

Revue québécoise de didactique des mathématiques

Numéro thématique 2, Tome 1 (2022)

Enseignement et apprentissage de l'algèbre avant la lettre.
Un regard sur les ressources et les pratiques enseignantes

www.rqdm.quebec

Comité éditorial

Izabella Oliveira, éditrice

Doris Jeannotte, éditrice invitée

Floriane Wozniak, éditrice invitée

Coordonnatrice

Marianne Homier



Table des matières

Mot éditorial du numéro thématique

Izabella Oliveira, Doris Jeannotte, Floriane Wozniak 1

ARTICLES

L'activité numérique-algébrique dans des manuels scolaires français de primaire : le cas du calcul réfléchi multiplicatif

Julia Pilet, Brigitte Grugeon-Allys 4

Le développement de la pensée algébrique dans les programmes de l'Ontario : quel potentiel et quelle trajectoire visée?

Doris Jeannotte et Hassane Squalli 34

Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie : analyse du savoir à enseigner relatif au développement de la pensée algébrique dans les manuels de 6^e année primaire

Sonia Ben Nejma, Said Abouhanifa, Eugène Oké, Ridha Najar, Hassane Squalli et Adolphe Adihou 59

Modélisation et praxéologies (de type) algébriques : une étude de cas

Floriane Wozniak et Marie-Odile Cattoën 96



Mot éditorial du numéro thématique : Enseignement et apprentissage de l'algèbre avant la lettre. Un regard sur les ressources et les pratiques enseignantes

Izabella OLIVEIRA

Université Laval

izabella.oliveira@fse.ulaval.ca

Doris JEANNOTTE

Université de Québec à Montréal/ Montclair State University

doris.jeannotte@uqam.ca

Floriane WOZNIAK

Université Toulouse 2 Jean Jaurès, EFTS

floriane.wozniak@univ-tlse2.fr

Le comité éditorial de ce numéro thématique de la RQDM a le plaisir de vous proposer le premier de deux numéros intitulé « Enseignement et apprentissage de l'algèbre avant la lettre : un regard sur les ressources et les pratiques enseignantes ». Les quatre articles qui composent ce numéro sont issus des travaux de l'OIPA - Observatoire international de la pensée algébrique - qui ont fait l'objet de présentations dans le cadre du 6^e colloque de l'OIPA qui a eu lieu à Montréal du 17 au 20 mai 2020.

Le premier article, cosigné par Julia Pilet et Brigitte Grugeon-Allys, s'intéresse à l'analyse du savoir mathématique et à sa transposition didactique dans les institutions scolaires dans la transition entre l'école primaire (9-11 ans) et le collège (11-15 ans) en France. Plus précisément, il porte sur l'étude des praxéologies de calculs réfléchis multiplicatifs pour distinguer des structures de calculs favorisant l'utilisation de certaines propriétés des nombres et des opérations. L'analyse est réalisée à partir des aspects épistémologiques de l'activité numérique-algébrique

Revue [québécoise](#) de didactique des mathématiques, 2022, *Numéro thématique 2* (Tome 1), p. 1-3.

définis dans Pilet et Grugeon-Allys (2021), et des travaux de recherche sur l'activité numérique-algébrique (Kieran et Martínez-Hernández, 2022). L'utilisation du modèle présenté pour analyser des manuels permet d'identifier des disparités qui peuvent affaiblir les potentialités repérées comme la dénotation des expressions numériques, les propriétés des nombres et des opérations.

Le deuxième article, écrit par Doris Jeannotte et Hassane Squalli, traite du potentiel de développement de la pensée algébrique véhiculé par le programme curriculaire de mathématique (1^{re} à 8^e année) de l'Ontario (ministère de l'Éducation, 2020) à partir d'un modèle praxéologique de référence. Les programmes ontariens visent le développement de la pensée algébrique dès la 1^{ère} année depuis le début des années 2000. En s'appuyant sur une méthodologie d'analyse de curriculums officiels développée par Bronner et Larguier (2018) et sur le cadre de référence de l'algèbre et de la pensée algébrique développé par Squalli (2000; 2015), l'étude du programme révèle que les praxéologies généraliser et calculer sont explicités dans ce dernier. Cette porte d'entrée semble intéressante pour réduire les discontinuités et ruptures entre les modes de pensées arithmétiques et algébriques documentés par la recherche.

Le troisième l'article, rédigé par Sonia Ben Nejma, Said Abouhanifa, Eugène Oké, Ridha Najar, Hassane Squalli et Adolphe Adihou, explore le développement de la pensée algébrique à la fin du cycle primaire au Bénin, au Maroc et en Tunisie à partir d'une analyse des programmes et des manuels officiels propres à chaque système éducatif. Plus particulièrement, l'étude porte sur la manière dont le curriculum de chaque pays prépare les élèves au développement de la pensée algébrique avant l'introduction du formalisme conventionnel. L'analyse est organisée autour de deux cadres, celui de Najar et al. (2021) concernant le modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique (MPRPA) et celui en lien avec les études en didactique de l'algèbre (Bednarz et al, 1996; Lins et Kaput 2004; Carraher et Schliemann, 2007; Radford, 2010, 2015; Squalli, 2015). L'analyse révèle la diversité des entrées prises en compte dans trois contextes institutionnels, sans toutefois qu'un accent soit placé sur le développement des raisonnements de nature algébriques.

Le quatrième article, proposé par Floriane Wozniak et Marie-Odile Cattoën, étudie les conditions d'une entrée dans l'algèbre par les problèmes de modélisation en France. Plus précisément, les autrices analysent comment trois enseignantes abordent avec leurs élèves un même problème avant et après l'enseignement de l'algèbre. Leur cadre d'analyse est structuré autour de la théorie anthropologique du didactique (TAD) introduite par Chevallard (1999) afin d'étudier ce qui fonde le travail épistémologique du professeur. Considérant les déterminants didactiques qui influent les pratiques des professeurs, elles montrent

Mot éditorial du numéro thématique

que, pour les cas observés, les besoins de connaissances mathématiques (les outils de la modélisation), didactiques (concevoir et mettre en œuvre une situation d'enseignement) et épistémologiques sur les processus de modélisation ont plus d'effet que le curriculum.

Bonne lecture!



L'activité numérique-algébrique dans des manuels scolaires français de primaire : le cas du calcul réfléchi multiplicatif

Julia PILET

Université Paris Est Créteil, Université de Paris, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, UNIROUEN, LDAR, F-94010 Créteil, France

julia.pilet@u-pec.fr

Brigitte GRUGEON-ALLYS

Université Paris Est Créteil, Université de Paris, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, UNIROUEN, LDAR, F-94010 Créteil, France

brigitte.grugeon-allys@u-pec.fr

Résumé : Notre étude s'inscrit dans une réflexion sur l'entrée dans l'algèbre au secondaire. Nous soutenons qu'une activité mathématique, appelée numérique-algébrique, porte sur des aspects épistémologiques communs aux deux domaines arithmétique et algébrique et cherchons à caractériser sa présence dans les manuels scolaires français à la fin de l'enseignement primaire. Après avoir présenté les caractéristiques de cette activité par un modèle praxéologique de référence dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique nous centrons l'étude sur la praxéologie de calcul réfléchi multiplicatif pour distinguer des structures de calculs favorisant l'utilisation de certaines propriétés des nombres et des opérations. Nous analysons ensuite les potentialités et limites offertes par deux manuels scolaires français sur le calcul réfléchi multiplicatif et les aspects épistémologiques de l'activité numérique-algébrique qu'ils travaillent.

Mots-clés : théorie anthropologique du didactique, activité numérique-algébrique, expressions numériques, calcul réfléchi

Numerical-algebraic activity in French primary school textbooks: the case of multiplicative reflexive calculation

Abstract: Our study builds on a reflection on the entry into algebra in secondary school. We argue that a mathematical activity, known as "numerical-algebraic," deals with

Revue [québécoise](#) de didactique des mathématiques, 2022, Numéro thématique 2 (Tome 1), p. 4-33.

epistemological aspects common to both arithmetic and algebraic domains, and describe its presence in French textbooks at the end of primary education. After having presented the characteristics of this activity, through a praxeological reference model within the framework of the anthropological theory of didactics, we focus on the praxeology of multiplicative reflexive calculation in order to distinguish calculation structures that promote the use of certain properties of numbers and operations. We then analyze the possibilities and limitations exhibited by two French textbooks on multiplicative reflexive calculation and the epistemological aspects of the numerical-algebraic activity they address.

Keywords: anthropological theory of didactics, numerical-algebraic activity, numerical expressions, reflective calculation

Introduction

De nombreux travaux (Kieran, 2018; Squalli et Bronner, 2017, Bronner et Squalli, 2020; Squalli et al., 2020) concernent le développement de la pensée algébrique en lien avec l'activité algébrique, préalablement à l'introduction du symbolisme algébrique (Chevallard, 1984, 1989; Kieran, 2007).

