredit clairement l'intuition des étudiants. En fait, si cela est fait, les étudiants perçoivent la définition formelle comme quelque chose de déconnecté de leurs expériences, de leur centre d’intérêt : « it is not sensible to introduce a formal definition that clearly contradicts the intuition of students who will feel the introduction of the formal definition as something disconnected from their experiences » (Moreno-Armella, 2014, p. 627). Par ailleurs, Rogalski (2013) précise que :

> ce qu’il faut comprendre est que le sens d’une notion mathématique ne se comprend pas – et surtout du point de vue de son opérationnalité – uniquement par une définition formelle; on a besoin d’un contexte, de motivations, d’intuitions – ici celles de la mesure des grandeurs. (p. 33)

En Tunisie, à l’entrée à l’université, le programme officiel préconise d’introduire la notion d’intégrale à partir des fonctions en escalier, mais aucune construction particulière n’est imposée. Puis, la construction de l’intégrale à partir des fonctions en escalier sera étendue à des fonctions plus générales, telles que les fonctions continues par morceaux, en se basant sur l’idée intuitive de l’intégrale qui consiste

---

[2] En effet l’augmentation du nombre de découpages du domaine d’intégration est une idée intuitive qui sert à rendre la formalisation de l’intégrale plus accessible, car la formalisation n’est que la limite de la somme de la relation multiplicative quand le nombre de découpages tend vers l’infini.

à approcher ces fonctions par des fonctions en escalier. Autrement dit, toute fonction définie et bornée sur un intervalle $[a, b]$ est majorée et minorée par une fonction en escalier. Les sommes de Riemann sont introduites après la définition de l'intégrale de Riemann bien qu'elle constitue le fondement de la théorie d'intégration (Akrouti, 2021b).

Par ailleurs, des recherches soulignent que l'activité mathématique des étudiants, dans le contexte universitaire tunisien, est centrée sur un aspect calculatoire qui met en avant la procédure de primitive et réduit la notion d'intégrale à une simple manipulation de formules algébriques suivant quelques règles connues a priori (Haddad, 2012; Akrouti, 2021a, 2021b).

Notre problématique se focalise sur la conceptualisation de la relation suivante : $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ et comment la mettre en application dans l'activité mathématique des étudiants. Comprendre cette relation et sa place dans le processus d'enseignement-apprentissage à l'entrée à l'université est nécessaire pour concevoir et mettre en place une approche qui permet d'offrir à l'intégrale, et également aux sommes de Riemann, la valeur conceptuelle qu'elles méritent (Rogalski et al., 2001).

Ainsi, nous formulons notre problématique de la manière suivante : en quoi, une approche, basée sur la modélisation mathématique d'un phénomène physique pourrait-elle permettre d'améliorer l'activité mathématique des étudiants dans le cas de l'intégrale Il convient, ici, de remarquer que nous nous intéressons aux processus cognitifs des étudiants et pas simplement à leurs connaissances établies. Par ailleurs, nous rejoignons Brousseau (1998) qui considère que l'apprentissage du sujet est lié à la dimension cognitive et dépend de l'activité qu'il mobilise dans la résolution de problèmes.

Cet article est structuré en trois parties. Dans la première, nous présentons l'objectif de notre recherche en précisant à la fois son originalité et son contexte spécifique, ensuite nous proposons un regard didactique sur l'histoire du développement de l'intégrale. Après avoir présenté la ligne directrice de notre recherche, nous consacrons la deuxième partie au cadre théorique de référence et la méthodologie adaptée. Précisons que, dans une problématique se focalisant sur le processus d'enseignement-apprentissage, la TSD pourrait constituer un cadre conceptuel adéquat. Enfin, dans la dernière partie, nous menons une analyse du déroulement de l'expérimentation en classe. Cette analyse est accompagnée de plusieurs extraits significatifs, d'interventions des étudiants et de l'enseignante, permettant d'appuyer notre point de vue et de renforcer l'étude des données recueillies.

1. Caractéristiques épistémologiques

La définition formelle suppose théoriquement que tout le monde soit d’accord et uni sur un seul point de vue. Mais nous contenter de cela nous fait oublier que : enseignant/étudiant et même étudiant/étudiant ne disposent pas d’un même niveau conceptuel. Ainsi, la définition ne serait pas saisie de la même façon par tous les acteurs.

Plusieurs recherches soulignent qu’en mathématiques, les élèves apprennent souvent à suivre un algorithme pour évaluer une intégrale (Kouropatov et Dreyfus, 2012; Akrouti, 2020) et à utiliser des symboles sans se référer à des situations physiques concrètes (Wallace et Chasteen, 2010; Hu et Rebello, 2013). Cependant, la mise en place d’une intégrale dans le contexte de la physique permet aux apprenants de voir concrètement l’application des notions mathématiques sur des phénomènes qui se rapportent à la réalité (Rogalski et al., 2001). Cette mise en place nécessite plusieurs étapes qui font émerger la structure sous-jacente de l’intégrale progressivement : tout d’abord la configuration de l’expression du phénomène physique proposée en une quantité infinitésimale; par exemple : dE, dQ, dF, puis, l’accumulation de cette quantité infinitésimale, ensuite la détermination de la variable d’intégration et enfin, la transformation de l’intégrale en une forme qui peut être évaluée mathématiquement (Rogalski et al., 2001). Par conséquent, le recours à l'intégration en physique permet aux étudiants de comprendre l’intégrale en termes de sommes de Riemann et également en termes de structure de produits où l’un des facteurs est une quantité différentielle. De plus, l’approche offre l’occasion de dépasser le contexte d’aire qui est devenu, pour de nombreux sujets apprenants, une notion synonyme d’intégrale (Akrouti, 2021a). Finalement, cette caractérisation en somme de produits permet d’exprimer les relations entre les grandeurs physiques qui constituent l’expression du phénomène physique proposée, en particulier le différentiel dx.

Par ailleurs, pour donner un sens aux phénomènes physiques, les étudiants utilisent une forme de connaissance intuitive par le biais de leur interaction avec le monde réel. Ce sens intuitif de la connaissance est souvent appelé selon diSessa et Sherin (1998) “phenomenological primitive”. Il pourrait être appliqué directement dans les activités qu’ils entreprennent; cependant, s'il ne s’applique pas correctement, il pourrait mettre les étudiants face à des conflits cognitifs qui se transforment par la suite en obstacles pour la construction des connaissances formelles en physique et en mathématiques.

Le point de vue que nous évoquons dans le cadre de cette approche relève de la procédure intégrale : découpage → somme → encadrement → passage à la limite. Cette procédure met en œuvre les trois étapes suivantes :

- Si f est constante ($f = c$); $\int_{\Omega} f d\mathrm{m} = C \times$ mesure (Ω) avec f une fonction définie sur un domaine Ω;
- l'additivité par rapport au domaine : si $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ avec $\Omega_1 \cap \Omega_2$ de mesure nulle, alors I (Ω,f,m) = I (Ω_1,f,m) + I (Ω_2,f,m);
- la croissance : si $f \leq g$, I (Ω,f,m)$\leq$ I (Ω,g,m).
  (Decroix et Rogalski, 2013, p. 5)

2. Un regard didactique sur le développement historique de l'intégrale

Dans l'histoire, le concept d'intégrale se rattache au développement du calcul infinitésimal qui a ouvert de nouvelles pistes de réflexion dans plusieurs domaines de la science, en particulier en mathématiques. Il a guidé des changements fondamentaux en abordant de nouvelles questions qui n'ont pas été posées avant. Le calcul infinitésimal est considéré comme « l'un des plus formidables accomplissements de l'esprit humain ».

Carnot (1839) considère l'intégrale comme une somme : « Une intégrale est considérée comme la somme des éléments différentiels, on est convenu de la désigner dans le calcul par la caractéristique ∫ qui est regardée comme l'abréviation des mots "somme de" » (p. 100). Alors que de Freycinet (1860) la définit comme un calcul de limite. Il explique son idée en disant : « Les termes des sommes dont le calcul intégral recherche les limites sont toujours supposés de la forme : "$f(x)\Delta x$" » (p. 102). Cette caractérisation en somme de relation multiplicative, entre la fonction à intégrer $f(x)$ et une petite quantité Δx, a été considérée par des chercheurs en didactique des mathématiques (Jones, 2015; Sealy, 2014) et également en didactique de la physique (Meredith et Marrongelle, 2008) comme indispensable à la réussite des étudiants à la compréhension de la notion d'intégrale car elle évoque un raisonnement quantitatif nécessaire au développement des connaissances cohérentes et productives.

En effet, le calcul de la valeur d'une intégrale n'est pas souvent proposé directement tel que les fonctions dont leurs expressions ne rentrent pas sous l'une des formes usuelles des primitives connues (la fonction de Gauss $x \mapsto e^{-x^2}$ par exemple). L'intégrale de ce type de fonction nécessite un travail préliminaire pour transformer les données proposées en d'autres plus simples. Ce travail de transformation est différent du calcul intégral proprement dit. Il rentre dans l'usage de la méthode infinitésimale et c'est le travail le plus important dans l'élaboration de la solution. L'application des règles du calcul intégral est basée sur le principe des quantités infinitésimales; si, à titre d'exemple, on veut chercher l'aire sous une courbe, alors si on augmente l'abscisse x d'une quantité infiniment petite dx, l'aire cherchée augmentera par exemple de celle d'un rectangle infiniment petit qui sera la différentielle de l'aire en question. Le calcul intégral pourrait également être considéré comme une étude de la variation d'un mouvement dans un cadre cinématique qui met en œuvre une approche numérique comprenant des quantités infinitésimales.

Par ailleurs, de nombreux problèmes en physique nécessitent la notion d'intégrale pour calculer des grandeurs physiques à partir d'autres grandeurs non constantes. Les intégrales proposées, pour résoudre ces problèmes, pourraient être évaluées en adaptant la procédure linéaire « simple produit ». Le recours à cette procédure nécessite une modélisation quantitative de la réalité. La conception de mesure de grandeur constitue, ainsi, une interprétation mathématique de l'idée intuitive de grandeur d'un ensemble que l'on obtient par procédé de décomposition, de sommation, d'encadrement et de passage à la limite (Haddad, 2012; Akrouti, 2021b).

Le retour aux problèmes des fondements par les enseignants des mathématiques et la reconnaissance des documents originaux donnent de la vie et de la cohérence à l'enseignement des mathématiques. Notre approche se base sur l'articulation des caractéristiques épistémologiques et des considérations didactiques pour construire un répertoire didactique de la classe (Gibel, 2018) afin de permettre aux apprenants d'élaborer le sens sous-jacent de la notion d'intégrale (Rogalski et al., 2001; Legrand, 1990).

Cette approche permet aux étudiants de se concentrer d'abord sur la relation multiplicative, ensuite sur la somme des produits obtenus. La relation multiplicative évoquée s'obtient par la mesure de deux grandeurs produites en physique où le premier facteur est constant (Legrand, 1990). Il faut noter que cette relation multiplicative représente également le produit de deux composantes sur lesquelles la conception des sommes de Riemann peut être développée (Akrouti, 2020). Ceci signifie qu'il serait peut-être important que le contexte (dans lequel la multiplication entre deux quantités pour en produire une troisième) mis en œuvre soit soigneusement étudié par les étudiants. Nous supposons que ces types de contextes peuvent être utiles, car ils permettent aux étudiants de revoir les sommes de Riemann comme des interprétations conceptuelles possibles de l'intégrale de Riemann, et non comme des techniques de calcul de la convergence de certaines suites (Rogalski et al., 2001).

3. Cadrage théorique, méthodologique et adaptation d'un modèle d'analyse

Pour aborder notre problématique, nous avons choisi de nous placer dans le cadre de la théorie des situations didactiques (TSD) comme cadre conceptuel de référence. La TSD (Brousseau, 1998) propose un modèle d'apprentissage à partir de situations adidactiques ou à potentialité adidactique. Ce modèle se base sur la structuration en niveaux du milieu (Margolinas, 1998; Bloch, 2000, 2006). Ces situations se caractérisent par un système de relations établies entre étudiants, enseignant et milieu mathématique. Ce modèle d'apprentissage organise le travail des étudiants en trois phases.

- La phase d'action (milieu heuristique) : en préparant une situation, l'enseignant organise un milieu qui permet au sujet apprenant sa conduite, c'est-à-dire que le sujet développe une activité en fonction de son répertoire de connaissances : il agit sur les objets auxquels il est confronté. Il se rapproche de ce que Freinet, cité dans Dias (2008), appelle un tâtonnement expérimental[3]. La phase d'action évolue vers un changement du point de vue du sujet apprenant (Allard, 2015).
- La phase de formulation : dans ce milieu, le sujet apprenant produit deux types d'actions : « d'une part une action sur les objets, d'autre part une action sur les conditions de l'action ». (Gibel, 2008, p. 16)
  C'est donc dire que le sujet agit sur les conditions afin de les modifier pour créer des nouvelles conditions d'utilisation des objets. Ces nouvelles conditions apparaissent pour qu'elles soient partagées. En fait, afin d'argumenter les choix d'action, le sujet apprenant doit formuler des connaissances en cours d'acquisition pour interpréter les réponses du milieu (Dias, 2008). Le sujet apprenant évolue ainsi vers un changement de code et de langage (Allard, 2015) : le partage des idées et de l'expérience.
- La phase de validation : Cette phase est consacrée à la discussion par rapport à la vérité des assertions et des théorèmes qui en découlent. Les conjectures étayées sont justifiées par des arguments et des preuves. Les différents participants (sujet apprenant et enseignant) sont responsables de la validation. Ce qui compte ici est l'adéquation entre les connaissances construites et le savoir visé du point de vue de la vérité scientifique. Il s'agit d'une évolution vers un changement de théorie (Allard, 2015) qui permet d'obtenir des théorèmes.

La TSD constitue un cadre favorable pour l'analyse des raisonnements produits par les étudiants en situations d'apprentissage réelles (Lalaude-Labayle, 2016). Elle propose le savoir mathématique et l'activité qu'il génère à être des objets

[3] Le tâtonnement expérimental n'est ni un tâtonnement aveugle ni la méthode expérimentale scientifique. Il se définit comme un processus naturel d'apprentissages personnalisés, d'action et de pensée, chez l'enfant comme chez l'adulte, qui, s'exerçant dans tous les domaines d'activité, mobilise les divers processus cognitifs et opérations mentales habituellement mis en œuvre dans le fonctionnement naturel de l'intelligence humaine. "Tâtonnement expérimental et pédagogie Freinet", édition ICEM n° 35 (cité par Dias, 2008, p. 46).

d’étude avant tout regard focalisé sur l’étudiant ou l’enseignant. Ainsi, la TSD considère les savoirs mathématiques comme le moteur des phénomènes didactiques. Elle suppose que le savoir mathématique n’est accessible qu’à travers les activités qu’il produit.

Le modèle de structuration en niveaux du milieu, d’abord développé par Brousseau, a été enrichi par Margolinas (1994, 1998), puis par Bloch (2000, 2006) afin de tenir compte du rôle de l’enseignant dans les niveaux adidactiques. L’étude du déroulement en classe ne renvoie pas qu’à l’activité cognitive de l’étudiant, mais elle reconnaît également l’importance des interactions entre étudiant/étudiant et également étudiant/enseignant (Bloch, 1999). Les interventions de l’enseignant devraient enrichir le travail des étudiants et son évolution dans le milieu mathématique au cours des phases d’action, de formulation et de validation. Le contrôle épistémologique de la situation par l’enseignant devient donc nécessaire. Dans ce même ordre d’idées, Bloch (1999) souligne que :

> Dans la mesure où le milieu de la situation n’assure pas de façon suffisamment adidactique la production de connaissances, nous nous tournons vers l’activité du professeur et les connaissances qu’il met en œuvre, pour comprendre le fonctionnement de la situation pour l’élève. (p. 138)

Dans le cas de séances de classe ordinaire, les interactions qui se déroulent au sein du système, formé par l'enseignant, les étudiants et le milieu mathématique sont contrôlées par le programme officiel et évoluent en fonction de ses exigences. Donc, dans ces conditions, il est difficile d’imaginer que l’enseignant pourrait perdre le contrôle de la situation, car il s’agit généralement d’un enseignement par ostension. Cependant, la réalité de la classe et les attentes de l’enseignant dans le cas d’une situation adidactique ou à potentialité adidactique sont différentes, et cela nous amène à la recherche d'un outil pour étudier les interactions au sein d'un tel système, comme il est préconisé dans la conception des situations dans la TSD.

Le travail des étudiants se développe dans un milieu, c’est-à-dire dans un système de relations constitué d’objets matériels, de connaissances disponibles et d’interactions qui pourraient se produire dans la classe soit avec les autres étudiants soit avec l’enseignant. Gonzalez-Martin et al. (2014) soulignent que l’utilisation du modèle d’apprentissage inscrit dans la TSD au niveau du supérieur permet au chercheur de rendre la part de responsabilité confiée aux étudiants plus grande, ce qui conduit par la suite à un ajustement du rôle de l’enseignant. Dans cette même optique, Ghedamsi (2017) souligne que les fondements, sur lesquels se base ce modèle d’apprentissage, se concentrent sur l’optimisation des interactions au sein du système mentionné afin de donner plus de responsabilités aux étudiants dans la construction de leurs connaissances. L’autrice précise qu’à l'entrée à l'université, les interventions de l'enseignant ne devront pas être négligées, car elles participent au développement des compétences des étudiants.

La structuration ascendante des niveaux de milieux est organisée de M-3 à M0. Dans le cadre de ce travail, nous considérons le milieu M-2 comme constitué du milieu matériel M-3 et du milieu objectif M-2 et nous l'appelons le milieu heuristique ou milieu d'action au sens de Gibel (2008). Il représente l'ensemble des connaissances disponibles que le sujet apprenant puisse concevoir et proposer à partir des raisonnements naturels que la situation leur inspire. Le milieu M-1 est appelé le milieu de référence ou de formulation/validation. Il correspond à l'élaboration des stratégies justifiées par le sujet apprenant. Enfin, le milieu M0 est appelé milieu d'apprentissage. Gibel (2008) le redéfinit en disant « le niveau M0 est celui des assertions » (p.20). C'est ici que commence à émerger l'institutionnalisation après la validation de conjectures proposées. L'étudiant avec l'aide de l'enseignant commence à utiliser des arguments formels spécifiques au domaine mathématique.

Le tableau ci-dessous résume la structuration ascendante des niveaux de milieux de M-3 à M0. Il est à noter que les niveaux de M-3 à M-1 représentent les niveaux adidactiques alors que le niveau M0 représente le niveau didactique.

Tableau 1. La structuration ascendante des milieux

M0 **M-apprentissage**	**E0** **Étudiant**	**P0** **Professeur enseignant**	**S0** **Situation didactique**
M-1 **M- de référence**	E-1 E-apprenant	P-1 Professeur régulateur	S-1 Situation d'apprentissage
M-2 **M-objectif**	E-2 E-agissant	P-2 Professeur observateur	S-2 Situation de référence
M-3 **M-matériel**	E-3 E-objectif		S-3 Situation objective

Pour chaque situation, les attentes de l'enseignant sont différentes de celles de l'étudiant. Gibel (2008) évoque la notion de répertoire didactique de la classe et le définit comme « l'ensemble des moyens que l'enseignant pense pouvoir attendre des étudiants, par suite de son enseignement » (p. 19). Plus précisément : « Le répertoire didactique de la classe est identifiable à la part du répertoire mathématique que l'enseignant a choisi d'expliciter, notamment pour la validation et lors de l'institutionnalisation (Bloch et Gibel, 2011, p. 15). Ainsi, l'enseignant choisit le répertoire didactique de la classe et le considère comme l'ensemble des relations didactiques qu'il juge utiles pour résoudre un problème proposé tout en prenant en compte le savoir déjà institutionnalisé précédemment.

Les chercheurs n'ont pas cessé d'enrichir le modèle de structuration en niveaux de milieu, par d'autres outils théoriques adaptés notamment à des questions relatives au cursus supérieur (Bloch, 2006). À travers ces recherches, il y a eu des aménagements et une revue de la manière d'exploiter ces interactions. Bloch et Gibel (2011) se sont appuyés sur cette structuration (Margolinas, 1994, 1998; Bloch, 2006) pour développer un modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements. Gibel (2018) précise que c'est au niveau de l'articulation entre le milieu heuristique et le milieu de référence qu'apparaît et se développe le raisonnement attendu. Bloch et Gibel ont utilisé les trois catégories de la sémiotique de Peirce : les icônes, les indices et les symboles-arguments. Une icône est un signe qui renvoie à son objet lorsqu'il ressemble à un objet. Elle relève d'une action de l'étudiant confronté à la situation. Lecorre (2016) précise qu'en mathématique, les icônes sont des signes qui évoquent immédiatement pour le mathématicien une théorie sans avoir besoin de la revisiter : par exemple le symbole $\int$ « intégrale » renvoie à la théorie de mesure. Les indices sont les signes qui indiquent un objet. Selon Otte (2006), un indice incorpore une icône et pointe l'objet sans qu'il soit l'objet lui-même. Par exemple, le dessin d'une figure peut être un indice; l'aire sous la courbe est un indice de l'intégrale. Les icônes et les indices sont des signes non symboliques. Ils représentent l'étape intuitive dans le développement d'un raisonnement mathématique. Les symboles-arguments sont les signes qui désignent l'objet au travers des règles et des lois auxquelles se soumet l'objet, en mathématiques, un calcul qui prouve une assertion. Un symbole-argument est assimilé à une preuve de nature pragmatique, sémantique ou syntaxique.

Le modèle de Bloch et Gibel (2011) se compose de trois axes. Le premier axe dépend du milieu de la situation. Bloch et Gibel supposent que les raisonnements développés par les sujets apprenants dépendent du niveau du milieu. Ensuite, le deuxième axe est constitué par l'analyse des fonctions des raisonnements. Il s'agit de l'activité mathématique que les étudiants entreprennent sous forme intuitive ou formelle. Enfin, le troisième axe renvoie au répertoire didactique sous le contrôle du système organisateur.

Le modèle d'analyse des raisonnements a été complété par Lalaude-Labayle (2016) au niveau de l'enseignement supérieur, dans le cadre de l'algèbre linéaire : « à l'aide du treillis ordonné de classe de signes » (p. 127). Les trois axes du modèle initial (Bloch et Gibel, 2011) constituent le socle du modèle proposé par Lalaude-Labayle (2016). Lalaude-Labayle a ajouté une quatrième ligne qui prend en considération les formes des raisonnements. En se basant également sur la sémiotique de Peirce, il suppose que tout raisonnement prend nécessairement l'une des formes suivantes : abduction, induction et déduction. Ces trois formes de raisonnement sont en fait trois types d'argumentation :

- L'argument consiste à découvrir une règle sous forme d'hypothèse. Cette hypothèse est susceptible d'expliquer un fait. On est alors dans l'abduction. Lalaude-Labayle souligne que l'abduction « est une inférence relative à une icône » (p. 154).
- La règle peut résulter des faits; c'est-à-dire qu'on produit une généralité à partir d'un signe particulier. On est alors dans l'induction. Chaque fois qu'il y a de la fumée, il y a du feu! « L'induction est une inférence relative à un index » (p. 154).
- La règle peut être imposée aux faits. On est dans la déduction, c'est-à-dire qu'on produit un signe particulier à partir d'une généralité. Chaque fois qu'il y a un feu rouge, il y a un ordre de s'arrêter! La déduction est une inférence relative à un symbole (p. 155).

Lalaude-Labayle (2016) explique son point de vue en disant que la première action de l'étudiant consiste à trouver un motif, grâce à son répertoire didactique. Il s'agit donc de la notion d'icône. Puis, à partir de cette icône, le système organisateur envisage une décision de calcul : nous nous retrouvons face à un indice. Enfin, le système organisateur permet l'utilisation des symboles et des formules contenus dans le répertoire didactique : nous sommes alors face à un symbole-argument.

Pour analyser le passage du raisonnement intuitif au raisonnement formel, il est nécessaire d'adopter une approche didactique qui permet aux étudiants de donner un sens à leurs déclarations et aux preuves formelles sous-jacentes, en les reliant à d'autres types de discours qui peuvent activer le côté intuitif et la cognition personnelle à un niveau donné. Lecorre (2016) précise qu'il s'agit notamment des moyens de validation qui ne sont que l'abduction, l'induction et la déduction et que ces moyens ne sont que les formes du raisonnement définies par Lalaude-Labayle (2016). Lecorre (2016) propose la rationalité et la définit comme étant un système de contrôle et de production de connaissances non contradictoires ». Le principe de non-contradiction suppose de redéfinir la vérité et la fausseté d'une assertion. Il distingue trois types de vérité : la vérité pragmatique, la vérité empirique et la vérité théorique. Ces trois types de vérité font ressortir trois types de rationalités. D'abord, la rationalité pragmatique où la validation s'impose sous forme de vérification concrète, ensuite la rationalité empirique où la validation se fait par induction et enfin la rationalité théorique où la validation s'obtient par des preuves sous forme de démonstration. Il souligne que rationalité et raisonnement se trouvent côte à côte, plus exactement tous les deux surplombent ces derniers.

La mobilisation d'une rationalité suppose la production, donc des connaissances non contradictoires. Cependant, un sujet pourrait rencontrer « un conflit de rationalité », c'est-à-dire que le sujet se rend compte de l'existence d'une contradiction. Ces conflits qui déstabilisent le sujet apprenant permettent le passage d'un type de rationalité à un autre.