Dans ce texte, nous retenons le terme d'« activité algébrique » et non celui de « pensée algébrique ». Ce choix est également celui de Kieran (2007, p. 713), qui reprend une étude de Lee (1997) dans laquelle des mathématiciens, chercheurs, étudiants et enseignants devaient répondre à la question « Qu'est-ce que l'algèbre? ». Leurs réponses sont synthétisées par « une matière scolaire, une arithmétique généralisée, un outil, une langue, une culture, un mode de pensée et une activité » (Kieran, 2007, p. 713, traduction libre¹). L'un des points communs aux interviews est que l'algèbre est une activité, c'est-à-dire, « l'algèbre apparaît comme une activité, quelque chose que l'on fait » (Lee, 1997, p. 187, traduction libre²). Nous reprenons cette terminologie, l'algèbre n'étant pas seulement « un mode de pensée » mais aussi « quelque chose que l'on fait ».

Pour Kieran (2007), l'activité algébrique relève de trois composantes essentielles à travers son modèle conceptuel « GTG » : 1) l'activité générationnelle correspond à la formation des expressions algébriques et des équations, objets de l'algèbre; 2) l'activité transformationnelle concerne les processus de manipulation symbolique pour changer la forme des expressions algébriques et des équations en s'appuyant sur leurs propriétés afin de conserver leur équivalence; 3) l'activité

¹ « a school subject, generalized arithmetic, a tool, a language, a culture, a way of thinking, and an activity » (Kieran, 2007, p. 713).

² « Algebra emerges as an activity, something you do, an area of action » (Lee, 1997, p. 187).

méta au niveau global comprend les activités où l'algèbre est utilisée comme outil pour résoudre les problèmes. Ces activités ne sont pas exclusives à l'algèbre, comme la généralisation, la modélisation, la justification, la preuve, l'étude des situations fonctionnelles et la recherche de structure.

Kieran et Martínez-Hernández (2022) fait référence à l'activité mathématique du monde numérique-algébrique favorisant l'entrée dans la pensée algébrique préalablement à l'enseignement secondaire. Les recherches relevant de la pensée algébrique ont beaucoup concerné la généralisation (Kaput, 2008; Mason, 1996; Vlassis et al., 2017) et le raisonnement analytique sur des données indéterminées (Radford, 2013). Peu de travaux (par exemple, Linchevski et Livneh, 1999; Kieran et Martínez-Hernández, 2022) portent sur l'activité transformationnelle des expressions numériques, et plus particulièrement sur l'habileté à identifier la structure des expressions numériques et son usage pour conserver l'équivalence.

Nous faisons les hypothèses de travail suivantes :

- Les institutions scolaires sensibilisent peu les élèves à la transition entre l'arithmétique et l'algèbre (Chevallard et Bosch, 2012).
- Certaines activités mathématiques relevant à la fois du numérique et de l'algébrique « non symbolique » du primaire et du début du secondaire, en particulier les activités transformationnelles de calcul numérique, peuvent être des leviers pour négocier cette transition. Ces activités correspondent principalement au calcul réfléchi, c'est-à-dire « un calcul mental (Butlen 2007; Butlen et Pézard, 2000) ou écrit, dont la réalisation nécessite de mettre en œuvre une stratégie (Piolti-Lamorthé et Roubin, 2010), qui conduit à des calculs plus économiques » (Pilet et Grugeon-Allys, 2021, p. 15). Contrairement au calcul automatisé, il nécessite des transformations de décomposition et de recombinaison opérées sur les expressions numériques. Par exemple, le calcul $32 \times 25 = (8 \times 4) \times 25 = 8 \times (4 \times 25) = 8 \times 100 = 800$ met en jeu la structure d'expressions numériques intervenant dans les étapes du calcul [par exemple, 32×25 ou $8 \times (4 \times 25)$], la réécriture d'une expression numérique et l'égalité comme relation d'équivalence, ce que nous développons par la suite. Ces activités relèvent du monde numérique-algébrique et nous les regroupons sous le nom d'activité « numérique-algébrique » (Pilet et Grugeon-Allys, 2021).

Dans le cadre des travaux de l'Observatoire international de la pensée algébrique (OIPA), nous avons analysé les programmes français à la transition primaire-secondaire pour étudier la place attribuée globalement à l'activité numérique-algébrique. Il en ressort que les programmes et leurs documents

d'accompagnement ne développent pas les problèmes de généralisation et peu le calcul des expressions numériques (Pilet et Grugeon-Allys, 2020, 2021). Ce deuxième résultat nécessite d'autres investigations que nous poursuivons dans le cas des manuels scolaires français sur le calcul réfléchi multiplicatif. Aussi, nous interrogeons les potentialités des activités proposées dans les manuels scolaires français de fin de primaire (10-11 ans) pour développer une activité mathématique favorisant la transition entre l'arithmétique et l'algèbre.

Après avoir identifié les aspects épistémologiques de l'activité numérique-algébrique, fondements d'un calcul numérique appuyé sur l'équivalence, nous nous plaçons dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999). Nous présentons un modèle praxéologique de référence de cette activité (Pilet et Grugeon-Allys, 2021), défini par les trois praxéologies locales de généralisation, de modélisation et de calcul. Ensuite, nous nous centrons sur la praxéologie de calcul pour caractériser le type de tâche de calcul réfléchi multiplicatif selon des variables spécifiques de types de tâches et de tâches (Chaachoua, 2018; Grugeon-Allys et al., 2022; Jolivet et al., 2021). Puis, nous opérationnalisons cette caractérisation pour analyser les potentialités offertes par les exercices des manuels scolaires français de CM2 (10-11 ans) pour développer l'activité numérique-algébrique sur le calcul réfléchi multiplicatif.

1. Référence praxéologique du domaine numérique-algébrique

Les enjeux de cette étude portent sur l'analyse du savoir mathématique et sa transposition didactique dans les institutions scolaires dans la transition entre l'enseignement à l'école primaire (9-11 ans) et l'enseignement au collège (11-15 ans) en France.

Pour ce faire, nous rappelons rapidement les aspects épistémologiques de l'activité numérique-algébrique définis dans Pilet et Grugeon-Allys (2021) en resituant l'étude des objets mathématiques mis en jeu dans cette activité par rapport à des travaux anglo-saxons récents (Kieran et Martínez-Hernández, 2022). Comme Kieran et Martínez-Hernández, nous retenons d'abord que dans le monde numérique-algébrique dans lequel se développe l'activité numérique-algébrique, l'équivalence a deux dimensions, calculatoire et structurelle. Les élèves du primaire arrivant au secondaire se retrouvent souvent en difficultés en algèbre, cette deuxième dimension étant peu travaillée à travers le sens de la structure d'une expression numérique. Les propriétés des nombres et des opérations mises en jeu dans la décomposition et la recomposition d'une expression numérique conservant la valeur de l'expression sont peu mises en évidence, même si en France un calcul appelé « calcul en ligne » vient d'être récemment introduit (Pilet et Grugeon-Allys, 2020).

1.1 Les aspects épistémologiques de l'activité numérique-algébrique

Nous présentons les types de problèmes de l'activité numérique-algébrique puis les aspects épistémologiques des objets en jeu dans les calculs sur les expressions numériques.

1.1.1 Types de problèmes de l'activité numérique-algébrique

L'activité numérique-algébrique se développe à la fois dans la résolution de plusieurs types de problèmes présents dès le primaire et dans le calcul mis en jeu sur les expressions numériques. Cela fait référence à l'activité générative au sens de Kieran. Les trois caractéristiques des formes spécifiques de la pensée algébrique sont définies par Radford (2013) pour qui elles sont épistémologiquement différentes de celles de l'arithmétique : l'usage de nombres non connus (inconnues, variables, etc.) dans la résolution de problèmes, la désignation de ces nombres par différents moyens (codages, gestes, ...), l'analyticité, c'est-à-dire le traitement des quantités inconnues comme si elles étaient des nombres connus. Les types de problèmes mettant en jeu l'analyticité préalablement à l'entrée dans le symbolisme algébrique sont d'une part, les problèmes de généralisation (par exemple, motifs géométriques, suites) et d'autre part, les problèmes arithmétiques élémentaires relevant des champs conceptuels additifs et multiplicatifs (en particulier, les problèmes de comparaison déconnectés (Adihou et al., 2015) nécessitant la production de relations pour raisonner sur les quantités connues comme sur les quantités inconnues, et donc de construire un modèle du problème.

1.1.2 Aspects épistémologiques des objets en jeu dans les calculs sur les expressions numériques

Nous présentons les aspects épistémologiques des objets en jeu dans les calculs sur les expressions numériques et dans les relations arithmétiques utilisés lors de la résolution de problèmes arithmétiques.