Étant donné que la rationalité est une qualité du raisonnement, il nous semble que le recours à la rationalité nous permet d'aborder certaines difficultés des étudiants liées, soit à des obstacles épistémologiques, soit à des choix didactiques, et nous permet de classer, par la suite, certains conflits cognitifs. Dans ce même ordre d'idées, Brousseau et Gibel (2005) soulignent qu'un raisonnement faux n'est pas toujours dû à une erreur ou une insuffisance du sujet. Lecorre (2016) précise que « Selon Sierpinska, un obstacle est lié à une conviction profonde, à un sentiment d'une vérité évidente, au sentiment que ce qu'on sait sur une question fondamentale est le seul savoir possible » (p. 154). Ici, lorsqu'on demande à l'étudiant de réfléchir à la définition formelle, il nous paraît que ses images intuitives de la masse ponctuelle créent des obstacles. Par ailleurs, Legrand (1990) souligne que l'obstacle rencontré dans l'enseignement de l'intégrale n'est pas tout à fait didactique, mais il est plutôt de nature épistémologique. Il suppose que l'acquisition de l'intégrale par les étudiants correspond à un saut épistémologique. Il existe d'autres causes qui pourraient le produire. Pour ces raisons, nous avons ajouté une ligne, qui identifie les types de rationalité, au modèle complété par Lalaude-Labayle (2016). Nous avons enrichi les cases du tableau par des critères liés au concept d'intégrale. Le tableau ci-dessous résume le modèle d'analyse qu'on a adopté :

Tableau 2. Adaptation du modèle de Bloch et Gibel (2011) pour analyser des interventions des étudiants dans le cas de la notion d'intégrale

	Milieu M-2	**Milieu M-1**	**Milieu M0**
Fonctions des raisonnements	R1.1 SEM - Choix du contexte (physique, mathématique). - Décision de transformation de l'énoncé (registre sémiotique), de conversion entre registres - Décision de choisir une conception particulière (primitive, mesure d'une grandeur pour le contexte mathématique et la mise en équation pour le contexte physique). - Décision de calcul.	R1.2 SYN/SEM - Calculs génériques. - Formulation de conjectures étayées - Décision sur un objet mathématique.	R1.3 SYN En lien avec l'enseignant : - Organiser les signes pour obtenir un objet calculable. - Formulation et certification de validations, de preuves. - Formalisation des preuves dans la théorie mathématique requise.

	- Moyen heuristique. - Exhibition d'un exemple ou d'un contre-exemple.		
Niveaux d'utilisation des signes	R2.1 SEM Icônes ou indices dépendant du contexte (schémas, intuition), (procédure simple, modèle ponctuel $f(x) \times x\ldots$).	R2.2 SYNT/SEM Arguments locaux, génériques, opératoires : indices, calculs, modèle local $f(x_i) \times \Delta x$.	R2.3 SYNT Arguments formels spécifiques du domaine mathématique de la situation, modèle global $f(x_i) \times dx$.
Usage et actualisation du répertoire	R3.1 SYNT/SEM - Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes. - Enrichissement au niveau heuristique : calculs, connaissances ponctuelles (modèle de base, raisonnement ponctuel).	R3.2 SYNT/SEM - Enrichissement au niveau argumentaire : - des énoncés; - du système organisateur (modèle local, raisonnement covariationnel simple).	R3.3 SYNT - Formulation des preuves. - Introduction d'ostensifs organisés. - Intégrations des éléments théoriques du domaine maths (raisonnement covariationnel complexe.
Type de raisonnement	R4.1 FORMES Déductif, inductif, abductif	R4.2 FORMES Déductif, inductif	R4.3 FORMES Déductif
Types de rationalités	R5.1 Rationalité Pragmatique, empirique, théorique	R5.2 Rationalité Empirique, théorique	R5.3 Rationalité Théorique

Nous entendons par SEM le mot sémantique et par SYN le mot syntaxique.

La situation a été proposée en février 2020 à un groupe d'étudiants inscrits en première année préparatoire de filière Maths-physique (MP) à l'Institut préparatoire aux écoles d'ingénieurs de Tunis (IPEIT). Nous soulignons que ces étudiants ont tous eu un bac « section Maths ». Dix-huit étudiants ont participé à l'expérimentation. Le déroulement de la séance a été enregistré sur dictaphone, puis retranscrit.

Avant de proposer la situation en classe, nous avons discuté avec l'enseignante du déroulement prévu pendant deux mois à raison de deux heures par semaine afin qu'elle se convainque de la pertinence de la situation et de son utilité pour confronter les étudiants à la problématique de l'intégrale. La situation lui semble nouvelle et présente le risque qu'elle ne soit pas facilement acceptée par les étudiants. Après ces discussions, nous nous sommes mis d'accord sur le fait que l'expérimentation se déroulerait en une seule séance de deux heures et demie en raison de la surcharge qu'elle impose au programme. Nous avons discuté des scénarios possibles et de la façon dont elle pourrait gérer la situation en cas de bifurcation ou dans le cas où les étudiants penseraient à d'autres stratégies qui ne font pas partie des objectifs envisagés, comme la recherche d'une primitive.

Notons également que des modifications mineures ont été effectuées sur les interventions des étudiants, et parfois sur celles de l'enseignante, pour en faciliter la lecture. Par exemple, les mots en arabe ont été traduits en français et la construction de quelques phrases a été revue. Cependant, nous avons renoncé à ce type de rectification chaque fois qu'on a senti qu'il pourrait altérer le contenu de l'intervention.

Le problème consiste donc à chercher la valeur de la force d'attraction gravitationnelle exercée par un barreau homogène de longueur défini sur une masse ponctuelle située dans son prolongement à une distance donnée. Il a été proposé pour la première fois, comme une situation fondamentale pour l'introduction de l'intégrale de Riemann en 1985 par une équipe de recherche à l'Université de Grenoble (Grenier et al., 1986). L'objectif de la situation est de mettre les étudiants face à un problème dont la résolution nécessite le recours à un processus d'approximation des produits infinitésimaux. La valeur de l'intensité du phénomène physique, qui est à la base du problème proposé, ne peut s'obtenir qu'à l'issue d'une procédure intégrale (Rogalski et al., 2001). L'organisation de la situation repose sur une structuration très fine du milieu didactique et permet de prévoir ce que les étudiants peuvent concevoir et proposer à partir des raisonnements naturels que la situation leur inspire : on imagine les décisions qu'ils allaient pouvoir prendre seuls, sans être plus ou moins discrètement invités, poussés, contraints par l'enseignant à aller dans le sens du savoir institutionnel visé par l'étude. La situation est connue sous le nom de « la situation du barreau » (figure 1).

> Connaissant la loi d'attraction de deux masses ponctuelles $\mathbf{m}$ et $\mathbf{M}$: $\mathbf{F} = \mathbf{mMG}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}^{\mathbf{2}}}\boldsymbol{dr}$, déterminer la force exercée par un barreau homogène de longueur L = 6m et de masse M = 18 kg sur une masse ponctuelle de masse m = 2 kg située en son prolongement à une distance l = 3 m.

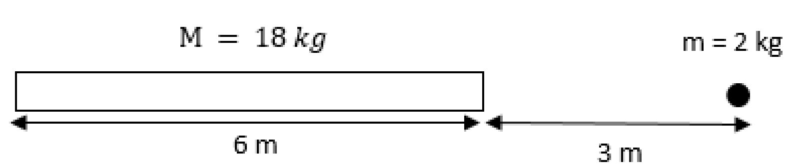


Figure 1. La situation du barreau

Nous avons envisagé que la situation se compose de trois phases. Dans la première phase, on s'attendait à ce que les étudiants procèdent en appliquant la procédure ponctuelle « simple produit » en concentrant la masse du barreau en son centre de gravité comme le montre la figure 2 ci-dessous.

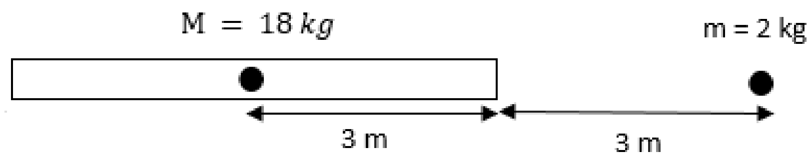


Figure 2. Exemple de procédure ponctuelle « simple produit »

Les étudiants passent du contexte physique dans lequel la situation est proposée au contexte mathématique. Ensuite, dans l'étape suivante, on s'attendait à ce qu'ils effectuent le produit de $f(r_i)$ par Δr. Ici, les étudiants devraient être capables de comprendre la signification de chaque facteur de cette étape produit, ainsi que la façon dont ces facteurs contribuent au produit. Les difficultés dans cette étape ne sont pas nécessairement liées à l'opération de multiplication et à l'exécution du calcul, mais elles sont généralement liées à la compréhension de la façon dont le produit est formé et à la façon d'utiliser chaque facteur au sein du produit.

La deuxième phase de l'expérimentation a trait à l'étape de la somme. La force cherchée est la somme des forces partielles sur chaque partie découpée du barreau. Bien que les étudiants ne l'aient probablement jamais exprimé explicitement, ils devraient nécessairement savoir que le domaine en jeu (constitué de la longueur du barreau et de la distance qui le sépare de la masse ponctuelle) est une réunion de ses parties (les petits morceaux obtenus après le découpage, voir figure 3).

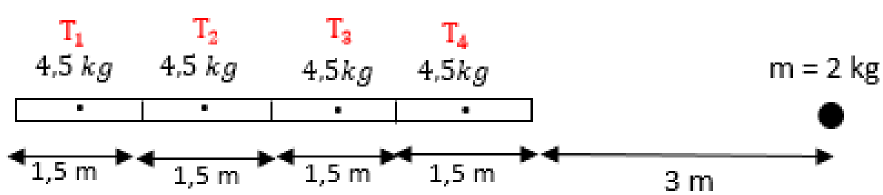


Figure 3. Réunion des parties du domaine en jeu

Cela pourrait être implicitement reconnu par leur confort avec l'idée de décomposer le domaine en différentes partitions, puis d'obtenir les sommes à partir des forces partielles. Pour la formule de la distance, il devrait être évident pour les étudiants que la distance totale est égale à la somme des parties de toutes les plus petites distances. Cependant, il ne sera peut-être pas aussi facile pour eux de comprendre que la force exercée par le barreau sur la masse ponctuelle pouvait être décomposée en forces partielles, en raison de leur méconnaissance du phénomène physique qu'ils sont en train de manipuler.

La troisième phase est basée sur l'encadrement de forces partielles. Les étudiants devraient appliquer le principe de somme sur les minorants d'une part, et sur les majorants des fonctions partielles d'autre part. Ils obtiendraient un encadrement de F par des sommes inférieures et des sommes supérieures. En passant à la limite, ils remarqueraient que les deux encadrements convergent vers la même valeur. Ainsi, ils obtiendraient la valeur cherchée. Lorsque les étudiants discuteraient, entre eux ou avec l'enseignant, la façon de trouver une meilleure approximation pour une intégrale donnée, ils travailleraient alors au sein de l'étape limite et participeraient au processus d'obtention d'approximations qui sont progressivement plus proches de la valeur de l'intégrale définie. La traduction de tout ce débat en un langage formel, par l'enseignant, sollicite un passage du mode sémantique au mode syntaxique.

4. Analyse a priori

Lorsque la situation est proposée à des étudiants qui n'ont pas tous l'idée qu'il s'agit de la notion d'intégrale, la première réaction attendue, après un temps de réflexion, est qu'ils remplacent le barreau par son centre de gravité, situé en son milieu en y concentrant toute sa masse, et ils déduisent alors que la valeur de la force $\mathrm{F} = \frac{\mathrm{Mm}}{\mathrm{r}^2}\mathrm{G} = \frac{18\times 2}{36}\mathrm{G} = \mathrm{G}$.

Le recours au principe du centre de gravité place les étudiants dans une rationalité pragmatique et c'est une position confortable dans laquelle ils peuvent chercher ce qui leur apparaît a priori pertinent et valide, et fait partie de leur expérience personnelle. Ensuite, chacun devrait présenter à la classe ses idées et conjectures qu'il a d'abord élaborées seul ou avec les autres, en adoptant une forme d'expression telle que le groupe complet puisse s'en saisir comme d'une idée générale qui pourrait, après étude collective, s'insérer dans la théorie de la classe. Legrand (1990) appelle ces échanges en classe le débat scientifique qui consiste à proposer au tableau un problème que les étudiants peuvent résoudre avec leurs seules connaissances antérieures. Ensuite, après un temps de réflexion, ils proposent leurs conjectures. Puis, l'enseignant organise un débat pour voir la position des étudiants face à ce qui est exposé. Enfin, il effectue la synthèse des résultats obtenus et institutionnalise ce qui devrait être retenu.

Dans cette étape, le problème est situé dans un contexte physique. Le recours au principe du centre de gravité est une utilisation ponctuelle des connaissances anciennes qui se base sur la procédure ponctuelle « simple produit » et qui fonctionne comme une icône. La validation est basée sur des cas concrets ce qui sollicite une rationalité pragmatique.

Quelqu'un pourrait constater que la force obtenue à la suite du découpage en deux est différente de la force initiale, ce qui contredit le principe du centre de gravité. Dans ce cas, l'enseignant invite chaque étudiant à exercer un travail de preuve et de réfutation scientifique sur cette idée initialement portée par cet étudiant; de cette façon cette idée devient, pendant le temps de la résolution de la conjecture énoncée, la propriété intellectuelle de toute la classe : interroger son éventuelle ambiguïté, lui trouver un contre-exemple ou l'arranger pour qu'on puisse montrer qu'il ne peut y en avoir. Cette étape de la situation fait déplacer la classe d'une rationalité pragmatique à une rationalité empirique de type réfutationniste. Il faut souligner, si aucun étudiant n'en fait le constat, que le découpage sera alors proposé par l'enseignant.

La difficulté attendue est au niveau du caractère variable de la distance qui sépare le point d'application de la force d'attraction ponctuelle et la masse ponctuelle. Nous nous attendons à ce que la majorité des étudiants ne puissent pas arriver à voir que la distance est variable et saisir la contradiction pointée avec l'hypothèse initiale qui suppose qu'il s'agit d'une force d'attraction entre deux quantités constantes. Cette difficulté pourrait constituer un obstacle crucial que les étudiants devraient dépasser à l'aide des interventions de l'enseignant. Dans cette même perspective, Bloch (1999) souligne que le rôle de l'enseignant est « de gérer de véritables interactions entre connaissances des élèves, critères mathématiques reconnus, connaissances mathématiques de l'enseignant, et le milieu support de la situation » (p. 167). Il devrait investir le conflit sur le caractère variable de la distance pour structurer un débat en classe, et c'est à l'aide de ce débat que les étudiants seront capables d'évoluer dans les niveaux du milieu de la situation. En fait, l'enseignant est la seule personne qui possède les connaissances épistémologiques qui permettent d'assumer cette position. Chaque étudiant doit donc tenter de formuler ses idées propres en termes de conjectures. Il appartient alors à l'enseignant de voir comment ordonner le traitement collectif de ces propositions initialement individuelles pour que le débat sur chaque idée puisse apporter un éclairage (souvent décisif) dans la compréhension de la situation. Par ce choix d'introduction des idées personnelles, les idées fortes qui émergent ici et là ne sont plus mises de côté, elles suscitent un fort débat, alors que les idées informulables dans une certaine rationalité indiquent d'elles-mêmes à leurs auteurs qu'ils doivent trouver une autre façon de les exprimer.

Dès que les étudiants se rendent compte qu'il ne s'agit pas de la stratégie du centre de gravité, ils se trouvent face à un blocage. La première phase de la situation permet d'établir (a priori) la première étape de la procédure intégrale : $f(x) \times \Delta x$. Or, cette formule ne s'applique qu'à des situations dans lesquelles les deux grandeurs, qui constituent la relation multiplicative, sont constantes. Cela amène implicitement l'idée de décomposer le barreau en plusieurs morceaux, puis à appliquer à chaque morceau la relation multiplicative localement pour enfin calculer à chaque nombre de découpages la somme correspondante.

Après la mise en place de la procédure de somme, les étudiants seront amenés à procéder à des encadrements de plus en plus fins. Pour ce faire, il s’agit de :

1) mettre à leur disposition les matériaux nécessaires leur permettant de procéder à un calcul simple et rapide de ces termes;
2) les amener à se rendre compte de l’efficacité des sommes construites pour encadrer la valeur de la force d’attraction entre deux sommes inférieures et supérieures en considérant la distance r aussi petite que l’on veut.

Ici, dans la situation du barreau, un détour s’impose peu à peu de façon adidactique : comme sur chacune des parties on peut facilement majorer et minorer ce qui peut advenir sur la partie entière, il se peut qu’en diminuant ces parties, non seulement les encadrements locaux, mais aussi leur somme se resserrent au point de faire apparaître une valeur limite de ces sommes qui devient par construction l’évaluation exacte de la grandeur recherchée.

L’obstacle que les étudiants peuvent rencontrer à cette étape est la ponctualisation des morceaux découpés du barreau (Legrand, 1990; Rogalski et al., 2001; Decroix et Rogalski, 2013; Rogalski, 2018). Comment les étudiants vont-ils saisir cette idée? Tout d’abord, il faut se rappeler de la masse ponctuelle de 2 kg qui pourrait s’imposer fortement et faire obstacle chez quelques étudiants à l’acceptation du découpage à l’infini. Ensuite, si on accepte que la masse ponctuelle soit de 2 kg, le découpage en 9 va amener de la même façon à avoir des petits barreaux dont chacun a une masse 2 kg. En fait, l’augmentation du nombre de découpages est un exemple de réflexion sur la limite en termes de meilleure approximation. Cet obstacle nous amène à penser au dernier obstacle que pourraient rencontrer les étudiants : comment faire la somme des quantités de l’ordre infinitésimal; la somme de quantités presque nulles?

En fait, l’obstacle central que l’intégration doit surmonter est la ponctualisation du barreau, c’est-à-dire comment rendre le barreau comme un ensemble de points alignés. Ici, il faut placer les étudiants dans une position où ils peuvent chercher ce qui leur apparaît a priori pertinent et valide dans une rationalité pragmatique. Ensuite, ils auront à présenter à la communauté classe les idées personnelles qu’ils ont d’abord élaborées seuls ou avec quelques pairs, en adoptant une forme d’expression telle que le groupe complet puisse s’en saisir comme d’une idée générale qui pourrait, après étude collective, s’insérer dans la théorie de la classe.

L’obstacle didactique majeur que nous nous attendons de rencontrer dans les débats spontanés que l’enseignant suscitera au cours de ces phases adidactiques, c’est qu’en réalité, dans un vrai débat de classe, ce n’est pas la classe tout entière qui voit arriver les interventions critiques qui fusent ici ou là. Elles contiennent en germe ce que le recours à une rationalité théorique pourra faire fructifier si on se donne les moyens intellectuels de prendre conscience des multiples imprécisions/contradictions que contiennent ces propositions « spontanées » qui s’expriment le plus souvent en langage courant.

Nous nous attendons à ce que lorsque l’enseignant donne la parole aux étudiants, pour qu’ils énoncent ce qu’ils conçoivent dans leur rationalité propre, seules quelques interventions critiques apparaissent parmi les propositions plus ou moins pertinentes qui arrivent dans le désordre. Ces interventions « à remarquer » indiquent clairement que leurs auteurs sont en train de buter sur le ou les obstacles épistémologiques qui caractérisent le savoir visé : le problème c’est que la force change avec la distance (Legrand, 1990; Rogalski et al., 2001; Decroix et Rogalski, 2013; Rogalski, 2018).

En fait, pour réussir à provoquer la rencontre avec ces obstacles épistémologiques, on a discuté avec l’enseignante du fait qu’elle va devoir affronter l’obstacle didactique majeur : faire apparaître in vivo dans une rationalité théorique ce qui est au cœur des formulations « naïves » des étudiants. On mise donc ici sur le fait que par une analyse a priori adaptée au savoir étudié, l’étudiant sera amené à ressentir la nécessité d’effectuer les sauts cognitifs souhaités, devra se rapprocher des changements de rationalité attendus : passage du pragmatique à l’empirique, puis au théorique. Ces transitions seront ensuite reprises et institutionnalisées par l’enseignant qui y reviendra en cours pour les clarifier dans les séances qui suivent.

5. Analyse a posteriori

La composition de la structure de l’intégrale dans le cadre de cette situation avait le potentiel d’approfondir la compréhension des étudiants de la signification des différentiels, des intégrales définies et, dans une certaine mesure, de la somme de Riemann au-delà de ce qui a été vu dans l’approche d’enseignement usuel. Cependant, il faut souligner que la signification de la différentielle dx est un peu ambiguë : elle a été interprétée de plusieurs manières par les étudiants. La perspective ici, qui est cohérente avec les applications en physique et dans d'autres domaines, est que dx est défini comme un changement infinitésimal de la quantité x, semblable à la limite du changement de x pour les produits dans une somme de Riemann $\Delta x = \frac{b-a}{n}$; ($dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}$). La différentielle représente ainsi pour eux une quantité infinitésimale ou «un changement infinitésimal d'une quantité physique».

La démarche dans laquelle le processus de conceptualisation est ancré, le partage de responsabilité, la part confiée aux étudiants au cours de la séance et le débat établi constituent des observables qui permettent une entrée adéquate à notre analyse. En plus de ces observables, nous développons nos réflexions suivant d'autres indicateurs dans une perspective d'analyse multidimensionnelle.

Au cours de l'expérimentation, nous avons remarqué que les étudiants possèdent des images intuitives, de la différentielle dx, basées sur des métaphores spécifiques et que ces images intuitives peuvent devenir un obstacle à l'accès au niveau formel tel que, par exemple, les deux interventions suivantes :

> 165 Dhia : On peut considérer la tige comme si elle est un ensemble de points (masses ponctuelles)
>
> 230 Marouene : Moi j'ai fait ce choix parce que les morceaux de la tige vont être assimilés à des points matériels. On aura neuf points et on fait la somme, on trouve la valeur exacte. [Il fait un petit intervalle entre son pouce et son index sur le schéma du barreau au tableau]

Nous entendons par « métaphore » le mécanisme par lequel un concept abstrait est interprété en termes d'objets réels. Conceptuellement, la métaphore nous permet de raisonner sur un type d'objet comme s'il en était un autre. Ainsi, une métaphore n'est pas seulement une expression linguistique mais aussi un mécanisme de pensée, mais elle peut être complètement inappropriée quand, pour le physicien – et pour les étudiants – l'intégrale est de la forme $0 \times \infty$ ($dx = 0$ et les sommes de Riemann sont en nombre « infinie »).

Parmi les échanges en classe, nous avons choisi les quelques extraits suivants.

5.1 Premier extrait

Le premier extrait relève de la première phase où il s'agit de développer la relation multiplicative et de l'appliquer localement : $f(x)\Delta x$. Les étudiants évoquent un raisonnement qui traduit la mise en perspective de deux niveaux de milieu : le milieu de référence (cadre numérique dans lequel la conjecture a été produite) et le milieu objectif, constitué des figures, qui constitue le cadre géométrique : (R1.2), (R1.2), (R2.2) (Bloch et Gibel, 2011, p. 29). Il s'agit du début de l'entrée au niveau M0. C'est un raisonnement correspondant à la formulation d'une preuve.

> 78 Hedi : La distance n'est pas toujours la même.
>
> 79 Marouene : On ne peut pas calculer la force parce qu'on ne connaît pas la distance. On connaît F, on connaît la distance entre l'extrémité droite du barreau et la masse ponctuelle qui est 3 m, mais la longueur du barreau qu'on va considérer est inconnue.

80 P[4] : Comment on va s'en sortir?

92 Chahd : On ne peut pas calculer exactement cette force!

93 P : Pourquoi tu ne peux pas la calculer?

94 Chahd : Parce que chaque point du barreau correspond à une valeur bien déterminée.

95 Dhia : On va arriver à l'intégrale[5]. On va faire des sommes.

96 Sana : Mais non, qu'est-ce que tu viens de dire? L'idée, c'est clair! C'est pour cela qu'on doit appliquer le centre de gravité.

97 Chahd : Peut-être! Je ne sais pas. Bon, on applique le centre de gravité.

98 P : Que pensez-vous?

Tableau 3. Analyse du premier extrait

Nature et fonction/milieu	Signes et répertoire	FR/TR*
M-1 : Décision sur un objet physique (R2.1). Formulation de conjectures étayées (R2.1). L'enseignante demande une décision du reste de la classe à propos des interventions de Chahd et Sana.	Enrichissement du système organisateur au niveau argumentaire : Sana semble transposer le problème de la force d'attraction de deux masses ponctuelles à la situation proposée et elle en déduit qu'il s'agit du centre de gravité; c'est une intervention de nature sémantique (R2.2). De même pour Chahd.	Le raisonnement prend la forme déductive. Le raisonnement de Sana se base sur un cas concret : le barreau est assimilé à une masse ponctuelle. De même que pour Chahd, elle prend sa décision parce que son camarade a pris la même : il s'agit d'un raisonnement abductif qui mobilise une rationalité pragmatique.

*FR/TR : Forme de raisonnement/type de rationalité dans ce tableau et dans la suite.

Hedi évoque un indice très important : la distance change! C'est une intervention cruciale sur l'obstacle qui justifie la création du concept d'intégrale, mais qui va rester privée, excepté pour Chahd et peut-être pour d'autres. Marouene partage le même problème sur la valeur de la distance à considérer.

L'intervention de l'enseignante (98 P) ne semble pas mesurer l'importance épistémique de ce qui est en jeu. Elle aurait dû établir un débat à propos de l'idée de Marouene et demander plus de clarifications. Elle aurait également dû proposer à la classe de s'arrêter dans la recherche d'autres idées pour se concentrer sur une

[4] Nous soulignons que P, dans tous les extraits choisis, renvoie au professeur.

[5] Il est à noter qu'en classe terminale, les élèves de la section Maths ont vu le chapitre d'intégrale définie qui est introduit à partir de la notion de primitive et qu'ils ont rencontré la méthode de rectangles comme une technique pour approcher ce type d'intégrale.

idée précise. Elle aurait invité le groupe (la classe) à valider telle ou telle conjecture, par exemple, elle aurait invité chacun à exercer un travail de preuve et de réfutation scientifique sur une idée initialement portée par un étudiant seul; de cette façon cette idée devient pendant le temps de la résolution de la conjecture énoncée la propriété intellectuelle de tous : interroger son éventuelle ambiguïté, lui trouver un contre-exemple ou l'arranger pour qu'on puisse montrer qu'il ne peut y en avoir. Mais, sans raison apparente, elle change de problème.

5.2 Deuxième extrait

99 Marouene : F = G.

100 P : Tout le monde est d'accord avec ce résultat? Y-a-t-il d'autres propositions?

101 Slim : Oui.

Tableau 4. Analyse du deuxième extrait

Nature et fonction/milieu	Signes et répertoire	FR/TR
M-1 : La réponse de Marouene est attendue pour cette étape de l'expérimentation. L'enseignante s'interroge sur la valeur proposée afin de mettre la classe d'accord sur un seul résultat. La réponse de Slim est prise comme une décision collective de toute la classe.	L'enseignante veut mettre toute la classe au même niveau de connaissances pour qu'elle puisse passer à l'étape suivante sans difficulté : les réponses des étudiants sont conformes à ses attentes.	La décision de Marouene est faite suite à un cas concret : il s'agit d'un raisonnement abductif qui mobilise une rationalité pragmatique.

Dans la réalité d'une classe, ceux qui voient, entendent et remarquent ce qui a une réelle consistance épistémologique dans ces diverses propositions d'apparence semblable ne constituent pas l'ensemble des étudiants, mais seulement quelques sujets épistémiques en avance, ou décalés par rapport au groupe. Ils ne sont d'ailleurs pas forcément très conscients du degré de profondeur en termes de pertinence et de contradiction potentielle que contient leur idée propre ou celle de leur pair. En fait, seule l'enseignante possède les connaissances épistémologiques qui permettent d'avoir rapidement cette perception. L'enseignante aurait dû établir un débat à propos de l'idée de Marouene et demander plus de clarifications. Il nous semble qu'elle a été prisonnière de la position adidactique qu'elle devrait occuper (selon les consignes qu'on lui a données) et qui lui interdit d'intervenir sur le fond dans le débat : comment ne pas orienter très fortement le débat s'il fait systématiquement ressortir les endroits où il y a matière à réfléchir très fort ensemble? C'est à ce niveau, ainsi que le dit Legrand (1990), que l'instauration d'une communauté scientifique classe pourra jouer un rôle didactique décisif dans la pratique de ces débats spontanés. Dans un tel apprentissage des théories et des techniques, les techniques peuvent alors devenir en conscience l'opérationnalisation d'un traitement rationnel de la réalité.

5.3 Troisième extrait

> 165 Dhia : On peut considérer la tige comme si elle est un ensemble de points (masses ponctuelles). Chaque point du barreau possède une masse ponctuelle qui va exercer une force sur la masse m. La force qu'on cherche est la somme des forces élémentaires exercées par chaque point du barreau sur la masse ponctuelle.
>
> 166 P : Tu passes au tableau et tu nous expliques ton idée.
>
> 167 Dhia : c'est comme si on a coupé le barreau initial en une infinité de barreaux très petits. On fait la même chose que la situation initiale avec chaque petit barreau : la masse est distribuée uniformément. Donc, chaque petit barreau possède une masse M divisée par le nombre total des barreaux.

Tableau 5. Analyse du troisième extrait

Nature et fonction/milieu	Signes et répertoire	FR/TR
M-1 : Début de l'entrée M0. Raisonnement correspondant à la formulation d'une preuve. Dhia comprend qu'à chaque point du barreau correspond une distance et que la masse est distribuée uniformément. La valeur de F est la somme totale des valeurs partielles : émergence du modèle global.	Raisonnement qui traduit la mise en perspective de deux niveaux de milieu : le milieu de référence (cadre numérique dans lequel la conjecture a été produite) et le milieu objectif, constitué des figures, qui constitue le cadre géométrique : (R1.2), (R2.2) (Bloch et Gibel, 2011, p. 29).	Raisonnement inductif / rationalité empirique. L'interprétation l'identifie à une déduction avec une conséquence nécessaire.

Au début, Dhia a commencé à parler de « la somme des forces élémentaires », ce qui montre qu'il s'est rendu compte que la force totale est la somme de petites forces. Un intérêt particulier à cet extrait est qu'il y a deux types de phrases qui émergent dans la réponse : la force à chaque point et la force ponctuelle ou élémentaire. L'étudiant a utilisé les deux phrases de manière réciproque dans son intervention lorsqu'il explique sa conception pour la notion de différentielle, et il nous semble qu'il n'est pas conscient que les deux phrases comportent deux idées différentes. La force à chaque point signifie l'ensemble de forces situées sur chaque position du barreau, tandis que la force élémentaire ou ponctuelle consiste à considérer une certaine quantité du barreau comme une quantité ponctuelle sans aucune taille physique et qui exerce une force sur la masse ponctuelle initiale.

Nous avons également remarqué que les étudiants utilisent souvent les expressions « un ensemble de masse ponctuelle » et « chaque point du barreau ». Il semble que les étudiants aient lié les deux termes au terme différentiel dm, ce qui nous permet de dire qu'ils pensent que dm représente une petite quantité de masse avec une taille physique négligeable. Il faut souligner qu'en physique, lorsque la taille d'un objet peut être négligée par rapport à la distance au point de référence, l'objet est souvent considéré comme un point pour des raisons de simplicité (Rogalski et al., 2001; Decroix et Rogalski, 2013; Rogalski, 2018). Par exemple, en mécanique newtonienne, nous utilisons souvent un point pour représenter l'objet et dessiner les forces agissant sur ce point : la loi de Newton, qui définit la force électrostatique entre deux masses ponctuelles. Ainsi, nous concluons que les étudiants ont utilisé la notion de masse ponctuelle de deux manières différentes : le terme différentiel dx est vu comme un emplacement géométrique dans l'espace et dm représente une petite quantité du barreau avec des dimensions physiques négligeables. Or, lorsqu'ils considèrent l'objet comme composé de points, ils ne parviennent pas souvent à relier ces points aux dimensions physiques. Lorsqu'ils parlent de la masse à chaque point, les étudiants semblent relier la masse en un point au rapport entre la masse totale et la longueur du barreau. En fait, il y a des étudiants qui considèrent les objets physiques comme un ensemble de points séparés (discontinus). En mathématiques, les différentielles telles que le différentiel dx portent la signification d'une quantité infinitésimale. Pour construire le processus qui amène à concevoir des quantités infinitésimales, l'étudiant considère les quantités différentielles comme un point sur une ligne droite.

Les étudiants ont découpé le barreau en petits barreaux, puis ils ont cherché la force élémentaire exercée par chaque barreau sur la masse ponctuelle. En considérant la longueur totale du barreau comme composée de très petits segments, les étudiants ont pu construire des rapports des termes différentiels ou infinitésimaux pour le barreau ainsi pour la masse du barreau : $\mathrm{dm} = \mathrm{M/L}$.

L'idée fondamentale de l'intégration consiste à découper l'objet initial en petits morceaux, puis à appliquer la somme. Les petits morceaux correspondent aux constructions géométriques et physiques de l'objet. La considération géométrique fait référence au fait que les morceaux découpés sont constitués par les mêmes grandeurs que l'objet initial : une ligne est coupée en petits segments, une surface est coupée en petites surfaces. L'utilisation de la notion de petite quantité et de métaphore d'objet a aidé les étudiants à construire la notion de différentielle en termes de choses concrètes avec lesquelles ils ont une expérience directe. L'aspect physique détermine comment l'objet doit être découpé. Cela a conduit les étudiants à donner un sens aux mathématiques dans des scénarios physiques.

L'étudiant utilise des barreaux infiniment petits pour évoquer la notion de différentielle. Hu (2010) appelle cette conception pour les différentielles la conception de petites quantités.

Cette conception de petites quantités fonctionne comme une icône. Elle décrit la transformation de la notion de différentielle d'un objet concret dans le contexte initial (l'expérience physique) au contexte mathématique abstrait. Ici, l'étudiant considère le petit segment découpé comme un différentiel dx. Il associe la notion de différentiel à une petite quantité d'une quantité physique beaucoup plus grande.

5.4 Quatrième extrait

170 P : Mais en fait, un point c'est que F. Newton, qu'est-ce qu'il veut dire par ce F-là, c'est-à-dire la distance sur quel ensemble? D'après-vous, la distance… ponctuelle … entre deux points…. Ce n'est pas la distance entre point et droite…

171 Dhia : C'est l'idée que j'avais déjà dite tout à l'heure ! C'est comme si on a divisé le barreau initial en une infinité de barreaux très petits. On fait la même chose que la situation initiale avec chaque petit barreau : la masse est distribuée uniformément, donc chaque petit barreau possède une masse M divisée par le nombre total des barreaux.

172 P : Maintenant, si vous comparez les valeurs trouvées pour le barreau entier, puis découpé en deux, puis en quatre. Qu'est-ce que vous remarquez?

173 Sana : Plus le découpage est grand, plus la force est grande. [Il faut noter que l'étudiant veut dire que plus on découpe le barreau, plus la valeur de la force augmente].

174 Dhia : La force $F_1 \leq F_2 \leq F_3$.

175 P : Donc, qu'est-ce qu'on va faire?

176 Dhia : On va chercher un encadrement.

Tableau 6. Analyse du quatrième extrait choisi

Nature et fonction/milieu	Signes et répertoire	FR/TR
M-2 : Il s'agit du calcul générique qui sera par la suite généralisé. Exhibition d'un exemple par Dhia (174).	Enrichissement au niveau heuristique (R3.1). L'intervention de Sana est de type sémantique.	Manipulation des cas concrets. Il y a un arrangement de preuves de nature physique : il s'agit d'un pragmatisme mobilisé par une abduction.

L'intervention de Dhia (171) représente l'approche de l'obstacle central que l'intégrale doit surmonter. La manipulation des cas concrets aide à déterminer des propriétés spécifiques, comme le souligne Lecorre (2016). Ici, il s'agit d'une correspondance avec le milieu objectif. Nous sommes dans le mode sémantique.

Du point de vue des fonctions des raisonnements : l'intervention de Sana correspond à une formulation de conjectures étayées (R1,2). En fait, il y a de l'ordre de l'évidence physique comme dans le mot « grand » ainsi que le dit Lecorre (2016). Il s'agit d'une rationalité pragmatique. La réponse de Dhia (176) à la question de l'enseignante propose la nouvelle règle que les étudiants doivent suivre : la recherche des encadrements est le meilleur choix dans cette étape de situation.

5.5 Cinquième extrait

> 212 Tarek : Si on découpe la tige en n parties, on aura la valeur exacte. Chaque partie devient infiniment petite et on peut appliquer le principe du centre de gravité.
>
> 213 P : Oui, c'est une bonne idée, on découpe infiniment petit. On va tendre vers l'infini et la masse sera ponctuelle.

Tableau 7. Analyse du cinquième extrait

Nature et fonction/milieu	Signes et répertoire	FR/TR
M-1 : L'idée de Tarek est idoine. L'enseignante la reformule avec le vocabulaire convenable.	L'intervention de Tarek s'appuie sur des représentations sémantiques pour mettre en œuvre le processus d'approximation dont il a besoin. L'enseignante profite de ces déclarations pour faire émerger le raisonnement syntaxique dont elle a besoin. L'enseignante a la volonté de modifier le système organisateur des étudiants relatif à l'intégrale définie (Bloch et al. 2007) : niveau R2.3	

Bloch (1999) précise que l'enseignant observe les actions des sujets apprenants afin d'anticiper les interventions qu'il devra faire. Cette position lui permet d'intervenir dans le débat, non pour prendre parti et pousser discrètement la classe vers sa solution, mais pour faire en sorte que les points de vue les plus décisifs (vrai/faux, pertinent ou non) qui font barrage à l'entrée dans la problématique scientifique visée servent au contraire à devenir des points de passage/d'introduction vers ce que tout le monde doit pouvoir prendre en compte (par exemple, faire la conjecture que tout morceau de barreau de 2 kg peut être traité comme une masse ponctuelle). L'essentiel est que ces propositions critiques ne se perdent pas, ne soient pas seulement traitées comme une remarque surprenante/gênante d'un sujet épistémique particulier qu'on ne veut ni encourager ni décourager, comme une idée sans importance qui risque alors d'être discrètement balayée et étouffée dans la discussion par l'arrivée d'autres remarques moins dérangeantes. Pour que ces idées cruciales puissent être débattues et fassent évoluer la rationalité du groupe (la classe), il doit donc exister une sorte d'exigence coutumière qui consiste à tenter de ne pas rester trop vague et imprécis sur la thèse qu'on semble défendre (sinon, à partir des mêmes raisons, chacun pourra in fine adopter sur chaque thèse un point de vue ou le point de vue contraire).

5.6 Sixième extrait

> 205 Marouene : Pourquoi on ne découpe pas la tige en neuf parties égales? Chaque partie de la tige aura une masse de 2 kg, elle représente un point matériel et la longueur de chaque partie est $\frac{6}{9}$ de la longueur du barreau. Puis, on calcule la distance entre chaque partie de la tige et la masse ponctuelle m. Après, on calcule la force d'attraction de chaque partie en se basant sur le principe du centre de gravité et on fait la somme on trouve la valeur de F.
>
> 206 P : Pourquoi précisément neuf?
>
> 207 Marouene : Après le découpage en neuf, chaque partie possède une masse de 2 kg qui est supposée, dès le début, être comme une masse ponctuelle !
>
> 208 P : Mais la masse de chaque partie du barreau n'est pas ponctuelle pour 9!
>
> 209 Marouene : Si on découpe en neuf parties, chaque morceau aura une masse de 2 kg qui est une masse ponctuelle.
>
> 210 Sana : Il a voulu la rendre égale à m, la masse ponctuelle!
>
> 211 Marouene : Oui, par rapport à la masse m, ils ont la même masse!

Tableau 8. Analyse du sixième extrait

Nature et fonction/milieu	Signes et répertoire	FR/TR
M-2 : Décision de transformation de l'énoncé (R1.1).	Utilisation ponctuelle des connaissances anciennes (R3.1).	Donnée : m = 2 kg, m est associé à une masse ponctuelle. Axiome : donc, toute masse de 2 kg est une masse ponctuelle. Raisonnement déductif mais faux.

Le raisonnement de Marouene se réfère au milieu objectif de départ : le découpage du barreau en neuf parties; chaque partie est considérée comme un point matériel. La justification des étapes du raisonnement doit favoriser les utilisations des énoncés en tant qu'éléments du système organisateur (Bloch et Gibel, 2011).

Marouene pense que le découpage en neuf permet de rendre les parties découpées des points matériels, car la masse de chaque partie est de 2 kg. Elle est égale à celle de la masse ponctuelle. Il s'agit d'une conception erronée de la définition d'un point matériel. En fait, un point matériel est un point de l'espace physique auquel on associe une grandeur scalaire positive, mesurable appelée masse. C'est dire qu'un pont matériel possède une masse mais un volume nul. Ici se pose un problème qui montre que le recours à la physique n'est pas toujours évident. Le concept du point matériel est un concept utile en physique, mais on s'éloigne alors du concret censé faciliter le passage vers l'abstrait!

Les déclarations de Marouene semblent être des tentatives « naïves » comme le définit Lecorre (2016) : « les tentatives "naïves " provenant des conceptions des élèves qui trouvent dans la situation un terrain naturel d'application et doivent être questionnées par les rétroactions du milieu. Le savoir visé doit être contenu dans la situation comme la seule stratégie accessible optimale de résolution » (Lecorre, 2016, p. 142). Nous remarquons que le problème des encadrements est toujours absent de l'enseignante, alors qu'il faudrait faire tendre vers la notion des sommes de Darboux ainsi que le dit (Rogalski et al., 2001).

5.7 Septième extrait

> 219 Bilel : On a un problème, lorsqu'on découpe notre tige en n points, combien ça sera la masse de chaque point?
>
> 220 Raed : Zéro ! Tendre vers zéro.
>
> 221 Bilel : Elle va tendre vers zéro! C'est M/n.
>
> 222 P : Si on découpe uniformément, la masse est M/n.
>
> 223 Raed : n tend vers l'infini.
>
> 224 Bilel : Lorsqu'on découpe en une infinité de points, elle tend vers zéro. Comment on va calculer? Lorsque n tend vers l'infini, la masse se rapproche de zéro, ainsi la somme devient nulle!

Tableau 9. Analyse du septième extrait

Nature et fonction / milieu	Signes et répertoire	FR/FR
M-1 : Bilel semble avoir une confusion entre la somme infinie de termes de la suite et le comportement de la suite suivante $\lim_{n\to\infty} \frac{A}{n}$ avec A une constante ≠ 0.	Les interventions sont de nature sémantique (R2.1).	Raisonnement inductif. Rationalité empirique

Bilel (219) semble avoir des difficultés au niveau de la somme infinie des quantités infinitésimales. En fait, c'est le second obstacle épistémologique qui apparaît. Il faut noter que c'est la somme des encadrements locaux par simple produit de tous les produits; ce n'est pas la somme de longueurs des morceaux découpés. Il nous semble que le problème se pose, car les séries numériques ne sont pas encore abordées. Il s'agit d'une confusion entre la limite d'une suite qui converge vers 0 et la somme d'une infinité de termes de cette suite.

5.8 Huitième extrait

Après avoir faire émerger des encadrements de plus en plus fins dans le niveau M-1 et que les discussions aient amené à la formulation de procédures de plus en plus efficaces, un étudiant a demandé d'intervenir.

> 230 Marouene : Vous m'avez posé la question : pourquoi tu as fait le découpage en neuf parties? Dans la première situation et la deuxième situation, lorsqu'on a découpé en deux, les tiges ne sont pas des points matériels. Moi, j'ai fait ce choix parce que les morceaux de la tige vont être assimilés à des points matériels. On aura neuf points et on fait la somme, on trouve la valeur exacte. [Il fait un petit intervalle entre son pouce et son index sur le schéma du barreau au tableau].
>
> 231 Sana : Réellement lorsqu'on découpe en 9 on va avoir la même masse que la masse ponctuelle. Physiquement, il voit que le découpage est très petit et chaque partie s'approche d'un point matériel, mais mathématiquement, il n'est pas le cas. Plus qu'on découpe plus qu'on se rapproche de la valeur réelle.
>
> 232 Marouene : Par le découpage en neuf, on va rendre les parties des points matériels et on fait des calculs exacts!

Tableau 10. Analyse du huitième extrait

Nature et fonction/milieu	Signes et répertoire	FR/TR
M-2 : Retour vers le milieu M-2. Moyen heuristique : E106 essaie d'expliquer le raisonnement de son collègue (R1.1).	Marouene prend des décisions à partir du milieu matériel : la masse du barreau qui est neuf fois plus grande que la masse ponctuelle représente une icône ou un indice dépendant du contexte (R2.1). Utilisation ponctuelle des connaissances anciennes qui ne sont pas dans leur contexte, ce qui produit un raisonnement erroné (R3.1). Sana (231) essaie d'expliquer la justification de son collègue en se basant sur la différence entre le contexte mathématique/physique. Elle considère que les arguments de nature physique ne s'appliquent pas pour « les mathématiques ». Chaque contexte possède ses arguments spécifiques qui ne sont pas valides dans l'autre contexte : explications et justifications visant à	Argumentation pragmatique/ raisonnement déductif.

	définir les règles du jeu de la preuve et leurs usages (R1.3).

L'idée de Marouene rebondit de nouveau. En fait, il s'agit d'un conflit cognitif en lien avec des connaissances physiques et qui peut poser des obstacles épistémologiques ultérieurement. Du point de vue de la rationalité mobilisée, il s'agit de la rationalité empirique qui possède un ordre de vérité limité. Cette rationalité est valide sous certaines conditions, mais elle ne se généralise pas. En fait, Sana a utilisé « des petits morceaux » et « des tiges assimilées à des points matériels » pour parler des quantités différentielles. Outre les explications verbales, Marouene a également utilisé des gestes pour démontrer une petite dissection de la ligne en faisant un petit intervalle entre son pouce et son index sur le schéma du barreau au tableau. Les étudiants construisent la notion abstraite de différentiels en termes d'objets concrets tels qu'une petite partie d'une quantité. Il faut dire qu'une petite quantité fait référence à une petite partie d'un objet physique. Cette métaphore (icône) d'objet est souvent évoquée lorsqu'il s'agit du recours à une petite quantité d'un ensemble plus grand. Elle permet aux étudiants d'associer les notions mathématiques complexes à leur connaissance expérimentale des objets physiques.

5.9 Neuvième extrait

247 Marouene : Pour neuf, on trouve la même masse que la masse ponctuelle.

248 P : Mais deux kilos, la tige n'est pas ponctuelle.

250 P : Quelqu'un passe au tableau pour nous faire un résumé.

251 Dhia : Madame, si on divise infiniment jusqu'à obtenir des morceaux très fins de longueurs négligeables, c'est comme si on a de petites lignes ou segments et on fait la somme des forces sans chercher un encadrement parce que le barreau est très petit de façon qu'on peut confondre F min et F max de chaque petit morceau avec la force exercée par le petit barreau.

Tableau 11. Analyse du neuvième extrait

Nature et fonction/milieu	Signes et répertoire	FR/TR
M-1 : Reformulation et résumé des étapes précédentes, ce qui va permettre l'entrée au milieu M0. Apparition d'une nouvelle conception.	Cette reformulation est demandée pour maintenir l'adidacticité de la situation.	Raisonnement inductif. Rationalité empirique

« Heureusement » que Marouene insiste sur son idée, peut-être que beaucoup pensent comme lui et ne peuvent s'associer pour dire qu'ils refusent la « fausse complexité » dans laquelle l'organisation du débat tend à les amener! En fait, il nous semble que le problème crucial est « bien » posé par Dhia (251), mais le paradoxe reste caché : il semble échapper à l'enseignante.

La théorie de l'intégrale dont l'organisation a été conduite par l'enseignante a pu in fine opérationnaliser tout ce travail d'approche très concret, mais aussi très laborieux d'une réalité insaisissable. En reliant dans la suite du cours ce processus d'approximation et de passage à la limite au calcul d'une primitive, on accède à ce processus hautement signifiant auquel toutes les sciences ont recours pour évaluer leurs grandeurs insaisissables, le détour intégral devient rationnellement (et non pas magiquement) opérationnel.

Par un simple calcul de primitive on obtient une estimation dont la théorie nous assure qu'elle est l'évaluation rigoureusement exacte du phénomène étudié (à l'issue d'un processus très coûteux en calculs si on devait les effectuer). Pour affiner nos approximations, on a dû augmenter le nombre d'erreurs commises à chaque étape et dans les cas favorables (fonctions intégrables) on est paradoxalement parvenu à faire diminuer leur somme jusqu'à la faire disparaître à la limite. Ensuite, quand la théorie sera achevée, un unique calcul de primitive nous fournira une estimation qui ne comporte plus aucune erreur.

Ce fait remarquable qui donne toute son importance au TFA et explique une partie de la synergie naturelle math-sciences appliquées n'est actuellement perçu dans sa signification propre que par une infime minorité des étudiants scientifiques, quel que soit leur niveau d'études. Ceci est le bas, bien qu'ils aient été par ailleurs largement entraînés à pratiquer une heuristique des primitives qui ne servira probablement qu'à une infime minorité d'entre eux par la suite. (Nombreux sont ceux de tout niveau qui pensent après coup que par la procédure intégrale le résultat final demeure un calcul approché dont ils ignorent bien sûr la précision).

Conclusion

Les débats, dont l'organisation a été conduite par l'enseignante d'une façon sympathique en respectant l'expression des idées qui se sont formées dans une rationalité pragmatique (les seules idées qu'on peut imaginer et produire seul spontanément) ont trouvé des difficultés à passer rationnellement et collectivement du pragmatique vers le théorique. Cette position didactique (consistant à ne pas perdre l'adidacticité de la situation) n'a pas permis à l'enseignante de mieux structurer les débats et de marquer des étapes dans l'évolution des interventions erratiques, ou même de ne pas enseigner en acte une prise de conscience des savoirs « métamathématiques » qu'on vient de côtoyer. Il aurait fallu regarder après coup ce qui a été décisif à certains moments cruciaux dans l'action scientifique menée ensemble, en particulier comprendre en quoi l'apparition de telle ou telle contradiction, de tel échec qu'on a pris en compte au lieu de le « glisser sous le tapis » a obligé le groupe à prendre une distance salutaire et à faire un saut cognitif pour nous faire sortir d'une appréhension trop rustre de la situation.

À la lecture de la transcription des échanges, on s'aperçoit qu'à de nombreux moments les étudiants abordent les vrais obstacles, mais que ces approches à la fois très pertinentes et très naïves, qui sont en train d'être timidement abordées par quelques-uns seulement, mettent par contre l'enseignante en grand danger de perte d'adidacticité, car elle ne dispose pas des outils « didactiques » nécessaires qui lui permettraient de garder son rôle d'enseigner en partageant à la classe entière les transitions de rationalité de l'étude.

Or, nous pensons que c'est la prise de conscience par tous de sa propre évolution rationnelle qui démontrera à chacun ce que tout le monde peut commencer à comprendre sur le fond. En fait, si nous construisons de façon erratique, des procédures puissantes et complexes comme celle de l'intégrale, personne ne peut les inventer « ex nihilo ». C'est l'exemple même d'adaptation progressive d'une volonté pratique d'évaluer ce qui est présent dans la réalité envisagée. En particulier, la façon dont chaque élément du barreau pourra être appréhendé comme élément constitutif de la force globale F est bien cachée.
Un tel « trésor d'idées précieuses » ne livre son sens profond que si on lui applique cette volonté scientifique de ne pas tricher avec la réalité quand la complexité de « la réalité » se dévoile en s'opposant à toutes nos tentatives de simplifications immédiates.

Il faut donc que les étudiants puissent comprendre comment on pourrait s'y prendre pour déjouer le piège du « deus ex machina » du centre de gravité. En effet, en quoi l'étude de cette simplification qui ne résiste pas à l'étude rationnelle d'un morceau de barreau peut-elle nous aider à prendre conscience que finalement « ce que l'on souhaite tous à tout prix en découpant » c'est de trouver un morceau de barreau pour lequel la force exercée soit directement calculable.

Il s'agit alors de prendre conscience du paradoxe de l'intention infinitésimale (que peu de sujets bien instruits de l'intégrale maîtrisent) : avec les outils de calcul dont nous disposons, pour faire un calcul exact, il faudrait ponctualiser les bouts de barreau. Puisque « ça bouge tout le temps », il faudrait, pour empêcher de varier, prendre un morceau de barreau de longueur nulle, donc sans masse et alors…. Que vaut une somme infinie de quantités toutes nulles!

La prise de conscience douloureuse qu'aucun calcul exact n'est directement possible à partir des renseignements qui nous ont été fournis pour mathématiser la situation nous semble nécessaire. En effet, c'est elle qui nous contraindra à aller vers ce à quoi notre rationalité naturelle répugne : « majorer/minorer », puis passer, à la limite, sur des résultats qui ne sont jamais exacts en espérant néanmoins arriver à un résultat final exact, mais en un sens inaccessible, c'est-à-dire au niveau « méta ». Ainsi, pour être certain de ne pas dire n'importe quoi, il faut accepter de faire un détour par des approximations de plus en plus nombreuses qu'on poursuit indéfiniment alors qu'en voulant donner une estimation directe, ce qu'on obtiendra sera illusoirement exact, car ne reposant en fait sur rien de certain.

Notre étude a examiné le processus du raisonnement que les étudiants évoquent pour résoudre un problème physique qui revient à une problématique d'intégration. Le groupe d'étudiants n'a pas initialement appris à mathématiser ses idées naïves. Une question qui se pose alors est : comment accéder de cette façon au niveau théorique si on n'a pas initialement appris à traduire ses idées intéressantes en conjectures que l'on tentera ensuite d'améliorer, de « réparer » ensemble quand elles s'avèrent trop irréalistes et fausses?