L'équivalence de la relation d'égalité est au cœur de l'activité numérique-algébrique. Elle est portée par les propriétés de réflexivité, de symétrie et de transitivité de l'égalité. Dans le numérique, l'équivalence a à la fois une dimension calculatoire (avoir la même valeur) et une dimension structurelle (Kieran et Martínez-Hernández, 2022). Cette dernière met notamment en jeu la réflexivité pour justifier l'équivalence d'expressions numériques à partir de décompositions et de recompositions sans calculer la valeur des expressions, par exemple $5 + 9 + 3 = 10 + 7$. Le travail sur le sens de la structure d'une expression numérique s'appuie sur les nombres écrits dans le système de numération décimale et leurs propriétés (parité, multiples de, etc.), sur les propriétés des opérations (commutativité, associativité de l'addition et de la multiplication,

distributivité de la multiplication par rapport à l'addition), mais aussi sur les techniques de décomposition, recombinaison des expressions numériques. Dans l'exemple donné en introduction, le calcul multiplicatif de l'expression numérique 32×25 utilise le fait que 32 est un multiple de 4 et que la recombinaison multiplicative de 4 et de 25 est 100, fait numérique qui doit être un prérequis. Ces aspects étant travaillés à l'école primaire, l'équivalence peut donc être abordée dès l'école primaire. De plus, l'équivalence est mise en jeu dans les techniques de décomposition et de recombinaison des expressions numériques utilisées en calcul réfléchi écrit (Butlen 2007; Butlen et Pézard, 2000) pour obtenir des calculs plus économiques (Piolti-Lamorthé et Roubin, 2010). Par exemple, réécrire l'expression numérique 12×99 en $12 \times 99 = 12 \times 100 - 12$ repose sur la décomposition de 99 en $100 - 1$, la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et celle du produit par 100.

Nous interprétons les aspects épistémologiques, développés dans Pilet et Grugeon-Allys (2021), des objets en jeu dans un calcul sur les expressions numériques au regard de l'approche de Kieran. Chevallard (1984, p. 75) distingue l'efficacité désignative d'une expression numérique pour le calcul de sa valeur, de la valeur monstrative visant à réécrire une expression pour faire apparaître « l'information monstrative pertinente » au regard du but visé. La valeur monstrative prend en compte la structure de l'expression numérique, ce qui met bien en jeu la dimension structurelle de l'équivalence pour transformer l'expression en fonction du but visé (réflexivité).

Sfard (1991) distingue les caractères structural et procédural des concepts mathématiques, ceux-ci étant perçus soit comme des processus (procédural), soit comme des objets (structural). Ces deux caractères cohabitent lors de l'activité mathématique. Par exemple, en ce qui concerne l'exécution du programme de calcul « Prendre un nombre, lui additionner 3 et multiplier le résultat par 5 » pour le nombre 7, au moins deux stratégies de calcul sont envisageables, l'une qui privilégie le caractère procédural $7 + 3 = 10$ et $10 \times 5 = 50$, l'autre le caractère structural du programme de calcul $(7 + 3) \times 5 = 10 \times 5 = 50$. Le premier sollicite uniquement l'effectuation des calculs pas à pas. Le second nécessite d'appréhender la structure de l'expression, résultat du programme de calcul, de connaître les priorités opératoires et le rôle des parenthèses pour savoir représenter le programme de calcul et de mobiliser l'équivalence lors de la recombinaison. Selon Sfard (1991), dans l'apprentissage d'un concept, l'élève mobilise souvent en premier son caractère procédural avant son caractère structural.

Ainsi, nous avons montré qu'au-delà de l'activité générative pour travailler l'analyticité, l'aspect transformationnel de l'activité numérique-algébrique,

notamment dans des tâches de calcul, mobilise l'équivalence dans ses deux dimensions opératoire et structurelle et peut favoriser l'entrée dans la pensée algébrique, avant l'usage du symbolisme algébrique.

1.2 Une praxéologie régionale relative aux expressions numériques

Nous nous situons dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD) (Chevallard, 1999) et nous utilisons le modèle de praxéologie mathématique comme modélisation de l'activité mathématique et des savoirs qu'elle utilise et engendre. La pensée mathématique est associée à une activité mathématique que nous décrivons par des praxéologies. Les praxéologies sont décrites par des tâches t qui relèvent de type de tâches T , et chacune d'elles étant résolue par au moins une technique τ , justifiée par un discours justificatif appelé technologie θ , lui-même justifié par une théorie Θ . Ces éléments forment une praxéologie $[T; \tau; \theta; \Theta]$ dite ponctuelle.

Dans l'enseignement, les praxéologies ponctuelles ne peuvent pas vivre seules, elles s'agrègent selon différents niveaux de codétermination didactique, selon l'organisation didactique mise en œuvre dans les classes. Les praxéologies ponctuelles s'agrègent autour d'une même technologie pour former une praxéologie locale. Les praxéologies locales s'agrègent, à leur tour, autour d'une même théorie pour former une praxéologie régionale. Enfin, les praxéologies régionales peuvent s'agréger en une praxéologie globale qui forme une discipline (ici, les mathématiques).

Pour prendre en compte les évolutions de l'activité mathématique à la transition entre primaire et secondaire, et les évolutions technologiques en jeu dans les rapports institutionnels aux objets de savoir des programmes, il est nécessaire pour le chercheur de se dégager du modèle dominant de l'institution qu'il étudie et de construire une référence pour analyser la transposition didactique (Bosch et Gascón, 2005). De nombreux travaux contribuent à définir un modèle praxéologique de référence de l'algèbre élémentaire (Ruiz-Munzón et al., 2020), certains étant formalisés en termes praxéologiques avec un grain plus fin selon les analyses visées (Grugeon-Allys et al., 2012; Pilet, 2015; Sirejacob, 2017).

Nous nous situons dans le prolongement des travaux de Bronner et Larguier (2018) et de Bronner et Squalli (2021) sur la définition d'un modèle épistémologique de référence de la pensée algébrique (MERPA) et étendons les modèles praxéologiques de référence relatifs aux expressions algébriques (Pilet, 2015) et équations (Sirejacob, 2017) aux expressions numériques pour l'activité « numérico-algébrique ».

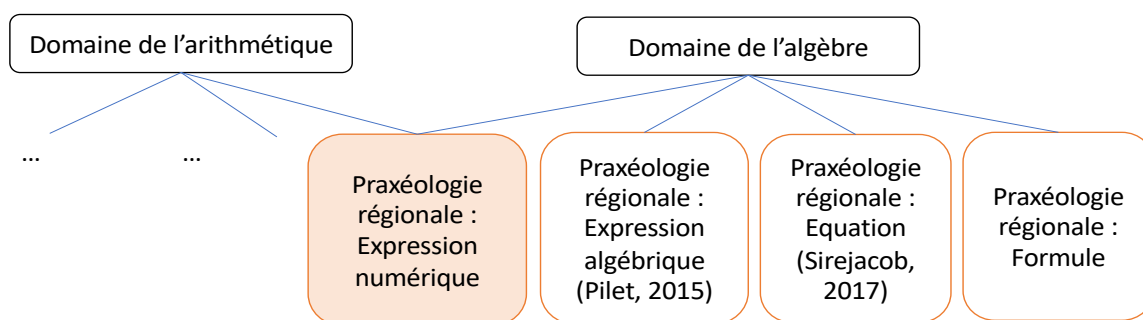


Figure 1. La praxéologie régionale sur les expressions numériques (Pilet et Grugeon-Allys, 2021, p. 18)

Nous décrivons la praxéologie régionale relative aux expressions numériques en termes de trois praxéologies locales : modéliser des relations dans un problème de généralisation, modéliser des relations entre les quantités connues et inconnues d'un problème additif et/ou multiplicatif, calculer des expressions numériques.

L'enjeu de chaque praxéologie locale, décrit dans Pilet et Grugeon-Allys (2021), est de caractériser l'activité numérique-algébrique visée à partir des tâches relevant de types de tâches la caractérisant, des techniques pour les résoudre et des technologies les justifiant. La praxéologie locale « calculer des expressions numériques » est fondée sur les aspects épistémologiques de l'activité numérique-algébrique développés précédemment autour de l'équivalence de l'égalité dans ses dimensions opératoire et structurelle, les propriétés des nombres et des opérations pour décomposer, recomposer des expressions numériques. Nous nous centrons ici sur le type de tâches T3.2 : Effectuer un calcul réfléchi appuyé sur l'usage des propriétés des nombres et des opérations (par exemple, 11×8 , 12×99 , 32×25 , $405 : 5$). Nous distinguons les techniques et technologies visées par les tâches relevant de T3.2 de celles potentiellement réalisées par les élèves (par exemple, technique de calcul posé effectuée mentalement, technique en appui sur des décompositions canoniques additives des nombres alors qu'une décomposition multiplicative est plus pertinente), ce que nous précisons dans le paragraphe 2.

Dans la suite de l'article, nous caractérisons avec un grain plus fin le type de tâche T3.2 et l'opérationnalisons pour l'analyse de manuels français de fin de primaire (CM2).

2. Praxéologie relative au calcul réfléchi T3.2 et plus particulièrement multiplicatif

Pour analyser les manuels, nous avons eu besoin d'affiner le modèle praxéologique, le critère « type de tâche » correspondant à un grain trop gros pour l'analyse des exercices de type T3.2.