Références

Akrouti, I. (2020). Conceptions de l'intégrale de Riemann des étudiants en Classe préparatoire. Dans T. Hausberger, M. Bosch et F. Chelloughi (dir.), *Proceedings of the 3rd conference of INDRUM* (p. 53-62). University of Carthage and INDRUM.

Akrouti, I. (2021a). Que représente le concept d'intégrale définie pour les étudiants à l'entrée à l'université? *Web of Conferences*, 39(01010). https://doi.org/10.1051/itmconf/20213901010

Akrouti, I. (2021b). *L'enseignement de l'intégral à l'entrée à l'université en Tunisie. Quelle approche? Quelle alternative?* [thèse, Université Virtuelle de Tunis (ISEFC)].

Allard, C. (2015). *Étude du processus d'institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions*. [thèse de doctorat, Université Paris Diderot]. TEL. https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01249807/document

Bloch, I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en Première scientifique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(2), 135-193.

Bloch, I. (2000). *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université* [thèse de doctorat, Université Bordeaux I]. TEL. https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01222400/document

Bloch, I. (2006). *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur* [note de synthèse pour une habilitation à diriger des recherches, Université Paris 7]. TEL. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00012153

Bloch, I. et Gibel, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en didactique des mathématiques, 31*(2), 191-228.

Bloch, I., Chiocca, C.-M., Job, P. et Schneider, M. (2007) Du numérique aux limites : quelle forme prend la transition secondaire/supérieur dans le champ des nombres et de l'analyse? Dans A. Rouchier et I. Bloch (dir.), *Perspectives en didactique des mathématiques, Actes de la XIIIème école d'été (Cédérom).* Éditions La Pensée sauvage.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Éditions la Pensée sauvage.

Brousseau, G. et Gibel, P. (2005). Didactical handling of students' reasoning processes in problem solving situations. *Educational Studies in Mathematics*, *59*, 13-58. https://doi.org/10.1007/0-387-30451-7_2

Carnot, L. (1839). *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*. Bachelier.

Decroix, A. A. et Rogalski, M. (2013). L'intégrale, de la physique aux mathématiques. Dans F. Vandebrouck (dir.), *La réforme des programmes du lycée et alors ?Actes de Colloque IREM* (p. 157-170). IREM.

de Freycinet, M. C. (1860). *De l'analyse infinitésimale. Étude sur la métaphysique du haut calcul*. Mallet-Bachelier.

Dias, T. (2008). *La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage* [thèse de doctorat, Université Lyon 1]. TEL. https://theses.hal.science/tel-00635724/document

diSessa, A. A. et Sherin, B. L. (1998). What changes in conceptual change? *International Journal of Science Education*, *20*(10), 1155-1191. http://dx.doi.org/10.1080/0950069980201002

Ghedamsi, I. (2017). A micro-model of didactical variables to explore the mathematical organization of complex numbers at upper secondary level. Dans T. Dooley et G. Gueudet (dir.), *Proceedings of the Tenth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 10*) (p. 2065-2072). DCU Institute of Education.

Gibel, P. (2008). Analyse en théorie des situations d'une séquence destinée à développer les pratiques du raisonnement en classe de mathématiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 13*, 5-39.

Gibel, P. (2018). *Élaboration et usages d'un modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques* [note de synthèse pour une habilitation à diriger des recherches, Université de Pau et des Pays de l'Adour]. TEL. https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01919188

González-Martín, A., Bloch, I., Durand-Guerrier, V. et Maschietto, M. (2014). Didactic situations and didactical engineering in university mathematics: cases from the study of Calculus and proof. *Research in Mathematics Education*, *16*(2), 117-134.

Grenier, D., Legrand, M. et Richard, F. (1986). Une séquence d'enseignement sur l'intégrale en DEUG A première année, *Cahiers de didactique des mathématiques, 22*.

Haddad, S. (2006). *Enseignement de l'intégrale entre la classe terminale et la première année de l'enseignement supérieur* [mémoire de maitrise inédit]. Université de Tunis.

Haddad, S. (2012). *L'enseignement de l'intégrale en classe terminale de l'enseignement tunisien* [thèse de doctorat, Université Virtuelle de Tunis (ISEFC) et Université Paris Diderot (Paris 7)]. TEL. https://theses.hal.science/tel-01087840

Hu, D. (2010). *Understanding introductory students' application of integrals in physics from multiple perspectives* [thèse de doctorat, Kansas State University]. K-Rex. https://krex.k-state.edu/dspace/handle/2097/16190

Hu, D. et Rebello, N. S. (2013). Understanding student use of differentials in physics integration problems. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research,* 9, 020108. http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.9.020108

Jones, S. R. (2015). Areas, anti-derivatives, and adding up pieces: Definite integrals in pure mathematics and applied science contexts. *International Journal of*

Mathematical Education in Science and Technology, 46(5), 721-736. http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2014.1001454 .

Kouropatov, A. et Dreyfus, T. (2012). The idea of accumulation as a core concept for an integral calculus curriculum for high school. Dans S. J. Cho (dir.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (p. 2740-2749). ICME.

Kouropatov, A. et Dreyfus, T. (2013a). Constructing the integral concept on the basis of the idea of accumulation: Suggestion for a high school curriculum. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44, 641-651.

Kouropatov, A. et Dreyfus, T. (2013b). Constructing the Fundamental Theorem of Calculus. Dans A. Heinze et A. Lind Meier (dir.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Methodology and Methods in Mathematics Education* (p. 201-209). IGPME.

Kouropatov, A. et Dreyfus, T. (2014). Learning the integral concept by constructing knowledge about accumulation. *ZDM Mathematics Education, 46*, 533–548. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0571-5

Kouropatov, A. (2015). *The Integral Concept in High School: Constructing Knowledge about Accumulation*. [Thèse de doctorat, Université de Tel Aviv]. Macam. http://library.macam.ac.il/study/pdf_files/d13002.pdf

Lalaude-Labayle, M. (2016). *L'enseignement de l'algèbre au niveau universitaire. Étude épistémologique et didactique*. [Thèse de doctorat, Université de Pau et des Pays de l'Adour]. TEL. https://theses.hal.science/tel-01419021/document

Lecorre, T. (2016). Rationality and concept of limit. Dans E. Nardi, C. Winsløw et T. Hausberger (dir.), *Proceedings of the First Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (p. 83-92). Université de Montpellier.

Legrand, M. (1990). Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *3*(9), 365-406.

Margolinas, C. (1994). La structuration du milieu et ses apports dans l’analyse a posteriori des situations. Dans C. Margolinas (dir.), *Les débats de didactique des mathématiques* (p. 89-102). Éditions la Pensée sauvage.

Margolinas, C. (1998). Étude de situations didactiques ordinaires à l'aide du concept de milieu : détermination d'une situation du professeur. *Actes de la 8e École d'été de didactique des mathématiques,* 35-43.

Meredith, D. C. et Marrongelle, K. A. (2008). How students use mathematical resources in an electrostatics context. *American Journal of Physics, 76*, 570-578.

Moreno-Armella, L. (2014). An essential tension in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 46*, 621–633. http://dx.doi.org/10.1007%2Fs11858-014-0580-4

Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(1), 1-18.

Otte, M. (2006). Proof and explanation from a semiotical point of view. *Revista Latino-Americana de Matematica, Numero especial*, 23-43.

Rogalski, M., Pouyanne, N. et Robert, A. (2001). *Carrefours entre analyse, algèbre, géométrie*. Ellipses.

Rogalski, M. (2010). *Le rôle des mathématiques dans la mise en équation différentielle en physique : les procédures de l'accroissement différentiel dans les deux disciplines*. Laboratoire de Didactique André Revuz.

Rogalski, M. (2013). Quelques compléments à l'article de Hervé Quéffelec sur l'enseignement de l'intégration et de la mesure de Lebesgue : faire simple et pédagogique? *Gazette des mathématiciens*, *137*, 31- 42.

Rogalski, M. (2018). De quelques difficultés de l'interdisciplinarité. Dans M. Abboud (dir.) *Actes du colloque EMF 2018 Paris* (p. 451-459) .IREM de Paris.

Sealy, V. (2014). A framework for characterizing student understanding of Riemann sums and definite integrals. *The Journal of Mathematical Behavior*, 33(1), 230–245.

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 229-274.

Wallace, C. S et Chasteen, S. V. (2010). Upper-division students' difficulties with Ampère's law. *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.*, *6,* 020115.

Mathématiques, danse et robotique pédagogique : Résoudre des problèmes en faisant danser des robots

Fabienne Venant
Université du Québec à Montréal
venant.fabienne@uqam.ca

Résumé : La résolution de problèmes est au cœur de l'apprentissage des mathématiques. Cependant, il peut être difficile de concevoir des situations novatrices incluant des tâches significatives pour les élèves. Face à cette difficulté, nous avons décidé d'explorer les possibilités offertes par la robotique pédagogique, considérée comme un environnement d'apprentissage dans lequel les apprenants résolvent des problèmes en utilisant des robots. Dans cet article, nous analysons les processus de résolution de problèmes mis en œuvre par des apprenants universitaires dans un cours de mathématiques, dans le contexte d'un projet en robotique pédagogique.

Mots-clés : résolution de problèmes, pensée informatique, activité mathématique, robotique pédagogique

Solving mathematical problems by making robots dance? An experiment in initial teacher education

Abstract: Problem-solving is at the heart of mathematics learning. However, it can be difficult to design innovative situations that include meaningful tasks for students. To overcome this difficulty, we explore the possibilities offered by educational robotics, considered as a learning environment in which learners solve problems using robots. This paper analyzes the problem-solving processes that university learners used in a mathematics course within the context of an educational robotics project.

Keywords: problem-solving, computational thinking, mathematical activity, educational robotics

Introduction

La résolution de problèmes occupe une place centrale non seulement dans l'enseignement des mathématiques, mais en éducation en général. La figure 1 montre qu'elle est considérée comme une des compétences clés pour le 21e siècle, aussi bien par des chercheurs comme Romero et al. (2017), que par le Gouvernement du Québec (2019), qui l'inclut dans les « dimensions jugées indispensables pour apprendre et évoluer au 21e siècle » au sein du cadre de référence de la compétence numérique (p. 3).

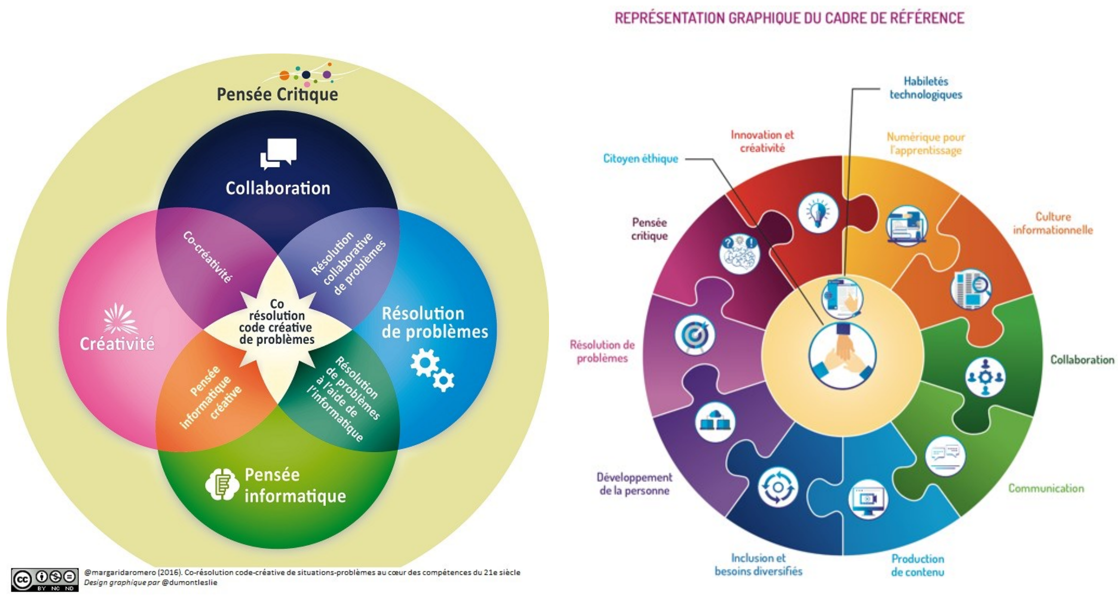


Figure 1. Les compétences du 21e siècle d'après Romero et al. (2017, p. 4) à gauche, et le cadre de référence de la compétence numérique (Gouvernement du Québec, 2019, p. 12), à droite

Freiman et Savard (2014), dans leur introduction du numéro spécial de la revue « Éducation et francophonie » consacré à la résolution de problèmes en mathématiques, soulignent ainsi que les citoyens de demain, et donc les jeunes d'aujourd'hui, « devront être capables, à la fois de maîtriser le contenu des matières scolaires et de les mobiliser en situation de résolution de problèmes et de communication, tout en mettant en œuvre une pensée critique » (p. 1). Les analyses curriculaires de Lajoie et Bednarz (2012, 2014, 2016) ont fait ressortir le caractère de plus en plus ambitieux des fonctions assignées à la résolution de problèmes. Ainsi, depuis 1998, celle-ci joue un double rôle puisqu'elle est à la fois une habileté de base qui constitue en soi un objet d'apprentissage, et une approche pédagogique permettant le déploiement d'une activité mathématique. Désormais, l'élève qui résout un problème de mathématiques ne développe plus uniquement son raisonnement et ses compétences mathématiques. Il développe des stratégies générales de résolution et des attitudes positives (être conscient de ses capacités, respecter le point de vue d'autrui, être imaginatif et créatif, rigoureux et précis…). Lajoie et Bednarz (2016) ont mis en évidence l'apparition d'un critère de complexité dans la conception et la sélection des tâches de résolution de problèmes. L'enseignant est désormais encouragé à privilégier des situations complexes, c'est-à-dire des situations « qui mobilisent l'ensemble des composantes d'une compétence, représentent un défi intellectuel, suscitent un conflit cognitif, favorisent la prise de risques et se prêtent à plus d'une démarche » (Gouvernement du Québec, 2006, p. 14).

Les situations complexes qu'un élève québécois du secondaire du 21e siècle est amené à résoudre dans le cours de mathématiques sont presque toutes construites sur un même modèle : un énoncé très long (souvent plusieurs pages) contenant un grand nombre de données, idéalement présentées dans différents registres (texte, illustration, graphique, tableau…). L'élève est « plongé » dans une situation réaliste et il doit se repérer dans les données présentées pour décider si un projet est réalisable, en respectant un certain nombre de contraintes (budgétaires, environnementales, logistiques…). Ces situations sont pensées pour mettre en jeu différents concepts et processus mathématiques. Cependant, comme le soulignent Lajoie et Bednarz (2016), la mobilisation des savoirs et savoir-faire relève souvent d'une mise en fonction technique (Robert, 1998), réduisant les notions mathématiques à un rôle d'outil. Ces situations se réduisent bien souvent à une succession de problèmes d'application assez simples, « ce qui en fait le caractère nouveau résidant davantage dans la combinaison nécessaire de ces différents sous-problèmes » (Lajoie et Bednarz, 2016). La complexité à laquelle l'élève est confronté réside uniquement dans la lecture et le traitement des données. Sans nier la pertinence de ces situations dans l'acquisition de la résolution de problèmes en tant que compétence transversale et quotidienne, nous pensons qu'elles gagnent à être articulées avec des problèmes dont la complexité est d'une autre nature. Notre premier objectif est donc d'explorer des contextes de résolution de problèmes mettant en jeu une complexité mathématique plus sémantique qu'instrumentale.

L'une des principales difficultés dans la construction des tâches de résolution de problèmes et de modélisation est de construire des activités signifiantes pour les élèves, c'est-à-dire des activités dont ils puissent entrevoir la pertinence et le propos (Blum, 2015). Une approche privilégiée consiste à utiliser des contextes réels. Cependant, construire une activité vraiment pertinente du point de vue des apprentissages mathématiques à partir d'un contexte réel n'est pas une tâche facile. Ainsi, en France, le rapport Villani souligne que « souvent, les contextes retenus perturbent les élèves plutôt qu'ils ne les aident et ces modèles sont tellement simplifiés qu'ils n'apportent pas de réelle plus-value aux disciplines auxquelles ils sont empruntés (économie, sciences physiques, etc.) » (Villani et al., 2018, p. 23). C'est pourquoi nous explorons ici les possibilités offertes par la robotique pédagogique. Cet environnement nous semble prometteur pour créer des contextes signifiants, pouvant mêler science, technologie, mathématiques, intelligence artificielle et arts, en lien avec les enjeux sociétaux actuels (Benitti et Spolaôr, 2017). Ces liens, encore largement inexplorés, devraient soutenir une interdisciplinarité effective, c'est-à-dire complémentaire plutôt que cumulative, articulant les savoirs disciplinaires et permettant des convergences entre les disciplines (Lenoir, 2003). Nous avons cherché à les mettre en œuvre dans un cours de mathématiques universitaire, dans le cadre d'un projet combinant mathématiques, informatique et danse. Dans cet article, nous cherchons à mettre en évidence l'activité de résolution de problèmes des étudiants, lors de la construction, la mise au point et la programmation d'un robot danseur.

1. Pensée informatique et résolution de problèmes

La pensée informatique, mise au goût du jour par Wing (2006), occupe, elle aussi, une place de choix dans les compétences du 21e siècle montrées en figure 1. Elle entretient des liens très forts avec la résolution de problèmes, avec en particulier l'idée d'utiliser la technologie aussi bien comme contexte que comme moyen d'aide à la résolution du problème. Tout comme la résolution de problèmes, la pensée informatique est difficile à circonscrire. La définition la plus fréquente est celle proposée par Wing (2006), celle « d'une attitude et d'un ensemble de compétences que les programmeurs mettent en jeu quand ils font face à un problème à résoudre, et que nous gagnerions tous à acquérir » (p. 1). Il ne s'agit pas d'amener l'humain à raisonner comme une machine, capable seulement d'appliquer des instructions structurées, mais plutôt d'une, « aptitude à formuler les problèmes et leurs solutions de manière à ce que leur résolution puisse être effectuée par un agent de traitement automatique de l'information » (Wing, 2011, p. 20).

L'idée d'introduire la pensée informatique à l'école n'est pas nouvelle. Papert (1980) défendait déjà l'idée qu'apprendre à communiquer avec un ordinateur pouvait influencer les apprentissages mathématiques. Ainsi que nous l'avons souligné dans des travaux antérieurs (Venant, 2018), la pensée informatique contribue au développement de compétences plus générales en résolution de problèmes. L'apprenant est en effet amené à analyser le problème posé pour le restructurer sous forme de tâches correspondant chacune à un ou des objectifs précis. Dans cette optique, la programmation informatique et la pensée informatique qui la sous-tend peuvent être mises en œuvre comme une approche possible de la résolution de problèmes mettant en jeu quatre processus fondamentaux : 1) la décomposition (du problème complexe initial en sous-problèmes plus simples); 2) la reconnaissance de motifs (au sein de chacun des sous-problèmes); 3) l'abstraction (en lien avec le traitement de l'information); 4) les algorithmes (description logique et structurée des étapes menant à la résolution de chacun des sous-problèmes). La pensée informatique inclut aussi un processus de recherche et de traitement des erreurs (débogage), et par là même favorise le développement de la pensée critique. Les composantes de la pensée informatique comportent une part d'abstraction et de généralisation qui semble favorable à la mise en œuvre d'une activité mathématique. Notre deuxième objectif est de mettre au jour les différentes composantes de la résolution de problèmes en contexte robotique et de mieux comprendre la nature du travail mathématique effectué.

2. Cadre théorique

Les fondements théoriques de notre travail mêlent l'approche constructionniste initiée par Papert (1980, 1993) et des modèles récents de résolution de problèmes. Papert, dans la lignée de Piaget, considère que tout apprentissage se poursuit par la découverte. Selon lui, l'ordinateur constitue un outil idéal pour créer un environnement dans lequel les apprenants sont les maîtres de leurs découvertes, peuvent développer leurs propres idées et explorer librement les mathématiques. Dans le même ordre d'idée, Papert (2000) soutient que les problèmes travaillés par les élèves ne doivent pas être initiés par les enseignants, mais provenir plutôt des élèves et avoir de l'importance à leurs yeux. Le rôle de l'enseignant est alors de créer des conditions permettant aux apprenants de poser leurs questions et de résoudre leurs problèmes. Il préconise donc une approche par projets, s'échelonnant dans le temps, pour permettre aux élèves d'entrer dans une activité créatrice propice à l'exploration et aux découvertes mathématiques (Barabé et Proulx, 2017). Nous nous intéressons plus particulièrement à la part de résolution de problèmes inhérente à cette activité. Du point de vue de la recherche, la difficulté réside alors dans la description de ce qui se passe dans cette résolution (Favier, 2022). Dans la lignée de Weil-Barais et Dubois (1993), nous cherchons à utiliser les événements observables (geste, verbalisations, productions symboliques…) pour interpréter les événements inobservables (dans la tête du sujet). Pour cela, nous nous appuyons sur les travaux de Polya (2004) et Schoenfeld (1985), repris et adaptés par Rott (2011) et cités par Favier (2022).

Polya (2004) est un des premiers chercheurs à avoir proposé un modèle de la résolution de problèmes en mathématiques, en quatre phases successives qui consistent à 1) comprendre le problème ; 2) concevoir un plan ; 3) mettre le plan à exécution ; 4) examiner la solution obtenue. Bien que ces phases aient été pensées de manière prescriptive, elles ont servi de base à d'autres chercheurs pour décrire les processus de résolution mis en œuvre par des élèves. Schoenfeld (1985), par exemple, renomme les 4 phases proposées par Polya en 1) appropriation ; 2) planification ; 3) mise en œuvre ; 4) vérification. Il ajoute également une phase d'exploration, intermédiaire entre l'appropriation et la planification, pour rendre compte de la part du processus de résolution qui ne relève plus tout à fait de la compréhension du problème à proprement parler, mais qui ne constitue pas pour autant un plan prêt à être mis en œuvre. Enfin, il considère que le processus de résolution de problèmes n'est pas aussi linéaire que ce que propose Polya, et peut même prendre une forme cyclique (figure 2), avec des allers et retours entre les phases d'appropriation, d'exploration et de planification pouvant être nécessaires à l'élaboration d'une stratégie de résolution.

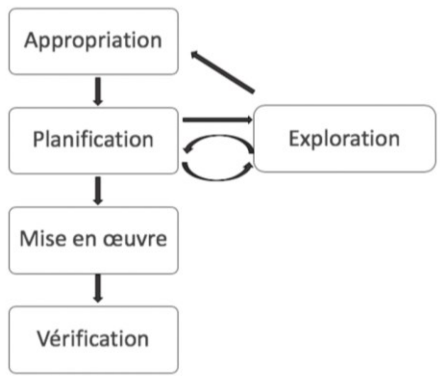


Figure 2. Présentation simplifiée du modèle de résolution de problèmes de Schoenfeld par Favier (2022, p. 22)

Rott (2011) généralise cette notion de cycle afin de permettre des « jonctions entre les différentes phases du processus de résolution » (Favier, 2022, p. 23). Il accorde, lui aussi, une grande importance à la phase d'exploration qui permet de rendre compte de la part non structurée des comportements. Il propose également de regrouper les phases de planification et de mise en œuvre, car les élèves n'explicitent pas nécessairement leur plan de résolution avant de le mettre en œuvre.

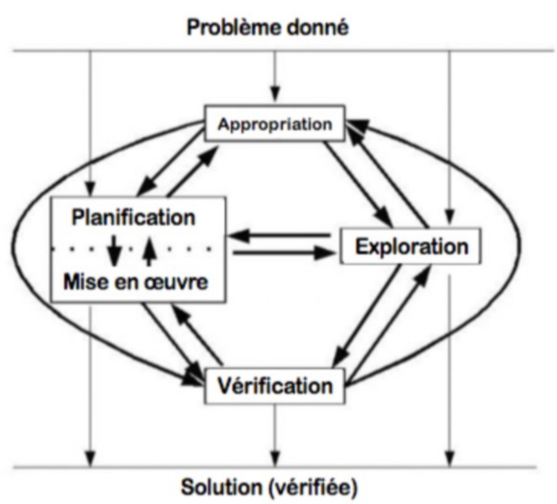


Figure 3. Traduction du modèle de résolution de problèmes de Rott (2011) par Favier (2022, p. 24)

C'est sur le modèle de Rott (2011) que nous nous appuierons pour analyser les processus de résolution de problèmes mis en œuvre par les apprenants.

3. Méthode et données recueillies

Dans un premier temps, le contexte d'expérimentation et le groupe d'étudiants ayant participé à ce projet seront exposés. Le matériel utilisé pour mener à bien ce projet sera décrit dans un deuxième temps.

3.1 Contexte et participants

Nous avons testé le potentiel de la robotique pour engager des apprenants dans une activité mathématique dans un cours de mathématiques universitaire. Dans le cadre de ce cours, les étudiants doivent réaliser un projet en équipe pour explorer une notion mathématique de leur choix, à l'aide d'outils numériques. Les étudiants ont travaillé en équipe de 3 ou 4. Au total, 8 projets de robotique ont été réalisés. Le travail s'est déroulé en deux temps. Les étudiants ont d'abord effectué un travail de recherche sur les liens entre mathématiques et danse. Une liste initiale de documents multimédias (textes, vidéos, pages Web…) leur était proposée selon les thèmes suivants : mathématiques pour penser et/ou expliquer le mouvement (Birringer, 2013 ; De Keersmaeker, 2019), symbolisme et mathématiques pour décrire et écrire la danse (Benesh, 1969 ; Prudhommeau, 1987), danse et numérique (Davidson, 2003 ; Menicacci, 2003), danse et enseignement des mathématiques (Mickelson et Ju, 2010 ; Schaffer et Stern, 2010). Les étudiants devaient compléter cette liste préliminaire, approfondir une ou plusieurs thématiques de leur choix et écrire une synthèse de leur réflexion. Ce travail a servi d'inspiration et posé les bases du travail chorégraphique robotique.

3.2 Matériel utilisé

Un kit de robotique EV3 a été attribué à chacune des équipes pour toute la durée du projet. Les étudiants ont donc pu construire le robot qui convenait le mieux à leur chorégraphie et le retrouver à chaque séance de cours. Le kit de robotique EV3 est très modulable. Il est constitué d'une brique programmable à laquelle on peut ajouter différentes parties encastrables les unes dans les autres. Cette brique peut contrôler différents moteurs et capteurs (de distance, de luminosité, de température, gyroscope…).

Chaque équipe a rédigé un journal de bord, relatant les choix effectués à chaque séance de travail, les difficultés rencontrées et les stratégies mises en œuvre pour les contourner. Ces journaux de bord, ainsi que les programmes informatiques produits par les étudiants, constituent les seules données recueillies pour cette recherche.

Ces données ont été soumises à trois lectures. La première lecture, très globale, visait à observer les opportunités d'interdisciplinarité créées par les étudiants à travers leurs choix mathématiques et chorégraphiques. La deuxième lecture, plus approfondie, a été effectuée selon une grille permettant de repérer dans les journaux et les programmes informatiques les extraits relevant de chacune des phases de résolution de problèmes identifiés par Rott (2011) : appropriation, exploration, planification, mise en œuvre et vérification, ainsi que les allers et retours entre ces différentes phases. Nous avons ensuite relevé, dans chacun des extraits retenus, la nature des objets[1] et des connaissances en jeu (mathématiques, techniques et algorithmiques), et les éléments clés de la pensée informatique (décomposition du problème, reconnaissance de motifs, abstraction et enjeux algorithmiques). C'est ce qui nous a permis, par exemple, de différencier deux types d'exploration, une exploration mathématique et une exploration informatique.

4. Résultats

Les résultats de cette recherche sont présentés selon deux angles d'analyse. Le premier traite du volet interdisciplinaire du projet et le deuxième porte plus spécifiquement sur le processus de résolution de problème impliqué dans cette tâche voulant faire danser un robot.

4.1 Interdisciplinarité

Les résultats en ce qui a trait à l'interdisciplinarité sont abordés par le biais d'une analyse de l'articulation entre les mathématiques et la danse et par l'identification de liens possibles avec les sciences.

4.1.1 Articulation entre les mathématiques et la danse

Le tableau 1 présente les projets proposés par les étudiants selon les objets mathématiques retenus et le rôle qu'ils jouent dans l'élaboration de la chorégraphie. Toutes les équipes ont eu recours à au moins un objet possédant une représentation graphique (représentation d'une fonction) ou géométrique (figures géométriques). Le rôle de ces objets est de décrire la trajectoire qui sera effectuée par le robot. Cependant, aucune équipe ne va utiliser pour cela un capteur, qui permettrait par exemple au robot de suivre le tracé sur une feuille de papier. Les étudiants ont choisi unanimement de décrire de façon algorithmique l'objet à parcourir afin de décrire les séquences de mouvements du robot. La seule équipe qui a eu recours à des capteurs (tactile et de couleur) l'a fait pour des besoins

[1] Il est question ici d'objets mathématiques et non de concepts mathématiques qui les sous-tendent.

artistiques de mise en scène. Ces choix révèlent une volonté de la part des étudiants de mettre en œuvre la robotique comme un outil d'exploration mathématique. La chorégraphie ne sert pas uniquement à visualiser un objet mathématique. Le travail chorégraphique se fait conjointement avec un travail mathématique, visant à dégager les propriétés mathématiques caractéristiques de l'objet choisi, et un travail algorithmique visant à traduire ces propriétés en déplacements. Quelques équipes cherchent à compléter les liens entre mathématiques et danse en proposant de contrôler mathématiquement d'autres aspects du comportement du robot. Par exemple, l'équipe 1 utilise la fonction sinusoïdale pour moduler la vitesse du robot. L'équipe 2 utilise la distributivité pour rythmer les mouvements de bras du robot. De son côté, l'équipe 7 utilise deux robots dont les mouvements se correspondent dans une transformation géométrique (symétrie, translation, homothétie). Puis, l'équipe 8 ajuste la vitesse du robot selon son avancée dans les étapes de construction d'une spirale. Nous n'analyserons pas en profondeur les enjeux artistiques, un peu éloignés de notre expertise, mais nous avons relevé quelques enjeux liés à des questions algorithmiques. Ces enjeux sont relatifs, par exemple, au choix d'une musique, à la synchronisation des mouvements et du rythme, à l'esthétisme et à la fluidité du mouvement (qui implique une programmation en parallèle plutôt que séquentielle).

Tableau 1 : Description des projets proposés par les étudiants

Équipes	Utilisation de capteurs	Objets mathématiques	Rôle		
			Décrit la trajectoire	Module la vitesse	Contrôle la distribution des mouvements
1	non	Triangles emboîtés	x		
		Sinusoïde		x	
2	non	Polygones réguliers,	x		
		Flocon de Von Koch	x		
		Distributivité			x
3	oui	Coniques	x		
		Fonctions trigonométriques	x		
4	non	Forme géométrique définie par des points caractéristiques et des coordonnées cartésiennes	x		

5	non	Équations polaires et polygones emboîtés	x		
		Flocon de Von Koch	x		
6	non	Spirale	x		
		Sinusoïde	x		
7	non	Transformations géométriques			x
		Polygones réguliers	x		
8	non	Spirale	x	x	

4.1.2 Liens avec les sciences

Dans leur journal de bord, des étudiants établissent des liens explicites avec les sciences et la technologie. Plusieurs thématiques sont abordées : l'exploration de savoirs scientifiques, comme les changements de vitesse et le calcul de l'accélération, la mécanisation du travail à travers les fonctions de guidage, la prise en compte de l'adhérence et du frottement, la qualité de liaison entre les pièces mécaniques et son incidence sur la distance parcourue et la nature des mouvements, le travail sur les machines simples, à travers les liens entre engrenages et augmentation de la vitesse ou de la force du robot, ou nature du déplacement du robot. Par exemple, l'équipe 6 note dans son journal les observations suivantes :

> L'engrenage formé d'une roue dentée produit un mouvement de type translation.
>
> L'engrenage formé de plusieurs dents dentées produit un mouvement de type rotation.
>
> Les engrenages ont pour but de changer la direction ou le sens du mouvement et la vitesse.

4.2 Processus de résolution de problèmes

Conformément au cadre théorique choisi, nous décrivons ci-dessous nos observations pour chaque phase de la résolution de problèmes (figure 3). La description linéaire adoptée ne nous permet pas de rendre pleinement compte de la nature cyclique du processus, mais nous signalons au fil du texte les allers et retours qui nous ont semblé les plus significatifs. Les citations présentes dans la suite du texte sont des extraits des journaux de bord des étudiants.

4.2.1 Appropriation

Pour toutes les équipes, l'appropriation du problème passe par la construction d'un robot et le choix d'un modèle proposé par le guide d'utilisation du kit robotique, avec ou sans intention de le modifier. Les critères prévalant au choix du robot peuvent être purement émotionnels ou esthétiques, sans prise en compte des perspectives mathématiques et chorégraphiques du projet :

> La première étape de notre projet est de décider quel modèle de robot nous souhaitons utiliser. Pour ce faire, nous avons regardé les modèles d'ensemble de base sur le logiciel Mindstorm EV3. Parmi ces modèles, deux ont retenu notre attention : le Gyro Boy et le chiot. Nous aimions ces modèles, car nous voulions voir le visage de notre robot. (Équipe 2)

D'autres équipes, comme les équipes 5 et 8, anticipent des modifications à apporter au robot après validation des choix mathématiques : « On tentera d'abord de construire un programme qui permettra au robot de tracer des courbes polaires et on modifiera, ensuite, le modèle du robot au besoin » (équipe 5).

Certaines équipes tiennent compte dès le départ des contraintes imposées par le choix de l'objet mathématique. C'est le cas de l'équipe 1, qui cherche à pouvoir faire varier la vitesse du robot selon une fonction trigonométrique :

> Notre première construction du Gyro Boy version stable ne fut pas aussi concluante que ce que nous le souhaitions. En effet, à basse vitesse, notre robot est stable lorsqu'il avance et lorsqu'il recule, mais il tombe dès que la vitesse excède les alentours de 50. (Équipe 1)

4.2.2 Exploration

Nous observons deux types d'exploration, mathématique et informatique, qui s'entrecroisent jusqu'à l'élaboration d'une stratégie de programmation. Nous les illustrons à partir des travaux des étudiants ci-dessous.

4.2.2.1 Exploration informatique. Elle vise à établir un vocabulaire de base de mouvements qui pourront composer la chorégraphie. Certaines équipes explorent librement les mouvements possibles, indépendamment de toute anticipation de chorégraphie. Les éléments qui président à leur exploration sont alors la gestion de l'équilibre et la nature et la variété des mouvements possibles : « Nous nous sommes questionnés sur la quantité de mouvements que notre robot peut faire actuellement » (équipe 3). D'autres se concentrent sur les mouvements qui permettront de décrire l'objet mathématique choisi : « Nous avions aussi commencé à travailler sur des mouvements qui forment des figures géométriques remarquables, en débutant par un triangle équilatéral » (équipe 2).

Pour la plupart des équipes, cette phase d'exploration se traduit par la création de modules de programmation destinés à être repris dans la programmation finale. Elle est aussi l'occasion d'ajustement dans la construction du robot : « Pour pouvoir faire [faire] différents mouvements à notre robot, nous avons eu l'idée de faire tourner la base du robot afin que notre personnage suive les mouvements de façon réaliste […] Pour ce faire, nous avons utilisé un troisième moteur » (équipe 3).

Ce n'est pas le cas pour l'équipe 4 qui travaille de façon très linéaire. Le choix et la construction du robot constituent pour eux la première étape du travail, préliminaire à toute exploration, et ils n'y reviendront pas : « Nous avons officiellement terminé la construction de notre robot ! Nous n'y retoucherons plus » (équipe 4).

4.2.2.2 Exploration mathématique. Les équipes 1, 2, 3, 5 et 8 s'engagent dans une modélisation mathématique poussée avant toute tentative de programmation. Cette exploration vise à mieux appréhender l'objet mathématique visé et à repérer les éléments mathématiques clés qui devront être transposés sous forme de variables informatiques : « Avant de commencer à programmer, nous avons décidé d'enrichir nos connaissances mathématiques sur ce sujet » (équipe 5).

Ces équipes raisonnent en termes généraux, et cherchent des caractérisations mathématiques et informatiques indépendantes des conditions de réalisation du déplacement. La figure 5 montre une partie de l'exploration réalisée par l'équipe 1. Le tracé de la figure les amène à comprendre que les éléments mathématiques permettant de décrire le triangle sont l'angle extérieur et la longueur des côtés. Les notations en bas à gauche de l'image traduisent ces éléments mathématiques en termes de puissance et de nombre de rotation des moteurs. Par exemple, une rotation externe de 120 degrés peut s'obtenir en donnant des puissances opposées à chacun des moteurs et en ajustant le nombre de rotations : pour des puissances de 50, le nombre de rotations est 0,686, pour des puissances de 30, le nombre de rotations est 0,9.

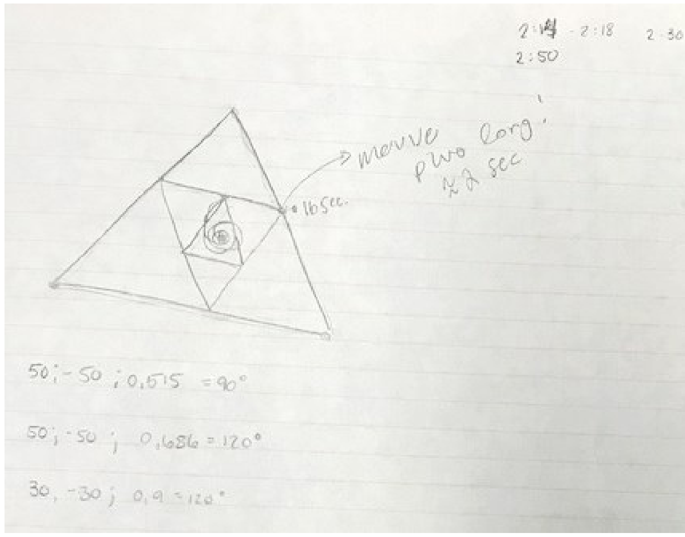
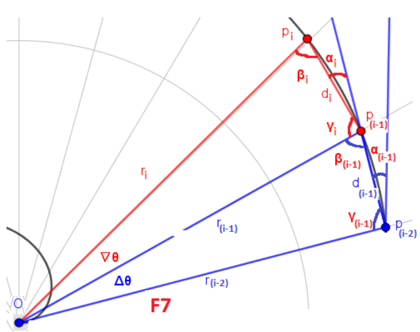


Figure 4. Modélisation par l'équipe 1 du tracé des triangles équilatéraux
en termes de puissance et de nombre de rotation des moteurs

La figure 6 résume le travail de modélisation réalisée par l'équipe 8. La spirale d'Archimède est d'abord décomposée en positions successives du robot (à gauche de l'image), elles-mêmes décrites algébriquement selon leurs coordonnées polaires (colonne « Formule » du tableau de droite) ce qui permet de définir enfin les variables qui seront utilisées dans l'algorithme (colonne « Variable utilisée dans le programme » du tableau de droite). Ce travail mathématique préalable permet de déterminer l'angle de rotation et la distance à parcourir par le robot, qui sont les commandes informatiques pertinentes.



Formule	Variable utilisées dans le programme
$r_{i-1} = \rho(\theta) = 2\pi + (i-1)\times\Delta\theta$	r_{i-1} → rp : désigne le rayon précédent qui correspond à la position p_{i-1} du robot sur la spirale.
$r_i = \rho(\theta) = r_{i-1} + \Delta\theta$	r_i →ri : désigne le rayon actuel qui correspond à la position p_i du robot sur la spirale.
$d_i = \sqrt{r_{i-1}^2 + r_i^2 - 2.r_{i-1}.r_i.\cos(\Delta\theta)}$	d_i →di : déplacement du robot de la position p_{i-1} à la position p_i
$\beta_i = \sin^{-1}(\frac{r_{i-1}.\sin(\Delta\theta)}{d_i})$	β_i → bi : angle utilisée dans la formule R22 pour calculer l'angle α_i de déviation du robot. β_{i-1} → bp : angle de l'étape(i-1) utilisée dans la formule R22 pour calculer l'angle α_i de déviation du robot. (Voir F7 ci-dessous)
$\alpha_i = \Delta\theta + \beta_i - \beta_{i-1}$	$\Delta\theta$ → pas : incrémentation de l'angle pour passer de la position p_{i-1} du robot à la position p_i α_i → a_i : angle de déviation du robot avant le déplacement di

Figure 5. Modélisation de la spirale d'Archimède par l'équipe 8

Dans une démarche assez similaire, l'équipe 3 se livre à une exploration mathématique qui vise à établir les équations algébriques définissant les objets mathématiques représentant les trajectoires. Ce travail est réalisé dans le logiciel Geogebra (figure 7).

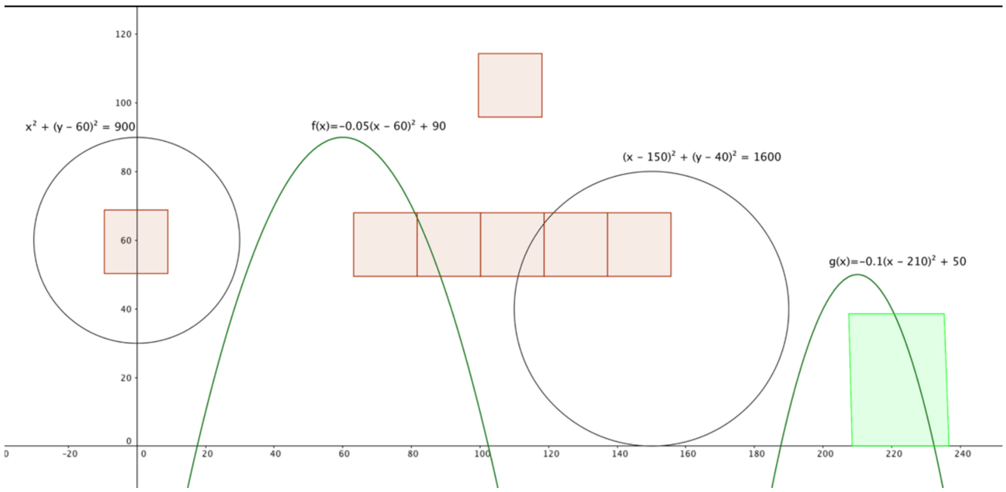


Figure 6. Modélisation mathématique des trajectoires du robot par l'équipe 3

Les équipes 4, 6 et 7 ne réalisent pas d'exploration mathématique préalable. Pour ces équipes, l'exploration est mixte. La partie mathématique se fait, en partie pendant la phase d'exploration informatique, en partie pendant la phase de mise en œuvre, dans un fonctionnement par essais et erreurs.

4.2.3 Planification et mise en œuvre

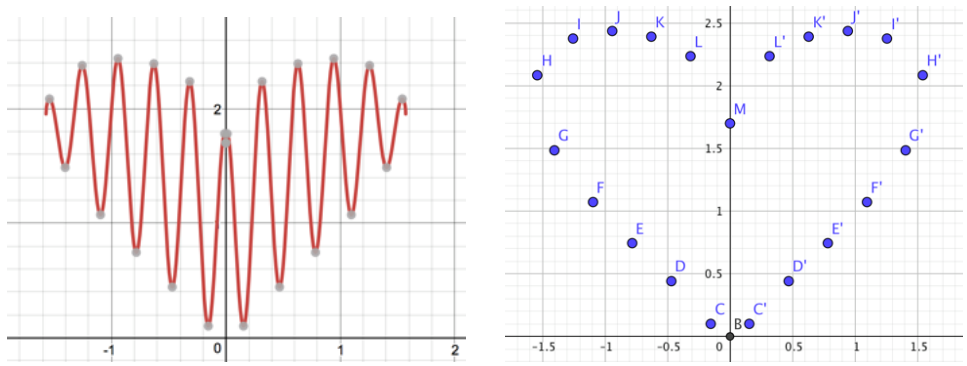
La planification est d'ordre algorithmique et chorégraphique. Elle consiste à décrire une séquence de mouvements, structurée selon des caractéristiques mathématiques, esthétiques et rythmiques. Toutes les équipes réalisent une planification par étapes chorégraphiques. Les chorégraphies sont découpées en moments, chaque moment est composé d'une séquence de mouvements traduite en une procédure algorithmique incluant une itération sous forme de boucle. La programmation repose donc sur une recherche de motifs, souvent issus de l'exploration mathématique. L'enjeu est de repérer dans la structure mathématique une propriété ou une relation récurrente. On est ici en prise directe avec une pensée informatique qui permet de décomposer le problème (la succession chorégraphique des mouvements du robot) en sous-problèmes (les moments de la chorégraphie), eux-mêmes descriptibles en termes de répétions d'une structure générale (partie d'une figure géométrique, séquence de mouvements de bras, modulation de vitesse).

Conformément au modèle de Rott (2011), nous constatons que toutes les équipes fonctionnent avec des allers et retours permanents entre planification et mise en œuvre. Une fois l'opération à itérer repérée, sa traduction algorithmique en paramètres pour les commandes des moteurs est mise à l'épreuve du comportement réel du robot, qui conduit en général à un ajustement par essais et erreurs. Même l'équipe 8, qui a effectué un travail de modélisation mathématique très poussé afin d'obtenir une trajectoire physique la plus proche possible de l'objet théorique mathématique a dû corriger à chaque pas les approximations dans les calculs d'angle de rotation.

Les équipes 2, 3, 4 et 5 ont dû, quant à elles, revoir à la baisse leurs exigences mathématiques pour obtenir un déplacement réaliste du robot. L'équipe 3 modifie les équations théoriques dans Géogébra au fur et à mesure de la programmation.

> Nous avons dû jouer avec les paramètres très souvent. Pour certaines coniques, nous avons fini par autant modifier les paramètres dans la programmation que les paramètres du plan GeoGebra de départ (pour conserver les bonnes équations des coniques dans le fichier GeoGebra). (Équipe 3)

Les équipes 4 et 5 abandonnent l'idée d'une description fonctionnelle de la trajectoire pour revenir soit à une description par points caractéristiques dans le plan cartésien, soit à des figures mieux connues comme les polygones réguliers. La figure 8 illustre le choix réalisé par l'équipe 4 pour une figure géométrique en forme de cœur. L'équipe 4 qui revendiquait l'idée d'explorer une représentation mathématique difficile, sous forme de coordonnées polaires, réalise que la traduction du registre analytique vers le registre algorithmique est trop complexe. Elle décide alors de changer de registre de représentation de départ, en travaillant dans le registre géométrique, et de miser sur la complexité conceptuelle de l'objet, en choisissant d'explorer les fractales.



$$\{|x| < 2 : \sqrt{\cos x}\ \cos(20x) + 0.7 + \sqrt{|x|}\}$$

Figure 7. Simplification de la description mathématique choisie pour l'équipe 4

Les étapes d'exploration et de planification sont très liées. En effet, la sélection des commandes, leurs mises en relations dans une structure algorithmique et la détermination des variables informatiques pertinentes amènent un travail mathématique sur des objets comme les angles des polygones réguliers, l'équivalence sémantique et syntaxique d'expressions algébriques, le rôle des paramètres dans une équation fonctionnelle, les régularités dans une figure géométrique (symétrie, récursivité). Le travail informatique s'articule avec le travail informatique à travers, par exemple, l'établissement de liens entre la puissance de rotation du moteur, la vitesse de déplacement du robot et la distance parcourue. La traduction de propriétés mathématiques en instructions de programmation structurées suppose la prise en compte d'enjeux algorithmiques comme le nombre et la nature des variables informatiques, le caractère général d'un algorithme ou la définition optimale de l'itération à effectuer. La capacité à généraliser est au cœur de cette phase. Elle constitue un enjeu aussi bien du point de vue mathématique qu'algorithmique « Nous avons effectué des boucles et des conditions pour simplifier la longueur du programme et nous rapprocher davantage d'une généralisation de toutes les fractales » (équipe 5). Le nombre de variables à utiliser est un obstacle fréquent en programmation. La création de variables différentes pour capturer les différentes valeurs prises par un même objet au cours du temps dénote un processus de généralisation en cours, mais encore inabouti (Venant, 2022).

> Nous avons beaucoup utilisé les variables dans le calcul des distances entre les points et la différence d'angle. Pour calculer la distance entre les points, nous avons utilisé la formule pour calculer l'hypoténuse d'un triangle rectangle. […] Nous avons décidé d'utiliser une variable différente pour chaque passage d'un point à un autre pour ne pas nous confondre lors de la programmation. […] À la moitié du cœur, nous utilisons la symétrie pour faire le processus inverse qui part du point intérieur du cœur au point de départ qui forme la pointe du cœur. (Équipe 4)

4.2.4 Vérification

Cette phase est difficile à isoler en contexte de programmation. Elle s’entremêle à toutes les autres étapes décrites précédemment, chaque fois qu’une hypothèse est soumise à la validation du comportement réel du robot. Le processus de résolution est définitivement cyclique et repose sur des allers et retours permanents entre anticipation mathématique, programmation, construction du robot et mise à l’épreuve des ajustements effectués. Le nombre et la variété des contraintes à prendre en compte, depuis l’adéquation du modèle mathématique jusqu’à l’état de propreté du sol, rend impossible d’anticiper toutes les erreurs. Le repérage de ces erreurs et leur traitement font donc partie intégrante du processus de résolution. Le débogage est, de fait, au cœur de la pensée informatique, et du cycle de résolution. Il s’agit de trouver un équilibre entre anticipation et correction des erreurs. La recherche d’erreurs est facilitée par une décomposition du problème global en sous-problèmes locaux. Par exemple, la réalisation d’une figure complexe, comme des polygones emboîtés ou une fractale, peut se décomposer sous forme de fonctions pour les mouvements de base, de modules simples itérant ces fonctions pour créer le motif initial, et de modules plus généraux, itérant les modules simples pour créer la figure complexe visée. Décomposer ainsi un problème, et donc sa solution, en sous-parties qui sont ensuite combinées pour résoudre la question initiale est constitutif de la pensée informatique. Cette stratégie ne s’applique pas uniquement à l’élaboration des programmes informatiques. Par exemple, l’équipe 1 l’utilise pour construire le robot « par petits bouts » en testant à chaque fois la viabilité de la partie construite pour les mouvements chorégraphiques anticipés : « Nous avons pris l’habitude de tester nos constructions avec différents programmes afin de nous assurer une moindre marge d’erreur dans le futur » (équipe 1).

Les ajustements réalisés au cours de la résolution sont de différentes natures. Ils peuvent être techniques quand il s’agit de modifier la construction du robot en ajoutant ou déplaçant des pièces, par exemple pour améliorer l’équilibre ou la résistance aux accélérations, ou encore de jouer sur les engrenages pour des déplacements de plus grande amplitude…. Ils peuvent également être mathématiques, quand il s’agit de modifier ou simplifier l’objet mathématique, de changer des paramètres dans les équations ou encore de travailler sur l’angle externe plutôt qu’interne… Ils peuvent enfin être algorithmiques, quand il s’agit de factoriser des procédures, de changer une variable ou d’ajuster sa valeur, ou encore de changer de type de programmation. Le fonctionnement par essais et erreurs permet souvent de choisir entre deux solutions techniques ou algorithmiques : « Nous avons testé plusieurs alternatives : la boucle de rotations infinie ne fonctionne pas. En revanche, la boucle de rotations activée avec une variable fonctionne très bien » (équipe 7).

Les journaux de bord montrent le développement, au fil du projet, de stratégies de recherche et de traitement systématique des erreurs. Ces stratégies sont de différentes natures : modulation de la vitesse d'exécution du robot pour mettre à l'épreuve la précision mathématique, ajout d'instructions pour repérer des moments clés dans l'exécution, affichage des valeurs de certaines variables pour vérifier l'adéquation avec le modèle théorique, exploitation des rétroactions du logiciel, utilisation d'artefacts comme des sons, des *posts-it* ou des crayons fixés sur le robot pour visualiser et valider sa trajectoire : « Nous avons développé une astuce qui nous a permis de détecter les erreurs plus facilement. Celle-ci consiste à ajouter un son à des endroits précis si et seulement si la commande désirée est exécutée » (équipe 5).

4.5 Synthèse

Nos analyses confirment l'hypothèse qu'un projet robotique constitue une occasion de mettre en œuvre des processus de résolution de problèmes. Nous avons ainsi pu identifier les différentes phases du modèle de Rott (2011). Nous avons également mis au jour des caractéristiques propres au contexte de la robotique. Tout d'abord, l'appropriation du problème peut se faire soit par une entrée technique de construction du robot, soit par une entrée théorique portant sur le choix des objets mathématiques. Cette articulation entre théorie et pratique se retrouve également dans la phase d'exploration, indépendamment d'ailleurs de celle réalisée dans la phase d'appropriation. Nous avons ainsi observé deux types d'exploration, mathématique et informatique, qui s'entrecroisent jusqu'à l'élaboration d'une stratégie de programmation. Les choix réalisés influencent les processus de généralisation et de modélisation, qui sous-tendent la phase d'exploration. L'avancement du travail de programmation informatique repose sur une dynamique entre le débogage, les ajustements techniques et théoriques, et les processus de modélisation et de généralisation. Cette dynamique est en permanence soumise à l'épreuve du comportement du robot.