Pour ce faire, en ce qui concerne le type de tâche T3.2 : « Effectuer un calcul réfléchi appuyé sur l'usage des propriétés des nombres et des opérations », nous avons défini la méthode suivante en distinguant les types de calculs réfléchis selon l'opération en jeu, les variables de type de tâches et les variables de tâches.

2.1 Les types de calculs selon l'opération

Nous distinguons d'abord les types de calculs selon l'opération en jeu : T3.2.1 pour un calcul additif, T3.2.2 pour un calcul soustractif, T3.2.3 pour un calcul multiplicatif et T3.2.4 pour un calcul de division. Nous caractérisons ensuite plus finement le calcul multiplicatif T3.2.3.

Partons d'un exemple pour introduire nos choix à partir de questions sur les techniques et technologies utilisées pour faire un calcul réfléchi de même nature selon les décompositions - recompositions efficaces. Les deux calculs 16×25 ou 21×25 ne mettent pas en jeu les mêmes propriétés des nombres, de la numération décimale et des opérations pour décomposer - recomposer les expressions numériques afin de dégager un calcul s'appuyant sur des faits numériques³ connus :

$16 \times 25 = 4 \times 4 \times 25$; comme $4 \times 25 = 100$, l'application de l'associativité de la multiplication conduit à $16 \times 25 = 4 \times 100 = 400$. Ce calcul multiplicatif réfléchi 16×25 vise à utiliser le fait numérique « 4×25 », ce qui est possible car 16 est un multiple de 4. En revanche, 21 n'est pas un multiple de 4 et aucune décomposition multiplicative ne permet une recomposition s'appuyant sur d'autres faits numériques. Le calcul multiplicatif réfléchi 21×25 nécessite donc de s'appuyer sur la décomposition canonique de 21, $2 \times 10 + 1$, pour engager l'usage de la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. En effet, $21 \times 25 = 20 \times 25 + 25 = 250 + 25 = 275$. La technique qui consiste à effectuer

³ Les faits numériques sont des résultats de calculs automatisés afin d'être disponibles à l'élève au cours d'un calcul. Par exemple, les tables, les doubles, les multiples de 25, les décompositions multiplicatives de 100 sont des faits numériques. Dans l'institution scolaire française, ils sont explicitement répertoriés en fonction du niveau scolaire.

mentalement l'algorithme de calcul posé de 21 par 25 s'appuyant sur les principes de la numération décimale et la distributivité ne relève pas du calcul réfléchi.

Cet exemple met en évidence, pour un produit de deux nombres, l'utilisation de deux décompositions différentes (décomposition multiplicative ou décomposition additive) qui conduisent à des techniques différentes et reposant sur des technologies différentes. La technique s'appuyant sur la décomposition additive met en jeu huit étapes : la décomposition additive canonique de 21, l'application de la distributivité, le calcul de 20×25 , qui lui-même sollicite une technique de décomposition multiplicative $20 = 2 \times 10$, l'associativité de la multiplication, le fait numérique $2 \times 25 = 50$, la multiplication de 50 par 10 et l'addition de 250 et de 25. La technique s'appuyant sur la décomposition multiplicative met en jeu quatre étapes : la décomposition multiplicative de 16 en 4×4 , l'associativité de la multiplication, le fait numérique $4 \times 25 = 100$ et la multiplication par 100. La première technique est plus coûteuse en nombre de décompositions, d'opérations et d'application de propriétés que la deuxième.

2.2 Les variables de types de tâches pour catégoriser les calculs selon leur structure

Nous distinguons les variables de types de tâches des variables de tâches. Les variables de types de tâches (Chaachoua, 2018) ont pour rôle de catégoriser les calculs selon la structure mise en jeu dans une décomposition efficace du calcul en lien avec certaines propriétés des nombres et des opérations. Dans le calcul multiplicatif, nous définissons deux variables de types de tâches :

- VT1 : nombre de facteurs du produit; c'est un nombre entier appartenant à $\{2, 3, \dots\}$
- VT2 : structure du calcul {décomposition multiplicative (VT2.1), décomposition additive (VT2.2)}, chaque décomposition visant à organiser la décomposition-recomposition du calcul la moins coûteuse, selon les propriétés des nombres et des opérations en jeu, les répertoires multiplicatifs connus dans l'institution, à un niveau scolaire donné.

Pour chaque type de décomposition, nous dégageons des sous-structures (tableaux 1 et 2) pour affiner les critères d'analyse des exercices des manuels. Nos choix de sous-structures s'appuient sur les propriétés des nombres et des opérations. Ils visent à produire une catégorisation, non exhaustive et pas unique, permettant de distinguer des structures de calcul et d'y associer des calculs pertinents au regard des enjeux d'apprentissage de chaque structure. Aussi, si un produit se décompose de plusieurs façons, nous retenons la plus pertinente, au regard du coût en nombre de décompositions, d'opérations et d'application de propriétés, comme nous l'avons détaillé dans l'exemple du paragraphe 2.1. Par

exemple, la structure multiplicative VT2.1.5* (tableau 1) est pertinente pour le calcul 12×25 , car la décomposition de 12 en 3×4 permet une recombinaison mobilisant le fait numérique $4 \times 25 = 100$ (Butlen et Pézard, 1992). En revanche, la structure additive VT2.2.1 (tableau 2) conduisant à décomposer canoniquement 12 en $1 \times 10 + 2$ et appliquer la distributivité est plus coûteuse, car elle ne permet pas d'utiliser le fait numérique $4 \times 25 = 100$.

Pour VT2.1, la technique de décomposition multiplicative consiste à décomposer multiplicativement au moins un des facteurs pour se ramener à des recombinaisons portant sur des calculs multiplicatifs moins coûteux. La technologie repose sur les faits numériques multiplicatifs (tables, doubles, etc.), sur les propriétés de la multiplication (commutativité et d'associativité) et de la division, et sur les équivalences d'écritures d'un même nombre.

Pour VT2.2, la technique de décomposition additive consiste à décomposer additivement au moins un des facteurs en vue d'utiliser la distributivité de la multiplication sur l'addition et de se ramener à des recombinaisons portant sur des calculs moins coûteux, notamment la multiplication par une puissance de 10. La technologie repose sur la numération décimale, sur les faits numériques multiplicatifs et additifs (tables, compléments, etc.), sur la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition, sur les propriétés de la multiplication et de l'addition (commutativité et d'associativité) et sur les équivalences d'écritures d'un même nombre.

Dans le cas où VT1 a pour valeur plus de deux facteurs, la technique correspond à la réorganisation des facteurs par la commutativité et l'associativité de la multiplication pour se ramener à des faits numériques supposés connus en fonction du niveau scolaire ou à un des produits de deux facteurs ($VT1 = 2$).

Tableau 1 : Les sous-structures pour VT1 = 2 facteurs A et B et VT2.1 = décomposition multiplicative d'au moins un des facteurs du produit, non premier et différent de 2

Sous-structures de VT2.1	Commentaires et Exemples
VT2.1.1 A=3 et B se décompose	$24 \times 3 = 8 \times 3 \times 3 = 8 \times 9 = 72$
VT2.1.2 A appartient à {4, 6, 8} et B non divisible par 5	C'est la décomposition de 4, 6 et 8 en respectivement 2×2 , 2×3 , $2 \times 2 \times 2$ qui est visée. Le cas où B divisible par 5 est pris en compte dans VT2.1.5. $4 \times 16 = 2 \times (2 \times 16) = 2 \times 32 = 64$
VT2.1.3 $B = k \times 10^n$, avec k non nul de 1 et $A \times k$ connu ou se ramenant aux autres cas	Nous excluons les calculs portant sur « multiplier par 10, 100, 1000 ». $17 \times 20 = 17 \times 2 \times 10 = 34 \times 10 = 340$ $17 \times 40 = 17 \times (4 \times 10) = (17 \times 2) \times 2 \times 10 = 34 \times 2 \times 10 = 680$
VT2.1.4 $A = k \times 10^n$ et $B = k' \times 10^m$, avec k et k' non nuls différents de 1, $k \times k'$ connu ou se ramenant aux autres cas	$800 \times 30 = (8 \times 3) \times 100 \times 10 = 24000$
VT2.1.5 A multiple de 5 et B pair	Ce cas vise des décompositions-recompositions utilisant le fait numérique $2 \times 5 = 10$ et ses équivalents comme $5 = 10 : 2$. $48 \times 5 = (24 \times 2) \times 5 = 24 \times (2 \times 5) = 24 \times 10 = 240$ $48 \times 5 = 48 \times (10 : 2) = (48 : 2) \times 10 = 24 \times 10 = 240$ $12 \times 15 = (2 \times 6) \times (5 \times 3) = (6 \times 3) \times 10 = 180$
VT2.1.5* Cas particulier : A multiple de 25 et B divisible 4	Ce cas particulier vise des décompositions-recompositions utilisant le fait numérique $4 \times 25 = 100$ et ses équivalents. $32 \times 25 = 8 \times 4 \times 25 = 8 \times 100 = 800$ $32 \times 25 = 32 \times (100 : 4) = (32 : 4) \times 100 = 8 \times 100 = 800$ $12 \times 25 = 3 \times 4 \times 25 = 3 \times 100 = 300$ $125 \times 8 = 5 \times 25 \times 4 \times 2 = 100 \times 10 = 1000$
VT2.1.6 A multiple de 5 et B impair	Ce cas particulier vise des décompositions-recompositions utilisant le fait numérique $5 = 10 : 2$. $13 \times 5 = 13 \times 5 = (13 \times 10) : 2 = 65$ $13 \times 50 = (13 \times 100) : 2 = 1300 : 2 = 650$