À la lumière de ces résultats, nous proposons dans la figure 9 un modèle du processus de la résolution de problèmes en contexte robotique, adapté de celui de Rott (2011). Nous y mettons en évidence le rôle central et cyclique de la vérification. Nous mettons également en évidence le rôle des processus de généralisation et de modélisation qui sous-tendent le travail de programmation informatique, toujours sous le contrôle du comportement réel du robot.

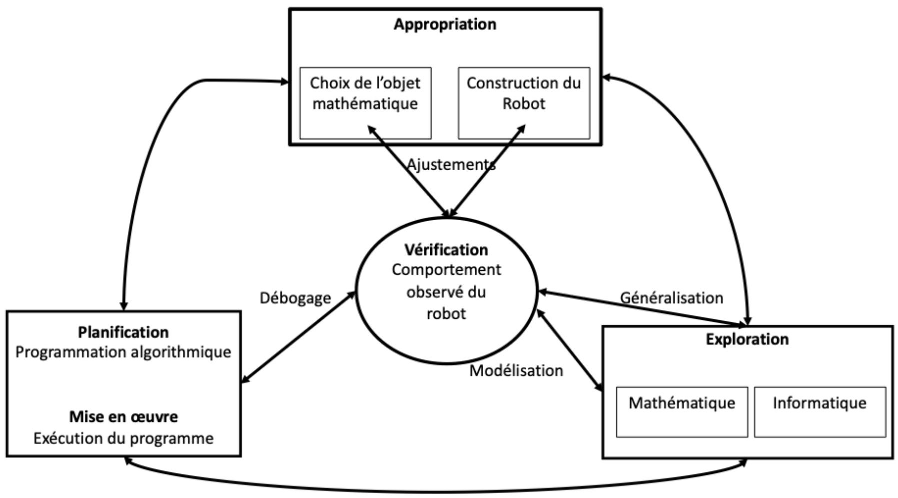


Figure 8. Modèle du processus de la résolution de problèmes en robotique pédagogique

Conclusion

Ce projet robotique a constitué, conformément à notre hypothèse de départ, une activité signifiante, interdisciplinaire, propice à la mise en relation des mathématiques, des sciences, de la technologie et de la danse. Nous n'avons pas analysé ici les enjeux artistiques. Nous notons simplement que ce travail a constitué l'occasion pour les étudiants, et leur formateur, de découvrir les enjeux mathématiques rencontrés par les chorégraphies, ce qui a contribué au côté signifiant de l'activité. La question de la transposition en milieu scolaire se pose cependant. Les résultats observés nous ont incités à expérimenter ce genre de tâches dans des classes du secondaire. Les observations sont en cours.

Notre premier objectif concernait la possibilité d'engager les apprenants dans un processus de résolution complexe. Il ressort de nos analyses que cette complexité prend différentes formes. Pour certaines équipes, elle réside dans la complexité de l'objet mathématique exploré et dans la profondeur de la modélisation mathématique réalisée. D'autres équipes se sont davantage confrontées à une complexité algorithmique, en explorant par exemple différents types d'itérations, les possibilités de la programmation en parallèle ou les enjeux de la récursivité selon le langage de programmation choisi. D'autres équipes enfin ont également abordé la complexité esthétique et artistique en poussant très loin les enjeux de synchronisation, de rythme et de mise en scène. Aucune équipe n'a abordé de front les trois types de complexité.

Du point de vue informatique, nous nous intéressons tout particulièrement au développement de la pensée informatique. Les analyses montrent que toutes ses composantes ont été sollicitées : décomposition du problème, reconnaissance de motifs, abstraction et enjeux algorithmiques. D'autres composantes habituellement liées à la pensée informatique (Romero et al., 2017), que nous n'avons pas placées au centre de nos analyses, ont pu également être observées, comme la collaboration et la persévérance. Les étudiants se sont vraiment partagé les tâches, chacun trouvant sa place dans le projet, selon son degré d'aisance en programmation, en construction, en mathématiques, ou selon sa créativité artistique. Nous avons également mis en évidence la non-linéarité du processus de résolution de problèmes en contexte de robotique pédagogique. Les allers et retours entre les différentes phases sont permanents, guidés par la phase de vérification qui prend, dans ce contexte, une place centrale. Toutes les équipes ont donc mis en œuvre les composantes de développement de la pensée informatique, et résolu tour à tour des problèmes, plus ou moins complexes, de nature algorithmique, technique, mathématique et chorégraphique.

Notre deuxième objectif visait à mieux comprendre l'activité mathématique effectuée. De fait, les concepts et processus mis en œuvre sont difficiles à circonscrire. Le caractère signifiant repose, en effet, également sur la liberté laissée à l'apprenant dans le choix du problème et les stratégies mises en place pour le résoudre. Il est donc difficile d'anticiper, par exemple, quels sont les objets mathématiques qui seront explorés, et la nature exacte de cette exploration. Certaines équipes se sont livrées à un travail de modélisation mathématique très poussée, alors que d'autres ont travaillé par essais et erreurs tout au long du projet. Pour ces équipes, le travail mathématique relève davantage de la mobilisation de connaissances mathématiques que d'une résolution de problèmes complexes. Cependant, toutes les équipes ont été amenées à mettre en œuvre un processus de généralisation et à revisiter le sens de concepts mathématiques, comme les angles des polygones ou les paramètres des fonctions. Les objets mathématiques ne sont donc pas restés cantonnés dans le rôle d'outil dénoncé par Robert (1998). Quel que soit le niveau de complexité mathématique finalement atteint, un véritable travail mathématique semble avoir eu lieu au cours la réalisation du projet.

Cette expérience nous incite donc à nous poser les questions suivantes : quels instruments de travail mathématique (Rabardel, 1995; Trouche; 2005; Venant, à paraître) la programmation informatique permet-elle de construire? Un travail algorithmique peut-il être utile pour aborder explicitement des concepts et processus mathématiques inscrits dans le programme de formation de l'école québécoise? Nous travaillons actuellement à élaborer d'autres tâches, plus ou moins ouvertes, nous permettant d'explorer ces questions (Venant et al., à paraître). D'un point de vue didactique, nous nous intéressons particulièrement au rôle central que joue la validation dans la résolution de problèmes en contexte informatique et qui ouvre des perspectives quant au développement du contrôle en situation de résolution de problèmes mathématiques (Saboya et al., 2015).

Références

Barabé, G. et Proulx, J. (2017). Révolutionner l'enseignement des mathématiques: le projet visionnaire de Seymour Papert. *For the Learning of Mathematics, 37*(2), 25-29.

Benesh, R. (1969). *An introduction to Benesh dance notation*. Dance Horizon.

Benitti, F. B. V. et Spolaôr, N. (2017). How have robots supported STEM teaching? Dans M. S. Khine (dir.), *Robotics in STEM education* (p. 103-129). Springer.

Birringer, J. (2013). Bauhaus, constructivism, performance. *PAJ: A Journal of Performance and Art, 35*(2), 39-52. https://doi.org/10.1162/PAJJ_a_00145

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? Dans S. Cho (dir.), *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education* (p. 73-96). Springer.

Davidson, A. (2003). *Les enjeux du numérique en danse: pour une chorégraphie interactive* [Thèse de doctorat, Université Paris 8]. Thèses. https://www.theses.fr/2003PA082658

De Keersmaeker, A. T. (2019). Comme je marche, je danse. *Repères, cahier de danse*, (1), 15-15. https://doi.org/10.3917/reper.042.0015

Favier, S. (2022). *Étude des processus de résolution de problèmes par essais et ajustements en classe de mathématiques à Genève.* [Thèse de doctorat, Université de Genève]. TEL. https://archive-ouverte.unige.ch/unige:159466

Freiman, V. et Savard, A. (2014). Résolution de problèmes en mathématiques. *Éducation et francophonie, 42*(2), 1-6. https://doi.org/10.7202/1027902ar

Gouvernement du Québec. (2006). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, deuxième cycle*. Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.

Gouvernement du Québec. (2019). *Cadre de référence de la compétence numérique.* Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur.

Lajoie, C. et Bednarz, N. (2012). Évolution de la résolution de problèmes en enseignement des mathématiques au Québec: un parcours sur cent ans des programmes et documents pédagogiques. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 12*(2), 178-213. https://doi.org/10.7202/1027903ar

Lajoie, C. et Bednarz, N. (2014). La résolution de problème en mathématiques au Québec : évolution des rôles assignés par les programmes et les conseils donnés aux enseignants. *Éducation et francophonie, 42*(2), 7-23. https://doi.org/10.7202/1027903ar

Lajoie, C. et Bednarz, N. (2016). La notion de situation-problème en mathématiques au début du XXIe siècle au Québec: rupture ou continuité ? *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 16*(1), 1-27. https://doi.org/10.1080/14926156.2014.993443

Lenoir, Y. (2003). *La pratique de l'interdisciplinarité dans l'enseignement: pour construire des savoirs transversaux et intégrés dans le cadre d'une approche par compétences* [présentation faite au ministère de l'Éducation du Québec].

Menicacci, A. (2003). *Rapports entre danse et technolo[g]ies dans la création et la pédagogie: expériences, réflexions, et propositions* [Thèse de doctorat, université Paris 8]. Thèses. https://www.theses.fr/2003PA083700

Mickelson, J. et Ju, W. (2010). Math propulsion: Engaging math learners through embodied performance & visualization. Dans M. D. Gross et N. J. Nunes (dir.), *Proceedings of the fifth international conference on Tangible, embedded, and embodied interaction* (p. 101-108). Association for Computing Machinery

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas*. Basic books.

Papert, S. (1993). *The children's machine: Rethinking school in the age of the computer*. Basic Books, Inc.

Papert, S. (2000). What's the big idea? Toward a pedagogy of idea power. *IBM systems journal, 39*(3.4), 720-729. https://doi.org/10.1147/sj.393.0720

Polya, G. (2004). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton university press.

Prudhommeau, G. (1987). Danse et mathématiques. *Séminaire de Philosophie et Mathématiques*, 9, 1-22.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies : approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 8*(2), 139-190.

Romero, M., Lille, B. et Patiño, A. (2017). *Usages créatifs du numérique pour l'apprentissage au XXIe siècle*. Presses de l'Université du Québec.

Rott, B. (2011). *Models of the problem solving process–A discussion referring to the processes of fifth graders*. Dans T. Bergqvist (dir.), *Proceedings from the 13th ProMath conference* (p. 65-72). Umeå University.

Saboya, M., Bernarz, N. et Hitt, F. (2015). Le contrôle exercé en algèbre: analyse de ses manifestations chez les élèves, éclairage sur sa conceptualisation. Partie 1 : La résolution de problèmes. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 20*, 61-100.

Schaffer, K. et Stern, E. (2010). Workshop on mathematics and dance. Dans G. W. Hart et R. Sarhangi (dir.), *Proceedings of Bridges 2010: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture* (p. 151-154). Tessellations Publishing.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press Inc.

Trouche, L. (2005). Des artefacts aux instruments, une approche pour guider et intégrer les usages des outils de calcul dans l'enseignement des mathématiques. Dans J. Moisan (dir.), *Université d'été, Le calcul sous toutes ses formes*. Académie de Clermont-Ferrand.

Venant, F. (2018). Programmer les mathématiques: la pensée informatique à l'école primaire. *Bulletin AMQ, 58*(3), 57-70.

Venant, F. (2022). *La programmation informatique dans la formation initiale des enseignants de mathématiques. Prendre en compte les enjeux algorithmiques* [présentation orale]. Colloque Rendez-vous didactique, LDAR.

Venant, F. (à paraître). Enjeux didactiques dans les genèses instrumentales professionnelles des futurs enseignants de mathématique au Québec. *Recherches en didactique des mathématiques.*

Venant, F., Jeannotte, D., Passaro, V., Saboya, M., Guillemette, D. et Knoll, E. (à paraître). Pensée algébrique et pensée algorithmique : réflexion autour d'une tâche de généralisation. *Actes du colloque Espace mathématique francophone 2022*, Cotonou, Bénin.

Villani, C., Torossian, C. et Dias, T. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques.* Ministère de l'éducation nationale.

Weil-Barais, A. et Dubois, D. (1993). *L'homme cognitif*. Presses universitaires de France.

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM, 49*(3), 33-35. https://doi.org/10.1145/1118178.1118215

Wing, J. (2011). Research notebook: Computational thinking—What and why. *The Link Magazine*, 6, 20-23.

Activité, apprenant(s), apprentissage

Luis RADFORD
Université Laurentienne
Lradford@laurentian.ca

Résumé : Cet article porte sur le concept d'activité dans une perspective dialectique matérialiste. Dans cette perspective, il ne s'agit pas de voir l'activité « de l'apprenant », pas plus que de voir l'apprenant « de l'activité ». J'explore l'idée selon laquelle, pour apprendre, les apprenants produisent une activité en même temps qu'ils sont produits par celle-ci. Il en résulte que ce que les apprenants apprennent est un processus collectif qui se déroule sur la charpente de trois médiations historico-culturelles : la première agit sur l'objet à apprendre, la deuxième sur la manière dont l'objet à apprendre est saisi, la troisième sur la manière dont apprenants et enseignants se coproduisent ensemble dans une coproduction dont la texture porte en elle les tensions de l'histoire et de la culture.

Mots-clés : activité d'enseignement-apprentissage, matérialisme dialectique, médiations historico-culturelles, Hegel, Marx

Activity, learner(s), learning

Abstract: This article deals with the concept of activity from a dialectical materialist perspective. From this perspective, the question is not about the *learner*'s activity, nor is it about the *activity*'s learner. I explore the idea that, to learn, learners produce an activity at the same time as they are produced by it. As a result, what learners learn is a *collective* process that takes place on the basis of three historical-cultural mediations: the first one operates on the object to be learned, the second on the way the object is learned, the third on the way learners and teachers co-produce themselves together in a co-production whose texture carries the tensions of history and culture

Keywords: teaching-learning activity, dialectical materialism, historical-cultural mediations, Hegel, Marx

Introduction

L'activité de l'apprenant semble suggérer d'emblée un apprenant en train de faire des choses dans un but précis : un apprentissage. L'idée derrière cela est que pour apprendre il faut agir. Il s'agirait alors d'examiner ce que l'apprenant fait pour y arriver. Un prenant étant donné, c'est « ce que » qui serait l'objet d'étude.

Or, on pourrait aussi bien partir à l'envers. Étant donné ce « ce que », c'est-à-dire une activité déjà en place à laquelle l'apprenant s'ajoute, il s'agirait de voir comment l'apprenant s'y insère pour arriver à un apprentissage. Alors que dans le premier cas il s'agit de l'activité de l'« apprenant », dans le deuxième cas il s'agit de l'apprenant de l'« activité ». Le premier cas est celui que l' « éducation centrée sur l'apprenant » a mis en vedette (Neill, 1992; Rugg et Shumaker, 1969). Le deuxième cas est celui du « participationisme », qui conçoit l'apprentissage comme l'insertion du sujet dans une pratique sociale (Lave et Wenger, 1991; Rogoff, 1990).

Dans cet article, je voudrais explorer l'idée d'un apprenant et d'une activité dont l'un ne prend pas l'ascendant sur l'autre. Je voudrais explorer l'idée selon laquelle, pour apprendre, l'apprenant produit une activité et, en même temps, l'activité produit l'apprenant et son apprentissage. Mais à vrai dire, il ne s'agira pas d'un apprenant au singulier, mais des apprenants au pluriel. Ce qui m'intéresse est de voir des apprenants qui apprennent collectivement dans un mouvement qui est tel que ce qu'ils produisent – leur activité – produit en même temps apprenants et enseignants. Toutefois, je ne voudrais pas tomber dans une narrative a-historique qui se limiterait à étudier l'activité produite et productrice comme phénomène en soi. Pour bien la comprendre – pour bien comprendre comment l'activité est produite et ce qu'elle produit et comment elle le produit – je dois la placer dans son contexte historico-culturel.

L'approche proposée, on l'aura déjà deviné, n'est pas tout à fait nouvelle. Elle s'inspire d'un mouvement philosophique qu'on nomme le matérialisme dialectique. Matérialisme, car historiquement parlant, il naît au 19e siècle contre les philosophies idéalistes et empiristes qui concevaient les idées comme production de l'activité de l'individu (activité mentale dans un cas, activité corporelle dans l'autre cas). Dialectique, car l'approche part de l'idée que ceux qui produisent et ce qui est ainsi produit sont toujours en relation dialectique – relation qui est possible par un tiers qui n'est jamais donné a priori, mais qui se fait en même temps que ceux qui produisent et ce qu'ils produisent. Le nom de ce tiers est simple: c'est « activité », l'activité humaine, concrète et sensible. Mais ce terme d'activité est très polysémique. Il faudra donc commencer par préciser son sens.

Les premières sections de cet article essaient de préciser ce sens. Elles portent sur une conception spécifique de l'activité menée par A. N. Leontiev (parfois écrit Leont'ev) (1984) à partir de certaines idées de Vygotski (A. N. Leontiev, 1997; A. A. Leontiev, 2005), idées qui trouvent son origine dans la philosophie de Hegel

(2018) et dont une reformulation, dans le contexte de l'apprentissage scolaire, apparaît dans la théorie de l'objectivation (Radford, 2021a). Ces sections sont suivies par un exemple d'activité d'enseignement-apprentissage dans une école primaire au sujet des savoirs algébriques. Ce que cet exemple vise à montrer, c'est l'enchevêtrement dialectique des élèves, enseignants et savoirs dans une activité qui, loin d'être un moyen innocent de déploiement autonome de la pensée des sujets, est le site constitutif irréductiblement conflictuel d'une pensée à multiples voix qui trouvent ses assises dans l'histoire et la culture.

1. Le concept historico-culturelle d'activité

En faisant référence à la « Phénoménologie de l'esprit » de Hegel (2018), Marx (2007) nous dit que la grandeur de la position théorique de ce penseur est de comprendre l'individu comme s'auto-engendrant; de le comprendre comme le résultat de « son propre travail » (p. 162), de sa propre activité.

Ainsi, Marx reconnaît que c'est Hegel le pionnier de cette idée selon laquelle l'activité humaine est produite par les individus, mais qui, par un effet de retour, finit par produire en même temps ceux qui la produisent. Hegel rompt ainsi avec une longue tradition qui ne voyait dans l'activité des individus qu'une série d'actions dans la réalisation d'un but, c'est-à-dire une tradition qui concevait l'activité d'un point de vue instrumentale. Hegel rompt aussi avec la tradition qui voyait l'humain comme une donnée a priori, une entité déjà faite, prête à faire l'expérience du monde.

Toutefois, malgré la nouveauté qu'apporte Hegel, Marx remarque que celui-ci ne sort pas de l'idéalisme: pour Marx, l'activité chez Hegel demeure une activité « abstraite », car s'il est bien vrai que Hegel reconnaît que, dans leur auto-engendrement, les individus sont confrontés à un monde qui est déjà là devant eux, et donc qu'il y a reconnaissance de quelque chose d'externe à eux (un « objet » matériel ou un « objet » conceptuel, disons une forme géométrique ou une équation), Hegel fait de cette reconnaissance une assimilation ou réappropriation de cet objet par l'individu. Le résultat en est que l'individu que produit l'activité ne peut être saisi qu'« *abstraitement* et engendré par abstraction » (Marx, 2007, p. 163; italique dans l'original). Car cette reconnaissance n'est que l'activité d'un individu qui, tout en agissant (en touchant l'objet, le sentant, le manipulant) « assimile » l'objet et, en ce faisant, réduit l'objet à soi.

Marx trouve dans la position épistémologique de Hegel l'affirmation d'une conscience qui reste toujours enfermée en soi même. La rencontre avec ce qui n'est pas le sujet (c'est-à-dire la rencontre avec l'Autre) est tout de suite suivie par le retour au soi dans un mouvement d'assimilation qui n'est ni plus ni moins que « la dissolution de l'altérité » (Fischbach, 2007, p. 56). C'est pour cela que Marx dit que l'individu chez Hegel « *est* de la nature du soi. Son œil, son oreille. etc., sont *de la nature du soi*; chacune de ses forces essentielles a en lui la propriété de la *soi-ïté* » (Marx, 2007, p. 163; italique dans l'original). S'il arrive que les individus agissent les uns avec les autres, ils le font depuis leur propre perspective. Comme dit Balibar (2014), les individus apparaissent comme s'ils étaient déjà constitués a priori. L'activité à laquelle ils participent ne les modifie pas. Les individus « peuvent entrer en relation les uns avec les autres de différentes manières mais ces relations sont par définition accidentelles, elles ne définissent pas leur essence » (Balibar, 2014, p. 213).

La critique de Marx souligne le fait que Hegel n'arrive pas à saisir que l'individu, bien que paraissant agir librement, selon ses caprices et ses pouvoirs naturels, est en fait un individu ancré dans un monde social, historique et culturel qui affecte profondément son activité d'auto-engendrement et par conséquent, ce qui est ainsi engendré : l'individu lui-même.

C'est à partir de ces idées que le matérialisme dialectique contemporain esquisse un concept d'activité qui souligne l'importance de la nature, de la matérialité de l'action et d'une réalité historique fluide, polyvalente, porteuse des contradictions sociétales. C'est cette activité entendue comme activité historico-culturelle à la fois objective et subjective qui devient le lien entre sujet et monde, entre un sujet jamais donné, toujours à faire et à refaire, toujours en mouvement, et un objet dynamique, transformé continuellement et toujours porteur des structurations sociales à travers lesquelles les individus taillent leur existence. Il s'agit d'une activité qui se déploie toujours à travers des médiations historiques et culturelles.

2. L'activité d'enseignement-apprentissage

Tournons-nous maintenant du côté d'une activité de mathématiques. Il s'agit d'une activité autour de la résolution d'équations dans une classe de 3e année (élèves de 8-9 ans). Le but de l'activité est la rencontre des élèves avec un objet précis: la rencontre avec des formes historiques et culturellement constituées de penser algébriquement les équations avant l'utilisation des lettres. L'activité tourne ainsi sur un travail à partir de deux systèmes sémiotiques non alphanumériques: un système sémiotique concret (SSC) et un système sémiotique iconique (SSI). À travers ces systèmes, les élèves sont invités à traduire des problèmes en mots simples en équations linéaires (comme celui qui apparaît ci-dessous).

Le SSC est composé d'objets matériels :

a) des enveloppes en papier contenant chacune le même nombre inconnu de cartes en carton;

b) des cartes en carton; et
c) le signe égal.[1]

Les enveloppes jouent le rôle d'inconnues tandis que les cartes jouent le rôle de nombres concrets (le rôle des constantes).

Le SSI est dérivé du SSC : il remplace les objets concrets par des dessins iconiques {  , , =, ↑ }. Le signe supplémentaire « flèche » remplace les actions effectuées sur les cartes ou les enveloppes concrètes du SSC pendant le processus de simplification des équations. Les élèves pourraient remplacer la flèche par de simples lignes indiquant qu'une carte ou une enveloppe (ou des ensembles de cartes) sont retirées.

En deuxième année, les élèves ont commencé à se familiariser avec la procédure d'isolement de l'inconnue à l'aide du SSC et du SSI (Radford, 2017). Au début de l'activité d'enseignement-apprentissage de 3e année que je présente ici (qui est la première activité de 3e année sur les équations), l'enseignante organise une discussion générale d'un problème-histoire qu'elle narre à la classe en même temps qu'elle forme l'équation au tableau. Le problème-histoire est le suivant : il y a un enfant, Sara, qui a une enveloppe contenant des cartes de hockey. En montrant l'enveloppe à la classe, l'enseignante dit : « L'enveloppe est scellée. Nous ne savons pas combien de cartes de hockey il y a à l'intérieur ». Après avoir collé l'enveloppe au tableau, elle dit : « Mais Sara avait déjà 3 cartes de hockey », et elle colle les 3 cartes au tableau. Ensuite, l'enseignante dit à la classe que l'amie de Sara, Christina, a 7 cartes de hockey, et colle 7 cartes à côté de l'enveloppe et des cartes de Sara. Elle dessine un signe égal entre les deux groupes d'objets. Elle demande : « Quel est ce symbole ? Qu'est-ce qu'il signifie ? » À partir de ce que la classe a appris en 2e année, un élève répond : « Cela signifie que Sara et Christina doivent avoir le même nombre de cartes de hockey ». Puis l'enseignante dit : « Je voudrais qu'un élève utilise ce qui est au tableau pour essayer de trouver combien de cartes il y a dans l'enveloppe ».

Jase se porte volontaire. À gauche de la Figure 1, on voit Jase et l'équation dans le SSC. Jase trouve rapidement qu'il y a 4 cartes dans l'enveloppe, car, comme il le dit, « 4 (en montrant l'enveloppe) plus 3 égalent 7 (en montrant les 7 cartes) ». L'enseignante félicite Jase pour la solution proposée et demande à la classe de penser à une autre façon de résoudre le problème. William procède suivant une procédure de comparaison de termes : il entoure un bloc de 3 cartes du côté gauche

---

[1] Le signe égal apparaît dessiné sur un petit carton. Or, comme nous verrons plus loin, lors des discussions au tableau, il est souvent remplacé par son signe écrit « = » ; dans les discussions au pupitre, il arrive qu'il soit remplacé par un espace entre les deux côtés de l'équation.

de l'équation et 3 cartes du côté droit. Il dessine un deuxième signe égal pour signifier que les 3 cartes de gauche sont égales aux 3 cartes identifiées à droite. « Donc, ceci ici (en pointant du doigt les 4 cartes restantes) doit être égal à ceci (en pointant du doigt l'enveloppe; voir à droite de la Figure 1). L'enveloppe doit contenir 4 cartes ».