Tableau 2 : Les sous-structures pour VT1 = 2 facteurs A et B et VT2.2 = décomposition additive, pour au moins un des facteurs du produit permettant de se ramener à un résultat intermédiaire connu à partir de l'usage de la propriété de distributivité

Sous-structures de VT2.2	Commentaires et Exemples
VT2.2.1 Décomposition canonique	$12 \times 13 = 12 \times (10 + 3) = 12 \times 10 + 12 \times 3$ $12 \times 13 = (10 + 2) \times 13 = 10 \times 13 + 2 \times 13$
VT2.2.2 Décomposition non canonique	$12 \times 26 = 12 \times (25 + 1) = 12 \times 25 + 12 = 300 + 12 = 312$ Sachant que $37 \times 63 = 2331$, calculer 37×630 , 37×126 , 37×73
VT2.2.2* Cas particulier. Un des facteurs est multiple de $10^n + 1$, avec n entier naturel non nul : 11, 101, 1001, etc. L'autre facteur a au moins 2 chiffres	Technique du pivotement $13 \times 101 = 13 \times 100 + 13$ $13 \times 11 = 13 \times (10 + 1) = 13 \times 10 + 13 = 143$
VT2.2.2** Cas particulier. Un des facteurs est de la forme $10^n - 1$, avec n entier naturel non nul : 19, 29, 39, etc., 199, etc.	Technique du pivotement $13 \times 19 = 13 \times 20 - 13$ $13 \times 99 = 13 \times 100 - 13$

2.3 Les variables de tâches pour définir des familles de tâches sur une même structure de calcul

Les variables de tâches visent à définir des familles de tâches autour d'une même catégorie de type de tâches donné (Grugeon-Allys et al., 2022; Jolivet et al., 2021). Elles sont codées « Vt » pour les distinguer des variables de types de tâches codées « VT ». Les variables concernent les nombres impliqués dans le calcul (taille et nature des nombres, etc.) et le nombre de décompositions et de recompositions impliquées dans le calcul. Nous énumérons ci-dessous les variables et leurs valeurs potentielles :

- Vt1 : La taille des nombres : de l'ordre des unités, des dizaines, etc.
- Vt2 : La nature des nombres
 - Vt2.1 : Naturels, décimaux,
 - Vt2.2 : Nombres familiers : ceux présents dans les tables de multiplication jusqu'à 12, ceux avec plusieurs décompositions multiplicatives comme 8, 12, 16, 18, 24, 32, 36, 48 (et 72 et 81), ceux avec des recompositions multiplicatives connues de 5 et de 2, de 25 et de 4, etc. en puissances de 10,

- Vt3 : L'ordre des facteurs
 - Vt3.1 La position du facteur multiplicatif dans le produit, selon qu'il induise une décomposition à droite ou à gauche du signe opératoire (différence entre 19×53 et 53×19). Cette variable est en lien avec la commutativité de la multiplication,
 - Vt3.2 Pour un produit d'au moins trois facteurs, s'il y a nécessité d'une réorganisation ou pas (commutativité et associativité),
- Vt4 : La réécriture à la charge de l'élève ou pas (Oui/Non). Si oui, cela concerne le nombre d'étapes de réécritures, le nombre de propriétés mises en jeu dans les techniques, l'ancienneté des propriétés.

Dans la partie suivante, nous opérationnalisons l'analyse en variables de types de tâches et en variables de tâches pour étudier les potentialités de deux manuels scolaires français à favoriser l'activité numérique-algébrique dans les tâches relevant du calcul réfléchi multiplicatif T3.2.3., c'est-à-dire les dimensions structurelle et calculatoire de l'équivalence et la valeur monstrative des expressions numériques.

3. Analyse de manuels

Notre analyse des textes officiels français de cycle 3⁴ (9-12 ans) a révélé que, bien que limitées, des potentialités curriculaires existent pour développer l'activité numérique-algébrique sur le cycle 3 (Pilet et Grugeon-Allys, 2021). C'est en particulier le cas pour le calcul réfléchi où les propriétés des opérations, même si elles ne sont pas explicitées aux élèves, participent aux transformations (décomposition et recomposition) opérées sur les expressions numériques. La valeur des expressions numériques et le statut de l'équivalence sont pris en compte. Nous nous interrogeons sur la façon dont les auteurs de manuels de cycle 3 se sont emparés ou non de ces potentialités pour le calcul multiplicatif réfléchi.

L'analyse en variables de types de tâches et de tâches nous permet de préciser notre questionnement. Nous cherchons à analyser quelles sont les structures de calculs (VT2.1 et VT2.2) travaillées dans les tâches prescrites par les manuels et avec quels nombres, sans questionner leur exploitation par les enseignants. Nous

⁴ En France, l'enseignement est structuré en cycles d'apprentissage. Le cycle 3 s'étale des deux dernières années de l'école primaire (CM1-CM2, 9-11 ans) à la première année du secondaire (collège, 6^e, 11-12ans). C'est au début du cycle 4 (classe de 5e) que l'algèbre est officiellement introduite.

pourrons ainsi questionner, d'une part, une incomplétude éventuelle de la praxéologie T3.2.3 « Effectuer du calcul réfléchi multiplicatif » et, d'autre part, la pertinence des calculs proposés au regard du coût des techniques.

3.1 Présentation des manuels analysés

Le cycle 3 étant composé de trois niveaux scolaires, nous avons choisi de restreindre notre analyse au niveau intermédiaire du Cours Moyen deuxième année, (CM2, élèves de 10-11 ans) qui est la dernière année de l'école primaire. L'introduction du symbolisme alphanumérique a lieu deux années plus tard dans les textes officiels.

En France, il existe une grande diversité dans les manuels de l'école primaire (Mounier et Priolet, 2015), ce qui rend difficile une analyse exhaustive. Nous avons restreint notre analyse à deux manuels. En France, un manuel est souvent composé de plusieurs ouvrages comme le livre de l'élève avec tout ou une partie des tâches, et le guide de l'enseignant qui précise les choix réalisés, conseille l'enseignant pour la mise en œuvre des tâches et présente des tâches qui ne seraient pas visibles dans le livre de l'élève. Un fichier à destination de l'élève dans lequel il peut écrire ses réponses est souvent disponible en complément. Nous analysons ici le livre de l'élève et le guide de l'enseignant. Le premier manuel est Cap Maths, édition 2017, chez Hatier (Charnay et al., 2016a, 2016b). Le second manuel est Maths explicites, édition 2016, chez Hachette (Castioni et al., 2016a, 2016b). Nous les avons retenus parce qu'ils présentent des potentialités pour développer l'activité numérique-algébrique à travers le calcul réfléchi multiplicatif, mais avec des différences marquées comme nous le développons dans les paragraphes suivants. Toutefois, ces manuels ne sont pas représentatifs de l'ensemble, nous restons donc prudentes quant à une généralisation des résultats au niveau des praxéologies enseignées en CM2.

3.2 Méthodologie

Nous restreignons notre analyse aux entiers.

Nous analysons les tâches de calcul réfléchi multiplicatif présentes dans le livre de l'élève ou dans le guide de l'enseignant sans calculatrice. Nous analysons également la ou les techniques attendues par le manuel. Elles sont décrites soit dans l'énoncé donné à l'élève par l'intermédiaire de la consigne ou d'un exemple, soit dans les indications données à l'enseignant dans le guide de l'enseignant.

Nous dénombrons les calculs proposés et associons chacun à la structure de calcul (tableaux 1 et 2) qui lui correspond. Nous dégageons les principales valeurs de variables de tâches présentes en faisant référence à la numérotation des variables introduites dans la deuxième partie (Vt_i). Lorsqu'un manuel propose plusieurs

techniques pour un même calcul, sans les hiérarchiser, nous associons le calcul à la technique la moins coûteuse, selon nos analyses, tout en indiquant que ce n'est pas la seule attendue du manuel. De plus, lorsqu'un manuel propose de travailler une structure de calculs avec des nombres non pertinents (décomposition non adaptée, nombres ne faisant pas intervenir un fait numérique, etc.), nous l'indiquons dans nos analyses.

Enfin, en lien avec la technologie de la praxéologie travaillée, nous analyserons les ostensifs privilégiés, comme les arbres de calculs, les écritures numériques en ligne, les formulations orales pour accompagner les calculs en ligne (exemples de 5×16 , calculer 5 fois 16, c'est 5 fois 10 plus 5 fois 6), etc.

3.3 Le calcul réfléchi multiplicatif dans le manuel Maths explicites

Les thèmes de calcul réfléchi sont annoncés dans la programmation du livre de l'élève, mais les tâches figurent uniquement dans le livre de l'enseignant. Elles sont organisées en 77 « leçons » (par exemple « multiplier par 5 un nombre à deux chiffres ») autour des quatre opérations et réparties par période d'enseignement. Vingt-deux (22) leçons concernent la multiplication. Nous en retenons 14 pour le calcul réfléchi multiplicatif sur les entiers. Pour chaque leçon, comme celle présentée dans la figure 2, au-delà de la compétence à travailler, le guide de l'enseignant propose une technique et des tâches.

Compétence : « Multiplier par 25, 250 ».

Stratégie : 25 est le quart de 100, il y a 4×25 dans 100. Il est donc possible de multiplier par 100 et de diviser par 4. $12 \times 25 = (12 \times 100) : 4 = 1\ 200 : 4 = 300$

Items : 13×25 ; 8×25 ; 6×25 ; 11×25 ; 30×25 .

Figure 2. Extrait du guide de l'enseignant de Maths explicites pour la leçon numéro 15 (Castioni et al., 2016b)

L'analyse de l'ensemble des calculs est présentée dans les tableaux 3 et 4. Nous dénombrons un total de 111 calculs dont 36 pour les décompositions multiplicatives et 75 pour les décompositions additives. Les produits sont uniquement à deux facteurs ($VT1 = 2$). Les sous-structures absentes sont au nombre de deux pour les décompositions multiplicatives ($VT2.1.1$ et $VT2.1.2$) et d'une pour les décompositions additives ($VT2.2.2$) puisque les décompositions additives non canoniques ne sont pas traitées. La moitié des calculs (57/111) portent sur les décompositions additives canoniques ($VT2.2.1$). Les décompositions multiplicatives sont travaillées lorsqu'un facteur est divisible par une puissance de 10 ou est égal à 5 ou 25. Ainsi, les décompositions multiplicatives de nombres familiers du répertoire multiplicatif (comme 4, 12, 15) ne sont pas abordées ($Vt2.2$), le manuel renvoie à une décomposition canonique (leçons 50

et 59, figures 3 et 4). La technologie travaillée est donc majoritairement portée par la propriété de distributivité et la numération décimale.

De plus, la leçon 42 « Multiplier 2 nombres entiers à 2 chiffres » (tableau 4, VT2.2.1) repose sur des calculs avec décomposition additive canonique qui vont au-delà des faits numériques à mémoriser indiqués dans les programmes (Vt2.2). Nous les avons conservés dans nos analyses tout en les distinguant des autres, même s'ils ne sont pas de bons candidats pour travailler VT2.2.1.

Tableau 3 : Les produits de deux facteurs $A \times B$ dans le cas d'une décomposition multiplicative, dans Maths explicites (VT1 = 2 facteurs A et B et VT2.1 = décomposition multiplicative)

Sous-structures de VT2.1	Nombre de calculs, commentaires et exemples
VT2.1.1 $A = 3$ et B se décompose	0
VT2.1.2 A appartient à $\{4, 6, 8\}$ et B non divisible par 5	0
VT2.1.3 $B = k \times 10^n$, avec k non nul différent de 1 et $A \times k$ connu ou se ramenant aux autres cas	6 calculs Leçons 9 et 11 : Multiplier par un multiple de 10, par 20, 200, 30, 300, par 40, 400, 50, 500 Exemples : 7×20 , 12×200
VT2.1.4 $A = k \times 10^n$ et $B = k' \times 10^m$, avec k et k' non nuls différents de 1, $k \times k'$ connu ou se ramenant aux autres cas	6 calculs et 10 dans le livre de l'élève ⁵ Leçons 9 et 11 : Multiplier par un multiple de 10, par 20, 200, 30, 300, par 40, 400, 50, 500 Exemples : 80×30 , 60×300
VT2.1.5 A multiple de 5 et B pair	7 calculs Leçon 28 : Multiplier par 5 un nombre à deux chiffres et Leçon 15 : Multiplier par 25, 250 Exemples : 5×24 ; 5×34 ; 5×18 ; 5×38 ; 5×82 ; 5×74 ; 6×25
VT2.1.5* Cas particulier : A multiple de 25 et B divisible 4	3 calculs Leçon 15 : Multiplier par 25, 250 Exemples : 12×25 ; 8×25 ; 30×25

⁵ Nous avons ajouté ces dix calculs figurant exceptionnellement dans le livre de l'élève.

VT2.1.6 A multiple de 5 et B impair	4 calculs Leçons 28 et 15 : Multiplier par 5 un nombre à deux chiffres et Multiplier par 25, 250 Exemples : 5×63 ; 5×25 ; 13×25 ; 11×25
-------------------------------------	---

Tableau 4 : Les produits de deux facteurs $A \times B$ dans le cas d'une décomposition additive, dans Maths explicites (VT1 = 2 facteurs A et B et VT2.2 = décomposition additive)

Sous-structures de VT2.2	Nombre de calculs, commentaires et exemples
VT2.2.1 Décomposition canonique	51 calculs + 6 calculs qui vont au-delà des faits numériques Leçons : 36 : Calculer le triple d'un nombre à 2 chiffres (avec retenue), 20 : Calculer le quadruple d'un nombre, 52 : Multiplier un nombre par un nombre à 1 chiffre sans retenue, 40 : Multiplier un nombre de 2 chiffres par un nombre d'un chiffre avec retenue, 42 : Multiplier 2 nombres entiers à 2 chiffres, 50 : Multiplier par 11, 12... 15 un nombre à un chiffre, 59 : Multiplier par 12 et 15 Exemples : triple de 47, quadruple de 86, 8×401 , 84×7 , 23×12 , 34×15
VT2.2.2 Décomposition non canonique	0
VT2.2.2* Cas particulier. Un des facteurs est multiple de $10^n + 1$, avec n entier naturel non nul : 11, 101, 1001, etc. L'autre facteur a au moins 2 chiffres	9 calculs Leçons 30 et 39 : Multiplier par 99, 101, Multiplier par 11 (nombres inférieurs à 100) Exemples : 11×24 ; 11×56 ; 101×24
VT2.2.2** Cas particulier. Un des facteurs est de la forme $10^n - 1$, avec n entier naturel non nul : 19, 29, 39, etc., 199, etc.	9 calculs Leçons 10 et 30 : Multiplier par 9, Multiplier par 99, 101, Exemples : 13×9 , 22×9 , 99×24

Compétence : « Multiplier par 11, 12... 15 un nombre à un chiffre » ($23 \times 12 = ?$).

Stratégie : On multiplie d'abord le nombre par 10 puis par le chiffre des unités et on additionne les 2 produits. $23 \times 12 = (23 \times 10) + (23 \times 2) = 230 + 46 = 276$

Items : 56×12 ; 86×13 ; 42×14 ; 28×15 ; 47×11 ; 51×13 .

Figure 3. Extrait du guide de l'enseignant de Maths explicites pour la leçon numéro 50 où les décompositions additives canoniques sont privilégiées par rapport aux décompositions multiplicatives (Castioni et al., 2016b)

Compétence : « Multiplier par 12 et 15 ».

Stratégie : $14 \times 12 = 14 \times (10 + 2) = (14 \times 10) + (14 \times 2) = 140 + 28 = 168$

Quand je multiplie un nombre par 12, j'additionne le produit du nombre par 10 et le produit du nombre par 2.

Stratégie : $14 \times 15 = (14 \times 10) + (14 \times 5) = (14 \times 10) + [(14 \times 10) : 2] = 140 + 70 = 210$

Quand je multiplie un nombre par 15, j'additionne le produit du nombre par 10 et la moitié du produit obtenu.

Items : 21×12 ; 21×15 ; 34×12 ; 34×15 ; 42×12 ; 42×15 .

Figure 4. Extrait du guide de l'enseignant de Maths explicites pour la leçon numéro 59 où les décompositions additives canoniques sont privilégiées par rapport aux décompositions multiplicatives (Castioni et al., 2016b)

Du côté des variables de tâches, les nombres (Vt1) sont majoritairement à 2 chiffres, parfois à 3 chiffres. Nous avons analysé les nombres entiers, mais des calculs portent sur les décimaux (Vt2.1). La position du facteur multiplicatif à décomposer dans le produit varie sur quelques cas (Vt3.1). Des calculs pourraient donner lieu à une comparaison des techniques proposées (Vt4), mais ce n'est pas là dans ce qui est suggéré à l'enseignant alors que cette comparaison pourrait être profitable à l'apprentissage futur de l'algèbre. Par exemple, dans la leçon 10, c'est la multiplication par 9 qui est présentée avec une technique de décomposition de type pivot où 9 est décomposé en 10-1. Plus tard, dans la leçon 40, c'est la multiplication d'un « Multiplier un nombre de 2 chiffres par un nombre d'un chiffre avec retenue » qui est traitée par une décomposition additive canonique du nombre à deux chiffres. Le calcul 62×9 est proposé avec une décomposition canonique de 62 sans qu'un retour sur la technique de la leçon 10 ne soit suggéré. La place du raisonnement laissé à la charge de l'élève est donc réduite (Vt4) puisque le manuel semble attendre que les élèves transposent la technique suggérée dans l'exemple sur les autres calculs de la leçon même s'ils ont appris une autre technique auparavant.