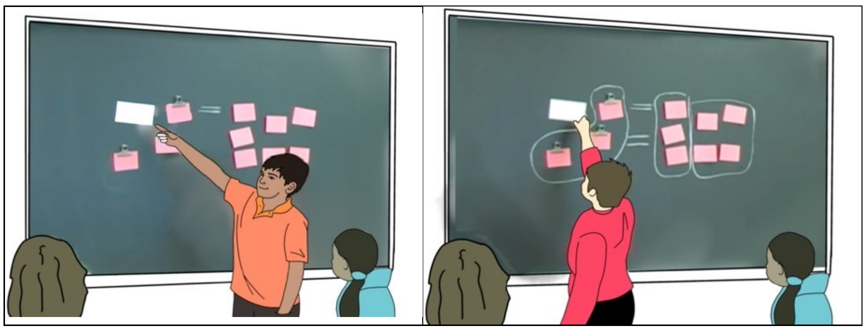


Figure 1. Des procédures arithmétiques pour résoudre $x + 3 = 7$

L'« objet » de l'activité (penser les équations et leur résolution de manière algébrique) n' apparaît pas de manière naturelle. Après avoir salué l'idée de William, pour essayer de rendre cet objet visible – c'est-à-dire objet d'attention et de conscience – en se référant à ce qu'ils avaient appris en deuxième année, l'enseignant suggère à la classe de penser à « isoler » l'enveloppe : « Qu'est-ce qu'on entend par isoler ? Si je vous dis que j'aimerais isoler l'enveloppe... ».

La classe est ainsi invitée à continuer à participer dans la production d'idées. Cyr, l'un des élèves, répond : « Est-ce que ça veut dire comme la mettre toute seule? » Lorsque l'enseignante lui demande de mieux expliquer l'idée, Cyr va au tableau et retire une carte après l'autre de chaque côté de l'équation, montrant ainsi la procédure algébrique. La Figure 2 (à gauche) montre le moment où Cyr, après avoir enlevé la deuxième carte du côté gauche de l'équation, enlève la deuxième carte du côté droit de l'équation. La Figure 2 (au milieu) montre le moment où il enlève la troisième carte du côté droit, après avoir enlevé la troisième carte du côté gauche. Sa résolution est montrée par des actions plutôt qu'articulée avec des mots. Ensuite, en posant des questions à Cyr, l'enseignante reformule les actions de Cyr pour toute la classe : « Si tu retires une [carte] de ce côté, que fais-tu ? » Cyr répond : « J'en retire une autre de ce côté [l'autre côté de l'équation] ». L'enseignante utilise le signe « flèche » pour indiquer la symbolisation des actions. En pointant du doigt l'enveloppe, elle fait voir qu'il y a 4 cartes dans l'enveloppe (Figure 2, à droite).

En travaillant avec Cyr et en rendant compte des actions de l'élève par le langage, l'enseignante s'efforce de permettre aux élèves de saisir les idées qui sous-tendent la procédure algébrique.

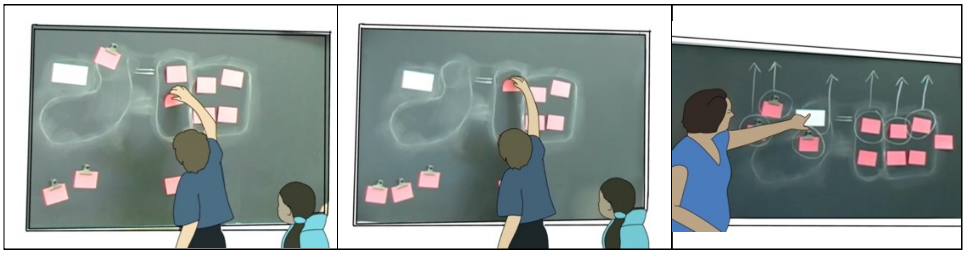


Figure 2. Cyr utilise la méthode d'isolation; l'enseignante récapitule la procédure de Cyr

C'est cet événement spatio-temporel dans lequel se montrent les idées qui constituent l'activité du collectif, l'activité d'enseignement-apprentissage. Cette activité inclut les idées des élèves, leurs actions sur les objets concrets (enveloppes, cartes), le questionnement de l'enseignante et les reformulations langagières qu'elle fait des idées qui circulent. Il n'y a pas deux activités, l'une de l'enseignante et l'autre des élèves. Il y en a une seule : « l'activité d'enseignement-apprentissage ». Bien sûr, l'enseignante ne fait pas la même chose que les élèves. Mais cela ne l'empêche pas de faire partie du collectif. Elle travaille avec les élèves dans la production des idées mathématiques, à l'instar des musiciens et du directeur ou directrice d'orchestre qui travaillent ensemble dans la production d'une pièce musicale dans une salle de concerts (Radford, 2019). Comme dans le cas de l'orchestre, dans l'activité d'enseignement-apprentissage, il y a des divisions du travail, mais ce travail est fait ensemble.

Soulignons deux aspects importants de l'extrait de l'activité d'enseignement-apprentissage mentionné ci-dessus.

Premièrement, cette activité donne lieu à deux manières de penser le problème, l'une, proposée par les élèves, de nature arithmétique; l'autre, qui émerge d'un travail conjoint élèves-enseignante, et qui est de nature algébrique. L'activité du collectif produit ainsi deux idées différentes. Cette différence est une caractéristique essentielle du mouvement « dialectique » de l'activité. La manière de penser les équations algébriquement n'aura de sens qu'en tant que quelque chose de différent de la pensée arithmétique. Dans sa saisie, l'objet devient objet de conscience « dans un processus vivant » (Vygotski, 1985, p. 145), « dans le processus d'une activité appropriée à une fin » (p. 151) qui permet sa saisie en le distinguant de ce que qu'il n'est pas. Vu de cette manière, les méthodes arithmétiques évoquées par l'équation $x + 3 = 7$ au début de l'activité ne sont pas une perte de temps; la présence de ces méthodes sont des éléments essentiels de la rencontre des élèves avec l'algèbre.

Deuxièmement, l'activité des élèves ne se réduit pas à une simple interaction des uns avec les autres. Penser l'activité ainsi, revient à ne voir l'activité que comme événement essentiellement produit « sur place ». Cela revient à oublier que l'interaction des sujets (par exemple, la manière de se positionner dans l'interaction et se diriger à l'autre, l'*agency* ou l'espace d'expression des sujets, les questions du pouvoir) s'inscrit dans des relations sociales qui ont une histoire politique et culturelle. Bref, penser l'activité ainsi, comme *pure interaction*, c'est faire le même type d'abstraction que Marx condamne chez Hegel. On finit par croire que l'espace que les élèves de notre exemple trouvent dans l'activité précédente pour présenter leurs idées est « naturel », « neutre », qu'il va de soi. Or, en réalité il est le produit d'un cheminement historique, politique et culturel.

On peut contraster l'activité de 3e année mentionnée ci-dessus avec celle d'une classe d'élèves qui commençaient l'école secondaire au Brunei issue d'une recherche menée par Zurina Harun (2010). Harun raconte les difficultés à faire travailler les élèves en petits groupes, un peu à la manière des écoles occidentales (voir Figure 3). Elle dit : « ces élèves ont été exposés à l'apprentissage par cœur tout au long de leur vie scolaire, associée au contexte culturel de la communauté : "écoute tes aînés", "le silence est une bonne chose", "ne parle que lorsqu'on te parle", etc. » (Harun, 2010, p. 259, traduction libre[2]). Harun (à droite dans la Figure 3) a dû faire un effort extraordinaire pour que les élèves s'expriment. « Je devais jouer un rôle principal pendant la plupart des leçons expérimentales » (p. 259, traduction libre[3]).

Figure 3. Travail d'équipe dans une école au Brunei (Harun, 2010, p. 188)

Il nous faut voir l'activité et les interactions qu'elle subsume comme activité ancrée dans un monde qui offre les « médiations historiques et culturelles » autour desquelles se déploie l'activité elle-même et s'auto-engendrent les sujets.

---

[2] These students had been exposed to rote learning methodology throughout their school lives, coupled with the cultural background of the community of "listen to thy elders", "silent is good", "only speak when spoken to" and so forth (Harun, 2010, p. 259).

[3] I had to play a leading role throughout most of the experimental lessons (Harun, 2010, p. 259).

3. Les médiations historico-culturelles de l'activité

Nous avons vu précédemment que, dans sa critique, Marx soulignait que chez Hegel, individu et activité sont traités de manière abstraite. Quand on se penche du côté de l'activité d'enseignement-apprentissage, cette abstraction finit par cacher trois médiations historico-culturelles que je voudrais mettre en évidence.

3.1 Première médiation

Nous avons dit que le but de l'activité d'enseignement-apprentissage est la rencontre des élèves avec un objet précis : dans notre exemple, cet objet est constitué par des formes historiques et culturelles de penser algébriquement les équations. Mais il ne faut pas penser que cet objet est simplement là, prêt à se donner à une conscience qui, en trouvant l'objet devant elle, ferait sa reconnaissance par un procédé d'assimilation. Ce que l'abstraction Hégélienne nous cache ici c'est que cet objet que le sujet rencontre contient déjà en lui-même les structurations sociales à travers lesquelles les individus produisent leur existence. Il ne s'agit donc pas d'un objet « en soi », mais d'un objet historico-culturel, produit sous certaines circonstances et transformé selon certains besoins.

Dans notre cas, l'« objet » de l'activité (des formes historiques et culturellement constituées de penser algébriquement les équations) a une longue histoire. Ainsi, la procédure d'isolement de l'inconnue a été un aspect clé de la systématisation de l'algèbre menée par les mathématiciens arabes au 8e et au 9e siècles (Al-Khwārizmī et autres; voir Oaks et Alkhateeb, 2007). Cette procédure, qui implique des opérations avec des grandeurs connues et inconnues pour simplifier les équations, s'est développée dans un contexte culturel, économique et politique de partage d'héritages et de systématisation du calcul de quantités. Les mathématiciens appelaient ces opérations simplificatrices *al-gabr* et *al-muqābala*, et c'est à la première de ces opérations que notre terme moderne d'algèbre emprunte son nom. Plutôt que de tomber du ciel comme de la pluie, le processus d'isolation de l'inconnue obéit à une systématisation des procédures subsumées dans une certaine rationalité culturelle qui commence avec Diophante, un des derniers mathématiciens de l'antiquité, et se poursuit, sous un nouveau regard, sous les mains des mathématiciens arabes.

La première médiation historico-culturelle apparait donc dans la constitution « interne » de l'objet que saisissent les élèves et l'enseignante dans leur activité d'enseignement-apprentissage. Il s'agit d'un objet qui a été produit par des individus « à l'intérieur et avec l'aide d'une organisation sociale précise » (Marx, 1970, p. 192).

3.2 Deuxième médiation

La deuxième médiation que je voudrais mettre en évidence apparait dans le propre « mouvement » de l'activité, dans la manière dont l'objet est saisi. Ce mouvement exprime, en effet, toute une conception historique de l'enfant et de l'enseignante, une conception de l'acte pédagogique (on pourrait dire, une « idéologie » éducative) que l'école assure et matérialise d'une infinité de façons. Ainsi, dans l'activité dont il a été question plus haut, on reconnaît dans la manière d'agir de l'enseignante les traces de ce mouvement éducatif occidental du début du 20e siècle qu'on a appelé l'« éducation progressiste » et qui mettait en vedette l'école réformée (Rohrs et Lenhart, 1995). Contre les préceptes de l'enseignement magistral, cette école a ramené l'élève au centre de l'apprentissage. Très probablement, l'activité sur l'algèbre dont il a été question plus haut se serait déroulée d'une manière sensiblement différente dans un autre contexte qui aurait suivi un développement culturel différent de celui de l'Occident. Il y a quelques années, un collègue en congé sabbatique a proposé des leçons dans une école en Afrique de l'Ouest. Comme l'enseignante de l'épisode d'algèbre ci-dessus, il a essayé de promouvoir une discussion sur les façons de résoudre un problème. À son désarroi, les élèves se montraient de plus en plus impatients; ils trouvaient cette procédure pédagogique une perte de temps. Vu que le professeur savait déjà les réponses, il n'avait qu'à les leur donner, comme faisaient d'ailleurs les autres professeurs. On voit clairement comment une médiation historico-culturelle est présente dans la manière dont l'objet de l'activité est saisi.

3.3 Troisième médiation

Les médiations historico-culturelles apparaissent enfin à un troisième niveau. Pour le voir, il nous faut revenir encore une fois sur la critique de Hegel par Marx, au moment où Marx se plaint que chez Hegel les facultés humaines sont conçues comme « la propriété de la *soi-ïté* » (Marx, 2007, p. 163). Dans son introduction à la « Contribution à la critique de l'économie politique » et dans le « Grundisse », Marx (1970, 1973) va réitérer à plusieurs reprises l'idée qu'il y a une dialectique (transformatrice comme toute dialectique matérialiste) entre objet et sujet. Dans la saisie de l'objet par le sujet, les facultés humaines ne sont pas simplement développées. Elles sont créées. Les facultés humaines sont créées dans le cadre de, et comme réponse à, ce que Marx (1970, p. 20) appelle les « forces de production » de la société. Le philosophe français Lucien Sève exprime cette idée en disant que les facultés humaines

> n'existent pas seulement comme activités subjectives des individus mais aussi sous la forme *objectivée*, ou plus exactement, *objectalisée*... de « forces productives » – outillages et machineries où se cumulent des savoir-faire, connaissances

> scientifiques et procédures technologiques où cristallisent des démarches intellectuelles – stock extra organique en vive croissance historique par l'appropriation individuelle toujours singulière duquel se forment à chaque génération des capacités personnelles. (Sève, 2008, p. 40)

C'est ainsi que « le psychisme humain est une activité visant à se réaliser en passant par les formes nécessaires que lui prescrit une formation sociale donnée » (Sève, 2008, p. 34). L'apprentissage de l'algèbre à l'école n'échappe pas à ce phénomène. Il s'inscrit dans un projet de société, cette fois-ci un projet de société néolibérale qui requiert d'une formation de capacités analytiques abstraites nécessaires au fonctionnement de la société de marché (Gohier et Fabre, 2015; Laval, 2004; Lenoir, 2016).

Le phénomène que j'essaie de mettre en évidence ici au sujet de l'algèbre n'est pas récent. En fait, l'explosion qu'a connue l'algèbre dans les écoles italiennes d'abaque à la Renaissance allait dans la direction de la création des capacités humaines requises par les forces de productions du capitalisme artisanal émergent (Franci et Toti Rigatelli, 1982; Høyrup, 2018; Van Egmond, 1976). Historiquement parlant, il n'y a pas de domaine mathématique plus bourgeois que l'algèbre. L'introduction récente du codage à l'école est l'illustration contemporaine de ce mouvement de création de facultés humaines, maintenant dans le contexte d'une société entièrement engloutie et organisée par la sphère économique.

4. Le savoir mathématique scolaire

Le savoir mathématique scolaire fait partie d'une constellation de savoirs culturels qui incluent les savoirs produits et employés dans des divers professions, le savoir des mathématiciens professionnels, etc. Dans leur constitution ontologique, les objets de ces savoirs sont des « idéalités » : des manières de penser et d'agir constituées culturellement et historiquement (Radford, 2021a). À la place d'être transcendants (comme chez Platon), les objets d'un savoir sont mis continuellement en action dans et par l'activité humaine. C'est à travers cette activité humaine qu'ils se retrouvent continuellement matérialisés ou incarnés de manières toujours contextuelles et, par conséquence, de manières toujours différentes, expansives et neuves.

Le problème qui se pose à l'école est celui de la rencontre des élèves avec le savoir scolaire. Pour que cette rencontre ait lieu, il faut mettre ce savoir en « mouvement », car en soi, dans sa généralité ou idéalité, il ne peut pas se montrer à la conscience. Il va falloir que le savoir devienne objet « sensible », c'est-à-dire objet de conscience et de pensée. Et ce qui le rend sensible, c'est l'activité. On ne peut pas rencontrer les manières culturelles de penser les formes spatiales, les nombres, les équations qu'à travers une activité.

C'est justement ce mouvement qui fait « apparaître » le savoir que nous voyons dans l'activité précédente de 3e année. Dans cette activité, l'enseignante et Cyr, en travaillant à partir des idées d'autres élèves, commencent à faire apparaître ensemble une manière algébrique de résoudre des équations.

Bien sûr, la rencontre des élèves avec le savoir mathématique scolaire ne se produit pas d'un seul coup. En fait, c'est une rencontre qui ne finit jamais, car le savoir, en tant que manière ou forme de penser, ne peut jamais se donner complètement à la conscience : sa forme de donation est toujours singulière, apparaissant tantôt comme ceci, tantôt comme cela, ici ou là ou dans un ailleurs précis, toujours dans an *hic et nunc*. Le mathématicien et didacticien Laurent Vivier (2020) nous invite à penser à la tangente. Peut-on la penser en général, dans toute son idéalité ou généralité? Impossible. Pour la penser, il nous faut un contexte géométrique, cinématique ou autre et « agir » dans ce contexte. Kant trouvait à la fois amusant et curieux le fait que les géomètres commencent par rendre sensible ce qu'ils veulent étudier. Si le sujet porte sur les triangles, le géomètre, remarque Kant, « commence immédiatement par construire un triangle » (Kant, 2003, p. 579). Dans notre activité de 3e année, la manière de penser algébriquement les équations se fait à partir d'une équation précise: l'équation $3 + x = 7$. Une première prise de conscience est ainsi rendue possible. Mais cette prise de conscience doit se poursuivre, se raffiner. Les élèves devront réfléchir, penser, agir à partir d'autres équations et discerner ainsi les relations qui sont différentes et celles qui sont similaires dans les processus de résolution de ces équations. Vygotski notait que

> La prise de conscience de la ressemblance exige la formation d'une généralisation ou d'un concept primaire, englobant les objets qui ont entre eux ce rapport. Au contraire la prise de conscience de la différence n'exige pas nécessairement de la pensée la formation d'un concept et peut apparaître d'une toute autre manière. (Vygotski, 1985, p. 233)

Regardons maintenant la suite de l'activité. L'enseignante a préparé une feuille de route avec d'autres équations dont la complexité croissante doit mettre les élèves devant des processus exigeant un raffinement conceptuel —cette prise de conscience de la ressemblance dont parle Vygotski dans le passage précédent. Les équations ont été données dans le SSI. Comme dans le cas de l'équation d'introduction discutée ci-dessus, elles sont la traduction d'une histoire dans laquelle deux enfants ont des cartes et des enveloppes. Chaque enveloppe contient le même nombre inconnu de cartes, et les deux enfants ont au total le même nombre de cartes.

L'enseignante a également préparé une trousse d'enveloppes et de cartes pour que les élèves construisent une équation dans le SSC et la résolvent dans ce système. Cela étant fait, les élèves doivent dessiner l'équation et leur procédure dans le SSI.

Dans cette section, je discute de la manière dont les élèves abordent la première de ces équation ($2x + 1 = x + 6$; voir Figure 4, à gauche).

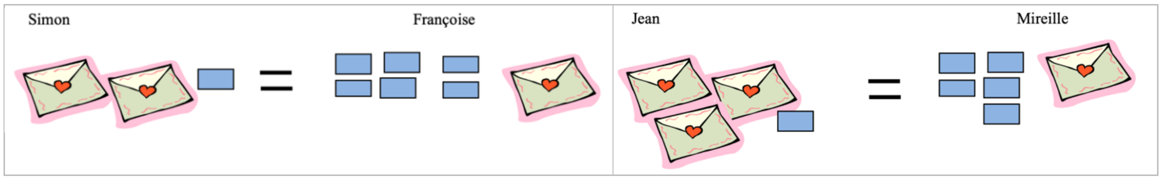


Figure 4. Les équations $2x + 1 = 6 + x$ et $3x + 1 = 5 + x$
telles que présentées aux élèves dans le SSI

Les élèves créent l'équation dans le SSC (Figure 5, à gauche). Puis, ils dessinent l'équation dans la SSI. Elsa dit : « Nous devons enlever cela (elle entoure la carte du côté gauche de l'équation) pour qu'il n'y ait que des enveloppes, tu te souviens ? (Puis elle enlève une carte de l'autre côté) 1, 1 » (Figure 5, à droite).

La réponse est trouvée par la méthode de « comparaison » (c'est-à-dire que les élèves comparent les objets ou groupes d'objets similaires et associent les parties restantes de l'équation : dans ce cas, une enveloppe du côté gauche est égale à l'enveloppe du côté droit; par conséquent, l'autre enveloppe est égale aux cinq cartes restantes).

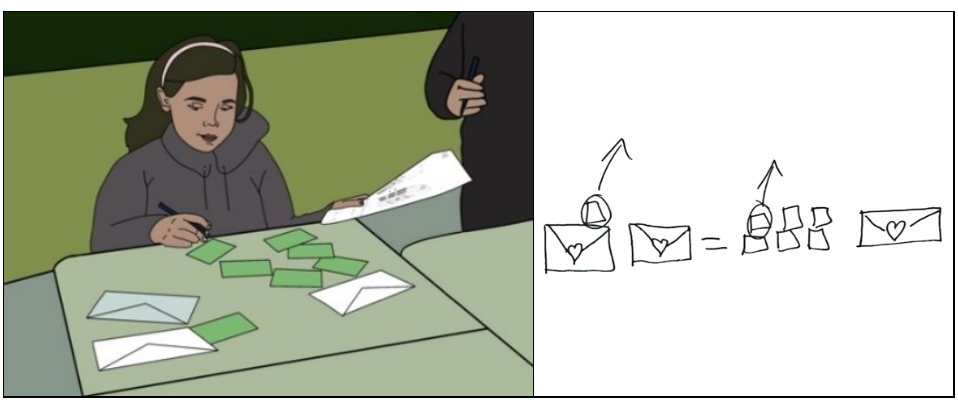


Figure 5. Résolution de l'équation $2x + 1 = 6 + x$ dans le SSC et le SSI

L'enseignante arrive et demande aux élèves d'expliquer leur procédure. Les élèves construisent à nouveau l'équation dans le SSC. Ils retirent une carte de chaque côté de l'équation. L'enseignante dit : « Vous êtes en train d'isoler !... Combien d'enveloppes voulez-vous d'un côté ? » Perplexes face à cette question, les élèves se regardent les uns les autres. Il y a un instant, Elsa a évoqué l'idée d'avoir des enveloppes d'un seul côté. L'intervention de l'enseignante pousse la conversation plus loin. D'une part, l'enseignante reconnaît que les élèves sont en train d'isoler l'inconnue. D'autre part, elle soulève une question qui porte sur un aspect qui n'a pas été pris en compte par les élèves. C'est cet aspect non considéré de la simplification de l'équation — une opération mathématique qui conduirait de $2x = x + 5$ à x égal à quelque chose — qui a rendu les élèves perplexes.

1 Enseignante : Vous voulez savoir combien de cartes il y a dans UNE enveloppe (elle montre l'enveloppe plusieurs fois quand elle dit UNE).... Tout d'abord, tu as fait ceci (elle retire une carte de chaque côté) : tu as retiré une carte... Bon, que se passe-t-il maintenant ? Il y a 2 enveloppes (elle montre les enveloppes d'un côté de l'équation), puis (elle montre les objets de l'autre côté de l'équation) 1 enveloppe et 5 cartes.

2 Cora : Nous avons compté toutes ces cartes (elle montre les cartes). Il y en a 5. Donc, elle (pointant du doigt une des enveloppes) devrait aussi en avoir 5 (voir Figure 6, en haut à gauche).

3 Enseignante : Comment le sais-tu ?

4 Elsa : Nous allons enlever (elle enlève 1 enveloppe du côté gauche; voir Figure 6, en haut à droite).

5 Enseignante : Vous retirez 1 enveloppe ?

6 Elsa et Cora : Oui. (Elsa retire également une enveloppe de l'autre côté; Figure 6, en bas à gauche).

7 Enseignante : Pourquoi avez-vous choisi de faire cela ?

8 Cora : Parce que cela (les côtés de l'équation) doit être égal.

9 Elsa : parce qu'il faut enlever; parce qu'il ne doit rester qu'une enveloppe (elle prend l'enveloppe qui reste).

10 Enseignante : Est-ce qu'on peut enlever 1 enveloppe, puis 1 enveloppe ? Votre équation est-elle toujours égale ?

11 Cora : Oui !

Dans la ligne 1, l'enseignante commence à simplifier l'équation comme l'ont fait les élèves. Elle dit : « Tout d'abord, vous avez fait cela » et retire une carte de chaque côté. Puis, sur un ton encourageant, elle demande : « Que se passe-t-il maintenant ? » Dans la ligne 2, Cora a recours à la méthode de « comparaison », mais l'articulation verbale des idées laisse de côté des relations importantes. Ce sont ces relations que l'enseignante demande à la ligne 3. À la ligne 4, Elsa commence à retirer une enveloppe de chaque côté. L'enseignante veut s'assurer que les élèves comprennent l'idée derrière l'opération « retirer ». C'est pourquoi, à la ligne 7, elle demande des explications. Aux lignes 8 et 9, les élèves proposent deux réponses : celle de Cora se concentre sur la conservation de l'égalité entre les deux côtés de l'équation; celle d'Elsa se concentre sur l'idée de se retrouver avec une seule enveloppe. À la ligne 10, l'enseignante veut à nouveau s'assurer que les élèves comprennent bien les actions qui sont effectuées pour simplifier l'équation.

Lorsque l'enseignante part, les élèves reviennent à l'équation dans le SSI et retirent une enveloppe de chaque côté (Figure 6, en bas à droite).