De plus, pour décrire et justifier les techniques, le manuel propose des discours technologiques de plusieurs natures. Un discours technologique appuyé par des écritures en ligne, dans lesquelles les décompositions et recompositions sont apparentes par l'intermédiaire de parenthèses, est toujours présent. Un discours technologique ostensif et mnémotechnique, non porté par les propriétés mathématiques, est également présent avec des formulations qui proposent des « astuces » (par exemple, leçon 39, pour multiplier par 11 un nombre à deux chiffres : « Une astuce consiste à placer entre les 2 chiffres du nombre leur somme : $1 (1 + 5) \rightarrow \cdot 165$ »). L'analyse du livre de l'élève autour de la multiplication dévoile également un discours technologique simplificateur de la multiplication par un multiple de 10, illustré par des flèches (figure 5).

APPRENONS ENSEMBLE

3 Recopie et complète.

$$70 \times 80 = (7 \times 10) \times (8 \times 10)$$

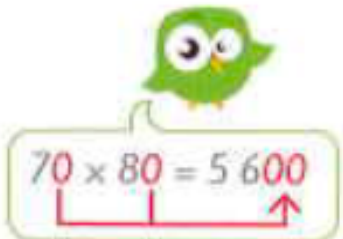
$$= 56 \times 100 = 5\,600$$


Figure 5 : Extrait du livre de l'élève de Maths explicites pour décrire une technique de multiplication par un multiple de 10 (Castioni et al., 2016a, p. 54-55)

3.4 Le calcul réfléchi multiplicatif dans le manuel Cap Maths

Une moitié des calculs réfléchis multiplicatifs apparaît dans le livre de l'élève dans les pages de calculs réfléchis intitulées « Fort en calcul mental » et réparties tout au long de l'année. Les calculs sont donnés avec la consigne « Calcule » ou « Calcule mentalement » parfois complétée de « Explique comment tu as trouvé les réponses ». Aucune autre consigne ou indication n'est donnée, notamment sur la structure du produit ou les propriétés des nombres. L'autre moitié des calculs est présente dans le guide du maître. C'est dans ce guide que les techniques sont décrites et justifiées et que des indications de gestion et de formulation sont données à l'enseignant. Par exemple, seul l'enseignant est informé du fait qu'un ensemble d'exercices regroupe des calculs autour d'une même thématique, comme l'un des facteurs est 25, 11, 12.

Le manuel Cap Maths traite des produits de deux facteurs uniquement (VT1 = 2) et toutes les sous-structures, multiplicatives et additives, sont traitées (VT2, tableaux 5 et 6). Au total, 173 calculs réfléchis multiplicatifs sont codés dont 110 pour les décompositions multiplicatives et 53 pour les décompositions additives. Cap Maths met l'accent sur les décompositions multiplicatives, notamment autour des nombres familiers divisibles par 15 et des nombres 12, 24, 48. Le jeu sur la variable de tâches Vt2.2 est important. Ajoutons, de plus, qu'en amont du calcul réfléchi multiplicatif, le manuel propose du calcul automatisé multiplicatif qui met l'accent sur des décompositions multiplicatives. Par exemple, il est demandé de trouver le plus possible de façons d'écrire des nombres des répertoires connus (28, 7, 40, 64, 72, etc.) sous la forme « ... ×... ».

Tableau 5 : Les produits de deux facteurs $A \times B$ dans le cas d'une décomposition multiplicative, dans Cap Maths CM2 (VT1 = 2 facteurs A et B et VT2.1 = décomposition multiplicative)

Sous-structures de VT2.1	Nombre de calculs, commentaires et exemples
VT2.1.1 $A = 3$ et B se décompose	1 calcul avec une décomposition additive Exemple : 24×3
VT2.1.2 A appartient à $\{4, 6, 8\}$ et B non divisible par 5	4 calculs avec une décomposition additive Exemples : $12 \times 8, 26 \times 4$
VT2.1.3 $B = k \times 10^n$, avec k non nul différent de 1 et $A \times k$ connu ou se ramenant aux autres cas,	54 calculs Exemples : $700 \times 4, 20 \times 13, 12 \times 20$
VT2.1.4 $A = k \times 10^n$ et $B = k' \times 10^m$, avec k et k' non nuls différents de 1, $k \times k'$ connu ou se ramenant aux autres cas	3 calculs Exemples : $40 \times 30, 60 \times 20$
VT2.1.5 A multiple de 5 et B pair	35 calculs dont 29 avec une décomposition additive Exemples : $24 \times 5, 35 \times 4, 22 \times 25$
VT2.1.5* Cas particulier : A multiple de 25 et B divisible 4	8 calculs dont 6 avec une décomposition additive Exemples : $25 \times 12, 8 \times 25, 24 \times 25$
VT2.1.6 A multiple de 5 et B impair	5 calculs avec une décomposition additive Exemples : $15 \times 5, 75 \times 5$

Tableau 6 : Les produits de deux facteurs $A \times B$ dans le cas d'une décomposition additive, dans Cap Maths CM2 (VT1 = 2 facteurs A et B et VT2.2 = décomposition additive)

Sous-structures de VT2.2	Nombre de calculs, commentaires et exemples
VT2.2.1 Décomposition canonique	17 calculs dont 5 avec une décomposition multiplicative Exemples : $23 \times 12, 14 \times 25, 104 \times 7$
VT2.2.2 Décomposition non canonique	5 calculs Exemple : 37×73 sachant $37 \times 63 = 2331$
VT2.2.2* Cas particulier. Un des facteurs est multiple de $10^n + 1$, avec n entier naturel non nul : 11, 101, 1001, etc. L'autre facteur a au moins 2 chiffres	21 calculs dont 1 avec une décomposition additive (61×5) Exemples : $29 \times 11, 18 \times 11, 25 \times 101$
VT2.2.2** Cas particulier. Un des facteurs est de la forme $10^n - 1$, avec n entier naturel non nul : 19, 29, 39, etc., 199, etc.	10 calculs Exemples : $15 \times 9, 12 \times 19, 49 \times 4$

Une spécificité de Cap Maths est de proposer, lorsque c'est possible, au moins deux décompositions, une additive et une multiplicative, mais en hiérarchisant rarement les techniques associées (cf. figures 6 et 7 sans hiérarchisation et figure 8 avec hiérarchisation). D'ailleurs, à ce propos, Butlen (2007) questionne l'apport d'une plus grande maîtrise de procédures de calcul diversifiées et d'une plus grande disponibilité de propriétés des nombres et des opérations sur l'automatisation de la reconnaissance d'opérations arithmétiques dans la résolution des problèmes arithmétiques. C'est pourquoi, pour dénombrer les calculs de chaque structure, nous avons fait le choix de comptabiliser chaque calcul pour la structure la plus pertinente qu'il peut faire intervenir, au regard des propriétés en jeu et du coût, par exemple une technique reposant sur une décomposition multiplicative de 12 pour 12×25 .

Cette spécificité de Cap Maths conduit à laisser à la charge de l'élève le choix d'une décomposition. Toutefois, sans indication supplémentaire de la part de Cap Maths, on peut se demander si ce choix ne risque pas de renforcer les techniques reposant sur des décompositions additives, connues des élèves depuis plusieurs années, souvent fréquemment rencontrées et avec un domaine d'application plus grand (tout nombre peut se décomposer additivement canoniquement), mais parfois plus coûteuses.

EXERCICES 1 2

Ces exercices sont l'occasion pour les élèves d'utiliser les procédures et propriétés mises en évidence lors de la recherche. Pour calculer ces produits, il est possible de décomposer un des facteurs sous forme de somme ou de produit.

Exemple : pour 25×12 on peut s'appuyer :

– soit sur la décomposition de 12 en $10 + 2$:

$$25 \times 12 = 25 \times (10 + 2) = (25 \times 10) + (25 \times 2) = 250 + 50 ;$$

– soit sur la décomposition de 12 en 4×3 :

$$25 \times 12 = 25 \times (4 \times 3) = (25 \times 4) \times 3 = 100 \times 3.$$

La décomposition de 12 en produit aurait aussi pu être : 2×6 .