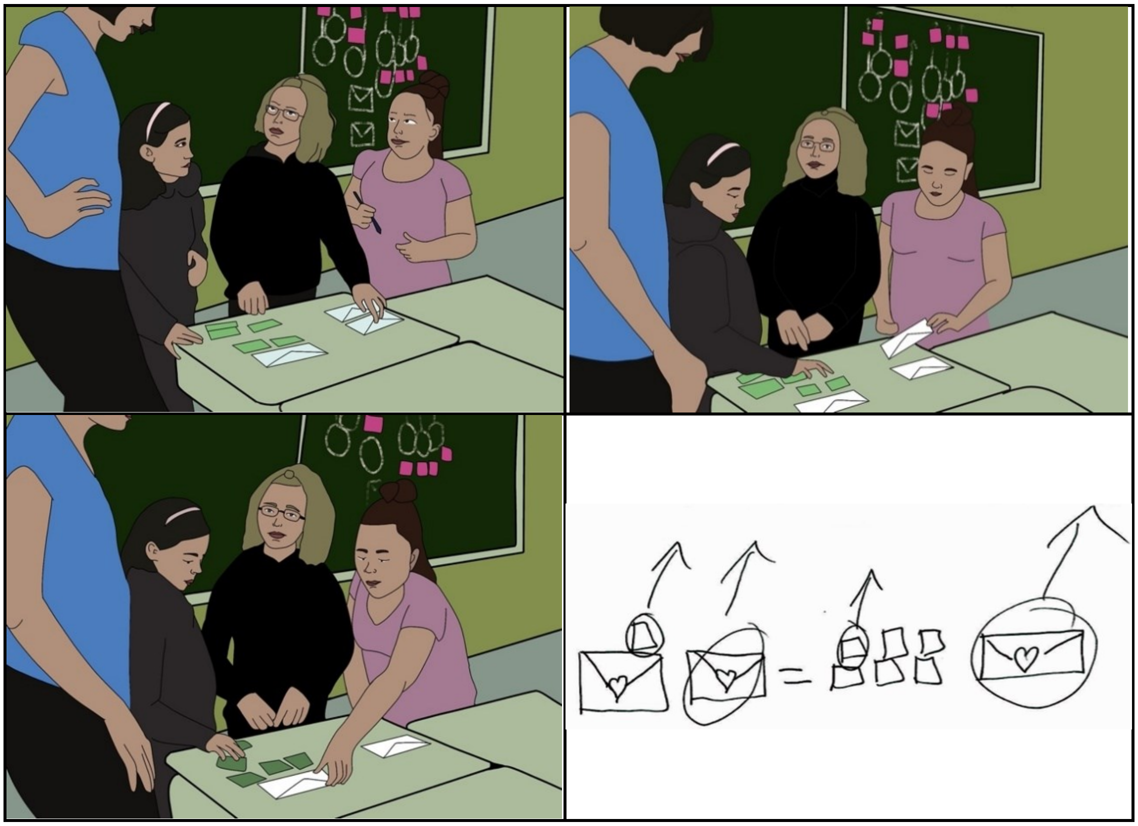


Figure 6. Les élèves et l'enseignant discutent de l'équation $2x + 1 = x + 6$

Résumons. À travers l'activité d'enseignement-apprentissage qu'ils produisent, les élèves et l'enseignante mettent en mouvement une série d'actions avec des artefacts culturels thématisés à travers le langage, la prosodie, la perception et le toucher. À partir de ces actions se dessinent plusieurs manières de penser et de résoudre le problème. Et c'est dans ce dire/agir conjoint des élèves et de l'enseignante, qu'une manière algébrique de résoudre l'équation se « dévoile » petit à petit. Il s'agit d'un dévoilement au cours duquel, grâce à l'activité, le savoir s'« incarne » dans le matériel et le matériel « s'imprègne » de savoir. Dans ce mouvement, le savoir et le matériel viennent former ce que, dans le matérialisme dialectique, on appelle une « unité ». L'unité dialectique « se réalise non pas par la similitude des phénomènes entre eux, mais au contraire, par leur différence et leur opposition » (Ilyenkov, 2008, p.33).

Grâce donc à l'activité, le savoir apparaît maintenant sous une forme incarnée, tangible à la conscience. Il s'incarne ainsi en acquérant des « déterminations » qu'il gagne au fur et à mesure que l'activité se développe. Ce sont ces déterminations qu'on voit à l'œuvre dans les actions d'Elsa quand elle retire une enveloppe de chaque côté de l'équation (lignes 4 et 6). Réciproquement, du côté de la matière, on voit que les actions des élèves ainsi que les cartes et les enveloppes sur quoi portent ces actions, s'imprègnent et se saturent maintenant de savoir. Les actions ne sont plus que de simples actions; de la même façon, les objets ne sont plus que de simples objets concrets quelconque. Actions et objets sont maintenant à la fois idéaux « et » matériels.

Cette incarnation du savoir par l'activité sera toujours contextuelle. Elle est redevable tant de la culture que des subjectivités qui la produisent. Son incarnation dans le réel de la classe ne l'épuise pas. Dans l'unité sensible à laquelle il participe, l'incarnation du savoir est donc « déficitaire », c'est-à-dire incomplète, imparfaite. Le savoir ne s'est pas révélé entièrement. Mais, en même temps, en raison des déterminations que le savoir acquiert, son incarnation est plus que ce qu'il était au départ : le savoir apparaissant, le savoir incarné, surpasse le savoir en tant que tel, en tant que potentiel. C'est dans ce sens que nous pouvons dire que le savoir apparaissant est toujours « excès ».

5. La rencontre avec le savoir mathématique scolaire

Dans la section précédente, notre intérêt a été surtout placé du côté du mouvement du savoir et dans l'élucidation de son enchevêtrement dans le monde concret. Il nous faut maintenant nous occuper de la saisie du savoir par les élèves.

Pour parler de cette saisie, nous avons eu recours à une métaphore : la métaphore de la « rencontre ». Le savoir scolaire est déjà là, dans la culture des élèves. Mais pour Cyr, Elsa et les autres élèves de cette classe de 3e année, ce matin avant la leçon, le savoir algébrique (cette manière de penser algébriquement les équations) se présentait comme potentialité (comme des manières potentielles de penser les équations). Pour que la rencontre ait lieu, nous avons dit qu'il faut mettre le savoir en mouvement; il faut qu'il acquière des déterminations sensibles et qu'il devienne savoir-en-action. Ce savoir-en-action est l'incarnation du savoir potentiel[4].

Essayons de voir avec quelques détails ce processus de saisie du savoir par les élèves. Partons encore une fois de Hegel et de son critique Marx.

Dans la « Phénoménologie de l'esprit », Hegel essaye de rendre compte du cheminement qui suit l'esprit ou la pensée dans son déploiement conceptuel. Devant l'extériorité, devant l'objet qui l'objecte, objet qui, dans son objection se réclame comme « autre », Hegel distingue deux mouvements : un mouvement

[4] Dans la théorie de l'objectivation (Radford, 2021a), le savoir-en-action est nommé « connaissance. »

d'aller, qui est au départ rapport à la chose rencontrée résonnant étrangement dans la conscience, et un mouvement de retour, qui est celui de l'« assimilation » de l'objet au sujet (à la pensée), mouvement que nous avons mentionné précédemment. Dans le cheminement de la pensée, le premier contact avec l'objet externe est celui de la « certitude sensible ». L'objet « est »; il est un « pur *ceci* » (Hegel, 2018, p. 174; italique dans l'original), cette chaise, cette équation. Cette rencontre ne fait qu'affirmer le moi qui le regarde ou le sent dans sa certitude sensible. Il faudra à la pensée, continuer son cheminement au-delà de la vérité sensible pour que « la signification d'une multiplicité variée de modalités constitutives d'elle-même » devienne possible (Hegel, 2018, p. 132). Et c'est de ce parcours dont il s'agit dans la « Phénoménologie de l'esprit ».

Un des problèmes que Marx trouve dans cette position est qu'elle ne réussit pas à intégrer dans la rencontre de l'objet les médiations historico-culturelles que nous avons mentionnées ci-dessus. Mais il y a plus. Hegel, affirme Marx, va réduire cette rencontre à un pur acte de connaissance, ce qui a pour effet de réduire le sujet à ce que, dans notre terminologie actuelle, nous appellerions un sujet « cognitif ». Pour Marx, ceci est une grande erreur. Selon Marx, notre rapport premier à l'objet « est un rapport sensible qui atteste de notre dépendance native à l'égard [de l'objet] réellement extérieure et indépendante de nous » (Fischbach, 2007, p. 57). Si Hegel insiste sur le savoir et sur sa connaissance, Marx, par contre « insiste sur le sensible, sur la sensibilité » (Fischbach, 2007, p. 57)

Que veut dire le fait que le sujet soit un être sensible? La réponse de Marx (2007) est la suivante: « Être *sensible* c'est être objet des sens, c'est être un objet *sensible*, et donc avoir des objets sensibles en dehors de soi, avoir des objets de sa sensibilité; être sensible, c'est être *souffrant* » (p. 167; italique dans l'original). En commentant ce passage, Fischbach remarque qu'

> un être sensible est... d'abord un être capable de souffrance… [cette souffrance] est d'abord la souffrance ressentie par un être qui découvre qu'il ne se suffit pas à lui-même, et qui fait l'épreuve de ce qui lui manque, c'est-à-dire de l'incomplétude de son propre être. (Fischbach, 2007, p. 57)

On voit bien le contraste avec Hegel. Bien que concevant l'individu comme auto-engendré, Hegel continue tout de même la longue tradition occidentale que voit dans l'être un être auto-suffisant. Marx, en revanche, voit l'individu comme un être de nature, un être souffrant, qui aura besoin des autres êtres et des objets externes pour assurer son existence.

Or, cette position anthropologique que Marx nous offre, position dans laquelle l'individu est toujours inachevé et inachevable, toujours en production avec d'autres individus, nous amène à voir l'apprentissage autrement que simplement tourné vers la quête du savoir. En fait, quand Marx présente l'individu sous l'angle de l'incomplétude (de l'être incomplet), il reconnaît dans l'activité humaine une dimension « esthétique » dont la nouveauté doit être souligné avec force : dans l'activité à travers laquelle les individus assurent leur subsistance et produisent en même temps leur existence, « ils s'expriment »; ils s'expriment en tant que subjectivités. L'activité n'est donc pas seulement un mécanisme d'arrivée à une fin, mais la production de la vie. Dans un passage des « Manuscrits de 1844 », Marx pose la question: qu'est-ce que la vie? Et il répond: l'activité (Marx, 2007, p. 121).

Il y a une implication importante pour nos réflexions ici sur l'activité d'enseignement-apprentissage : dans la saisie du savoir, les élèves ne font que le saisir. Dans le mouvement de saisie, les élèves s'expriment comme individus; ils expriment leur subjectivité et se constituent comme subjectivités. Ce mouvement de saisie de l'objet n'est donc pas seulement un mouvement cognitif, mais aussi et surtout un mouvement profondément émotionnel et affectif. Si l'activité, à l'intérieur de laquelle cette saisie du savoir a lieu, les élèves s'expriment pauvrement, alors ils se constitueront comme des sujets aliénés. C'est ce qui se passe dans l'enseignement magistral, où les élèves observent l'enseignant produire les idées pour eux (Radford, 2016). Pour que l'activité d'enseignement-apprentissage soit vraiment un lieu riche de production de subjectivités, il faudra que les élèves aient l'occasion de rencontrer et saisir le savoir culturel tout en s'exprimant subjectivement et affectivement, c'est-à-dire en participant activement de manière authentique à la production et la circulation des idées mathématiques du collectif. C'est ce que nous observons dans les passages de 3e année présentés ci-dessus. La classe est organisée de telle manière que les élèves travaillent en petits groupes; ils ont l'occasion de discuter de leurs idées avec d'autres groupes d'élèves et de participer aux discussions générales. L'enseignante s'implique elle-aussi dans la production et circulation d'idées; elle fait partie du collectif : elle ne fait pas qu'observer les élèves. Il n'y a pas de ligne séparant l'enseignante et les élèves. À l'instar des élèves, elle est aussi en co-production. Elle « souffre » avec les élèves. À la ligne 7 nous voyons qu'elle vient voir les élèves. Elle leur pose la question : « Bon, que se passe-t-il maintenant ? Il y a 2 enveloppes (elle montre les enveloppes d'un côté de l'équation), puis (elle montre les objets de l'autre côté de l'équation) 1 enveloppe et 5 cartes ». Rien ne garantit que tout va bien tourner. Les élèves peuvent ne pas comprendre, se fâcher, se frustrer, etc. L'enseignante « s'expose »; elle se rend « vulnérable ». Entre l'énoncé de la question et la suite, il y a un moment d'incertitude. Plutôt que d'être autosuffisante, l'enseignante a « besoin » des élèves; elle a besoin que les élèves acceptent la question posée, qu'ils l'assument, sans quoi l'activité perdrait sa force créatrice. Elle a besoin des élèves, mais pas pour leur dicter comment procéder. Elle n'a pas besoin d'eux en tant que sujets obéissants, mais comme subjectivités ouvertes, prêts à présenter leur propre perspective. Réciproquement, les élèves ont « besoin » de l'enseignante, non pas pour qu'elle leur dise quoi faire et comment le faire, mais parce qu'elle a une perspective qu'ils n'ont pas. Ils ont donc besoin d'une enseignante ouverte, prête à écouter la perspective des élèves, prête à souffrir et à jouir avec eux.

6. En guise de conclusion

Le but de cet article a été de présenter une réflexion sur la question de l'apprenant et l'activité. Au début j'ai suggéré que cette question pouvait se voir de deux manières, l'une mettant l'accent sur l'apprenant, l'autre sur l'activité. Mon intention a été de présenter une troisième voie, où il s'agit de voir les apprenants et l'enseignant à la fois comme producteurs et comme produits d'une activité conjointe, l'activité d'enseignement-apprentissage.

Mon projet prend racine dans la philosophie du matérialisme dialectique. Ce courant philosophique a l'avantage, il me semble, d'offrir une perspective qui permet de comprendre l'activité au-delà d'un pur faire *hic et nunc,* ou de la comprendre au-delà des paramètres subjectivistes qu'on lui attribue souvent dans d'autres perspectives, où l'activité demeure un simple dérivé du sujet, de ce que celui-ci fait : l'activité *du sujet*. Dans le matérialisme dialectique, l'activité prend un sens ontologique qu'elle n'a pas dans d'autres perspectives théoriques : l'activité est constitutive du sujet et des idées que celui-ci se forme du monde. L'activité est le nom de ce processus à travers lequel les individus se produisent eux-mêmes en même temps qu'ils s'inscrivent quotidiennement dans le monde historique et culturel.

Dans la première partie, j'ai suggéré trois médiations historico-culturelles propres à l'activité.

La première concerne l'objet de l'activité. Dans le cas de l'activité d'enseignement-apprentissage, la médiation apparaît d'abord dans les structurations sociales, historiques et culturelles cristallisées dans l'objet à apprendre. Nous avons vu comment Hegel, ignorant les médiations historico-culturelles, pense à l'objet comme objet dans une neutralité qui ne peut être que très problématique, comme si l'objet est déjà là, prêt à se donner à une conscience qui, dans son propre mouvement, le rencontre. Cet objet est en réalité un objet historique produit à l'intérieur de certaines formes sociales de production et transformé culturellement au cours du temps.

La deuxième médiation agit sur la manière dont l'objet est saisi. Si la première médiation porte sur l'objet, la deuxième porte sur l'activité elle-même. Les activités d'enseignement-apprentissage sont porteuses d'une historicité qui forme et informe la manière dont l'activité se déploie. Cette historicité fait surface, par exemple, dans les conceptions que véhicule l'école quant à l'élève et à l'enseignant, sur ce qu'il y a à apprendre (le curriculum) et comment l'apprendre (la pédagogie). Ces conceptions sont reflets du rôle que la société attribue à l'école; elles portent les contradictions sociétales de nature politique et économique – par exemple, en transposant à l'école l'idée politique libérale, puis néolibérale, de l'individu, de sa liberté et de son autonomie, comme le point de départ de l'organisation sociale, transposition qui donne comme résultat une pédagogie centrée sur l'élève, sur son autonomie et sa propre réalisation (Radford, 2021b).

Enfin, la troisième médiation agit sur la production des sujets. L'école n'est pas simplement productrice et reproductrice de savoirs. Elle produit aussi des subjectivités, c'est-à-dire des individus historiques, concrets, spécifiques. C'est dans l'activité que la formation et trans-formation des facultés humaines (y compris la sensibilité humaine) sont produites. À la place d'être « la propriété de la *soi-ïté* » (Marx, 2007, p. 163), les facultés humaines, la sensibilité au monde, notre rapport à l'Autre (l'éthique) et les sens (une oreille musicale, un œil pour la beauté des formes, la perception mathématique) apparaissent maintenant comprises « comme le produit sensible d'une activité humaine elle-même sensible » (Fischbach, 2015, p. 31). Ainsi, la perception des élèves de 3e année s'est vue transformée au cours de l'activité. À la place de voir l'équation comme égalité de quantités de cartes, l'équation est apparue à la fin comme un diagramme d'objets et relations sur lesquels on peut agir afin de trouver la solution au problème que l'équation représente (Radford, 2022).

Nous avons aussi vu comment le mouvement de saisie de l'objet à apprendre s'inscrit dans la production de capacités humaines pour répondre aux intérêts de la formation sociale où s'inscrit l'école. Le nouveau programme-cadre des mathématiques de l'Ontario est un très bon exemple : on vient d'introduire non seulement le codage, comme déjà mentionné ci-dessus, mais on donne aussi une attention accrue à la littératie financière. L'intention du gouvernement conservateur n'est pas d'outiller les élèves pour mieux comprendre la production de la pauvreté et ses causes en Ontario et partout dans le monde, mais à aider les élèves à devenir des meilleurs consommateurs en apprenant à mieux gérer leur argent (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2020).

Vue sous l'angle de ses médiations, l'activité d'enseignement-apprentissage apparaît comme une activité qui dévoile une complexité qui demeure cachée dans l'activité du sujet qu'on retrouve, par exemple, chez von Glasersfeld (1995) ou chez Piaget (1973). Les médiations mentionnées ci-dessus mettent en évidence que l'activité du sujet s'appuie sur des structurations sociales, historiques et culturelles qui organisent intérieurement les objets d'apprentissage et la manière dont ceux-ci sont saisis. On voit par là en quoi l'activité d'enseignement-apprentissage qui est au centre de cet article se distingue de l'activité pensée à l'aune d'autres perspectives en didactique des mathématiques. L'interprétation qu'offre le matérialisme dialectique de l'activité aide à rendre visibles les assises historico-culturelles des phénomènes d'enseignement-apprentissage. Dans cette perspective, l'activité n'est plus une suite d'actions d'un sujet (ou de plusieurs sujets en interaction), peu importe la complexité de ces actions, car le sujet n'est pas pris comme sujet fondateur, c'est-à-dire comme « sujet qui pose le monde »; il est plutôt vu comme sujet qui « vient au monde » (Kemp, 1973).

Les considérations précédentes nous amènent à concevoir l'activité d'enseignement-apprentissage comme un objet d'étude didactique. Il est curieux de remarquer que, bien que le terme activité (par exemple, l'activité de l'élève, l'activité du professeur) fasse partie du lexique commun en didactique, et qu'on s'accorde à dire que l'apprentissage est consubstantiel de l'activité, l'activité comme telle est rarement prise comme objet d'étude (l'attention étant portée sur des « situations », des « praxéologies », l'action du sujet, etc.). Il est également curieux de constater que, même à l'intérieur du développement de l'école historico-culturelle vygotskienne, le concept d'activité n'est apparu qu'à la suite d'un long cheminement au cours duquel on a compris, avec Leontiev (1984), que la source du psychisme humain ne se trouve pas dans le langage et l'utilisation d'outils, mais dans l'activité historico-culturelle.

Une des personnes évaluatrices de cet article soulève la question de l'orientation des recherches qui pourraient être conduites à partir du positionnement théorique esquissé ci-dessus. Par exemple, comment faire de la science didactique dans ce contexte dialectique matérialiste? Quels types de questions ou de problèmes seraient privilégiés?

Sans prétendre pouvoir répondre à ces questions fort intéressantes en détail, notons que la référence à l'activité de 3^{e} année sur l'enseignement-apprentissage de l'algèbre discutée dans les sections précédentes nous permet d'identifier trois volets importants :

L'activité d'enseignement-apprentissage comporte :

a) un volet « ontologique », qui a trait à l'inévitable formation de subjectivités. C'est la dimension de l'être et de son devenir.
b) un volet « épistémologique », qui a trait à la rencontre des élèves avec le savoir. Métaphoriquement parlant, l'activité se présente ici comme « une main » (un « organe kinesthésique ») à travers laquelle le savoir est collectivement saisi.

c) un volet « esthétique », qui a trait aux possibilités d'expression personnelle que nous trouvons dans le processus de la rencontre avec l'objet d'apprentissage.

Nous appelons « objectivation » le mouvement collectif de saisie de l'objet à travers la réfraction des volets ontologique, épistémologique et esthétique de l'activité. La caractéristique principale de l'objectivation n'est pas d'assimiler l'objet de l'activité, mais de le rencontrer, de nous présenter à cet objet avec toute notre sensibilité pour jouir de sa rencontre et de ce que cet objet a à nous dire, à nous apprendre, nous invitant ainsi à imaginer de nouvelles possibilités d'action et de réflexion (Radford, 2021a).

En concevant donc l'apprentissage comme objectivation, une des questions qui se pose est celle de mieux comprendre les caractéristiques de l'activité qui mèneraient à des rencontres conceptuelles riches avec les savoirs culturels. Cette activité devrait pouvoir donner lieu à des processus d'objectivation qui seraient critiques, poétiques et sensibles — des processus de rencontre avec les mathématiques qui seraient progressifs, incarnés, discursifs, subversifs, affectifs, symboliques et matériels.

Dans la recherche des caractéristiques d'une telle activité, nos efforts en cours visent à étudier (a) les modes de production et de circulation des savoirs que les élèves et les enseignants mettent en place dans le cadre d'un apprentissage collectif et (b) les modes de coopération humaine que requiert un tel apprentissage (Radford, 2020). Ces questions nous demandent d'entrer dans des considérations qui touchent à l'épistémologie, à l'anthropologie et à l'éthique.

Crédits :

Cet article est le résultat d'un programme de recherche subventionné par Le Conseil de recherches en sciences humaines du Canada / Social Sciences and Humanities Research Council of Canada (CRSH /SSHRC). Je voudrais remercier les personnes évaluatrices de cet article ainsi que l'éditrice de la revue pour les commentaires et suggestions.

Références

Balibar, É. (2014). *La philosophie de Marx*. Éditions La Découverte.

Fischbach, F. (2007). Présentation. Dans K. Marx, *Manuscrits économico-philosophiques de 1844* (p. 7-71). Vrin.

Fischbach, F. (2015). *Philosophies de Marx*. Vrin.

Franci, R. et Toti Rigatelli, L. (1982). *Introduzione all'arithmetica mercantile del Medioevo e del Rinascimento*. Quattro Venti.

Gohier, C. et Fabre, M. (2015). *Les valeurs éducatives au risque du néo-libéralisme*. Presses universitaires de Rouen et du Havre. http://books.openedition.org/purh/1582

Harun, Z. (2010). *Evaluating the teaching and learning of fraction through modelling in Brunei* [thèse de doctorat, University of Manchester]. Research Explorer. https://www.research.manchester.ac.uk/portal/files/54505599/FULL_TEXT.PDF

Hegel, G. (2018). *Phénoménologie de l'esprit* (Trad. B. Bourgeois). Vrin.

Høyrup, J. (2018). Abbacus school. Dans M. Sgarbi (dir.), *Encyclopedia of Renaissance philosophy* (p. 1-6). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-02848-4_1135-1

Ilyenkov, E. (2008). *The dialiectics of the abstract and the concrete in Marx's capital*. Aakar Books.

Kant, I. (2003). *Critique of pure reason* (Trad. N. Smith). St. Martin's Press.

Kemp, P. (1973). *Théorie de l'engagement*. Éditions du Seuil.

Laval, C. (2004). *L'école n'est pas une entreprise*. Éditions La Découverte.

Lave, J. et Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge University Press.

Lenoir, Y. (2016, novembre). *Quelles seraient les finalités éducatives scolaires dans le monde actuel ?* [conférence]. Forum Synergie 2016, Toronto.

Leontiev, A. A. (2005). The life and creative path of A. N. Leontiev. *Journal of Russian and East European Psychology*, *43*(3), 8-69. https://doi.org/10.1080/10610405.2005.11059249

Leontiev, A. N. (1984). *Activité, conscience, personnalité*. Éditions du Progrès.

Leontiev, A. N. (1997). On Vygotsky's creative development. Dans L. S. Vygotsky,. *Collected works* (Vol. 3) (p. 9-32). Plenum.

Marx, K. (1970). *A contribution to the critique of political economy* (Trad. M. Dobb). International Publishers.

Marx, K. (1973). *Grundrisse: Introduction to the critique of political economy*. Penguin Books.

Marx, K. (2007). *Manuscrits économico-philosophiques de 1844* (Trad. F. Fischbach). Vrin.

Ministère de l'Éducation de l'Ontario. (2020). *Le curriculum de l'Ontario de la 1re à la 8e année. Mathématiques.* Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.

Neill, A. S. (1992). *Summerhill school: A new view of childhood.* St. Martin's Griffin.

Oaks, J. et Alkhateeb, H. (2007). Simplifying equations in Arabic algebra. *Historia Mathematica*, *34*, 45-61. https://doi.org/10.1016/j.hm.2006.02.006

Piaget, J. (1973). *Introduction à l'épistémologie génétique*. Presses Universitaires de France.

Radford, L. (2016). On alienation in the mathematics classroom. *International Journal of Educational Research*, 79, 258-266. http://dx.doi.org/10.1016/j.ijer.2016.04.001

Radford, L. (2017). La fenomenología del significado. Dans M. J. Costa dos Santos, et F. Vieira Alves (dir.), *Docêncai, cognição e aprendizagem: Contextos diversos* (p. 15-29). Editora CRV.

Radford, L. (2019). So, you say that doing math is like playing music? The mathematics classroom as a concert hall. *La matematica e la sua didattica, 27*(1), 69-87.

Radford, L. (2020). Le concept de travail conjoint dans la théorie de l'objectivation. Dans M. Flores González, A. Kuzniak, A. Nechache et L. Vivier (dir.), *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz n°21* (p. 19-41). IREM de Paris.

Radford, L. (2021a). *The theory of objectification. A Vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning.* Brill/Sense. https://doi.org/10.1163/9789004459663

Radford, L. (2021b). Reimaginar el aula de matemáticas: Las matemáticas escolares como praxis emancipadora. *Revista Chilena de Educación Matemática*, *13*(2), 44-55. https://doi.org/10.46219/rechiem.v13i2.88

Radford, L. (2022). Introducing equations in early algebra. *ZDM Mathematics Education, 54*, 1151–1167.

Rogoff, B. (1990). *Apprenticeship in thinking*. Oxford University Press.

Rohrs, H. et Lenhart, V. (1995). *Progressive education across the continents: A handbook*. Peter Lang.

Rugg, H. et Shumaker, A. (1969). *The child-centered school*. World Book Company.

Sève, L. (2008). *L'homme?* La Dispute.

Van Egmond, W. (1976). *The commercial revolution and the beginnings of western mathematics in Renaissance Florence, 1300-1500.* Indiana University Press.

Vivier, L. (2020). Portée et usage du travail mathématique dans le cadre de la théorie des ETM. Dans M. Flores González, A. Kuzniak, A. Nechache et L. Vivier (dir.), *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz, n°21* (p. 57-70). IREM de Paris.

von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning*. The Falmer Press.

Vygotski, L. S. (1985). *Pensée et langage*. Éditions sociales.