Dans tous les cas, veiller à utiliser des formulations relevant de trois registres et à les mettre en relation :

Figure 6 : Extrait du guide du maître de Cap Maths pour 25×12 (Charnay et al., 2016b, p. 19)

Le fait de ne pas hiérarchiser les techniques ne permet pas de mettre en valeur une technique plutôt qu'une autre, avec un domaine d'application plus vaste. Nous interrogeons, par exemple, le choix du nombre 15 pour illustrer des techniques de

multiplication par 5. Les propriétés de 15 offrent plusieurs décompositions et recompositions dont certaines sont spécifiques à « multiplier par 15 » et non à « multiplier par 5 » (par exemple calculer 30×5 et diviser par 2, utiliser le fait que $15 \times 4 = 60$). Il nous semble que cela limite la portée de la technique consistant à multiplier par 10 et diviser par 2 pour multiplier par 5.

Il n'y a pas de stratégie générale pour multiplier par 5 ou 50.
 Pour 15×5 , différentes stratégies peuvent être utilisées :

- calculer 10×5 , puis 5×5 et faire la somme des résultats ;
- multiplier 15 par 10 puis diviser le résultat par 2 ;
- calculer 30×5 puis diviser par 2 ;
- s'appuyer sur le fait que $15 \times 4 = 60$ est connu et lui ajouter 15....

Figure 7 : Extrait de Cap Maths quand un des facteurs est 5 ou 50 (Charnay et al., 2016b, p. 73)

Dans les calculs proposés, la place du nombre à décomposer dans le produit varie (Vt3.1), par exemple dans la figure 8, ce qui peut donner lieu à des décompositions « à droite » ou « à gauche » et à travailler la commutativité de la multiplication. De plus, l'enchaînement des calculs proposés peut donner lieu à d'autres décompositions que celle attendue. Par exemple, dans la figure 8, utiliser le fait que 30 est le double de 15 pour calculer 11×30 connaissant 15×11 . Nous retrouvons ici une caractéristique de Cap Maths, les familles de nombres choisies ne permettent pas de travailler exclusivement la technique s'appuyant sur la décomposition canonique de 11 en $10 + 1$ pour multiplier un entier par 11. Elles permettent de réinvestir (ou de découvrir) d'autres techniques qui font appel à d'autres propriétés des opérations et des nombres. Cela n'est pas suggéré à l'enseignant et donc laissé potentiellement à la charge des élèves (Vt4).

6 Calculs dictés : un des facteurs est 11

a. 8×11 **b.** 12×11 **c.** 15×11 **d.** 11×30 **e.** 11×25
f. 10×11 **g.** 11×11 **h.** 20×11 **i.** 23×11 **j.** 29×11

GUIDE : **a.** 88 **b.** 132 **c.** 165 **d.** 330 **e.** 275 **f.** 110 **g.** 121
h. 220 **i.** 253 **j.** 319.

MANUEL : **a.** 77 **b.** 154 **c.** 385 **d.** 550 **e.** 242 **f.** 330 **g.** 231
h. 660 **i.** 198.

La stratégie qui consiste à multiplier le nombre par 10 et à ajouter ce nombre au résultat obtenu est souvent la plus efficace : cela revient à décomposer 11 en $10 + 1$. Mais cette procédure n'est pas toujours la plus simple, par exemple :

- pour 11×30 , il est plus simple de multiplier 11 par 3, puis le résultat obtenu par 10 ;
- pour 10×11 , le résultat peut être écrit directement.

Figure 8 : Extrait du guide du maître de Cap Maths quand un des facteurs est 11 (Charnay et al., 2016b, p. 73)

Cap Maths est sensible à la dimension ostensive de l'activité mathématique. En effet, le manuel insiste sur l'importance d'accompagner les décompositions et recompositions par différentes formulations (figures 9 et 10) et d'amener les élèves aux écritures en ligne (appelées « formulation symbolique » ou « langage mathématique ») dont nous avons souligné l'importance. Toutefois, notons que cette richesse n'est pas toujours exploitée. Les écritures en ligne ne sont que partielles dans beaucoup d'exemples où l'égalité ne figure pas (figures 7 et 8).

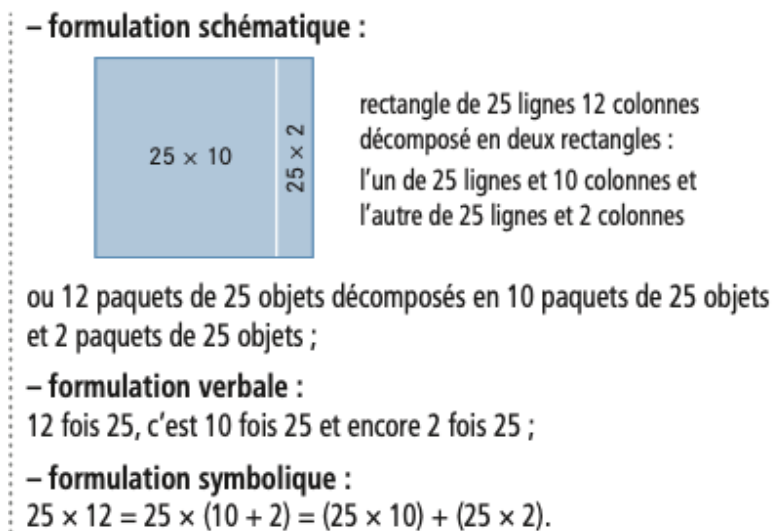


Figure 9 : Extrait du guide du maître de Cap Maths pour 25×12 (Charnay et al., 2016b, p. 19)

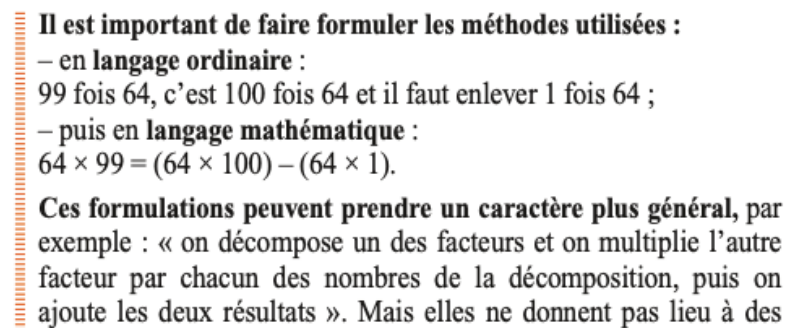


Figure 10 : Extrait du guide du maître de Cap Maths pour 64×99 (Charnay et al., 2016b, p. 19)

3.5 Comparaison des manuels et bilan

Les analyses de ceux manuels font ressortir des caractéristiques assez différentes. Cap Maths contient plus de calculs multiplicatifs réfléchis que Maths explicites et traite toutes les structures de deux facteurs même si certaines ont une faible occurrence. Les structures de décompositions multiplicatives (VT2.1) sont travaillées autant que celles de décompositions additives (VT2.2). Cap Maths ne

suggère à l'enseignant ni de systématiser une technique ni de hiérarchiser les techniques entre elles mais le guide de l'enseignant met en avant la diversité des techniques possibles pour un même calcul. Les nombres rencontrés favorisent ce choix et la réécriture est laissée à la charge des élèves.

Maths explicites traite la majorité des structures de deux facteurs (VT2), mais les décompositions multiplicatives (VT2.1) ne sont que partiellement travaillées, l'accent est mis sur les décompositions additives canoniques (VT2.2.1). Le manuel systématise le travail d'une technique en explicitant la sous-structure (multiplier par 11, par un nombre à deux chiffres). C'est l'application d'un modèle au sein d'un ensemble de calculs ayant la même structure qui est attendu, ce qui limite la responsabilité laissée aux élèves pour reconnaître différentes structures. Seuls quelques exercices pourraient être propices à un réinvestissement des techniques rencontrées et à laisser à l'élève le choix d'une technique appropriée, mais cela n'est pas suggéré.

Enfin, du côté des ostensifs utilisés pour décrire les techniques et les justifier, Cap Maths en propose une diversité, mais sans que les écritures en ligne ne soient systématiquement écrites. Le manuel Maths explicites s'appuie également sur des formulations verbales et des écritures en ligne, ces dernières étant toujours présentes. Mais certaines formulations sont orientées sur l'application de recettes ou de règles peu appuyées par des justifications mathématiques (comme dans la figure 5).

Ainsi, la praxéologie T3.2.3 sur le calcul réfléchi multiplicatif est complète dans Cap Maths et relativement complète dans Maths explicites, ce dernier manuel insistant sur les décompositions additives canoniques. Ces deux manuels offrent donc des potentialités pour travailler les aspects épistémologiques des expressions numériques et favoriser l'activité numérique-algébrique. Toutefois, les analyses font ressortir des faiblesses dans chaque manuel comme la limitation à l'application d'un « modèle » de calcul à partir d'un exemple pour Maths explicites et un faible nombre de calculs visant à systématiser une technique reposant sur une décomposition multiplicative (choix de valeurs de variables de tâches (Vt_i), notamment Vt2.2, faible) pour Cap Maths.

Conclusion

En conclusion, l'activité numérique-algébrique repose sur plusieurs aspects épistémologiques des expressions algébriques communs à ceux des expressions numériques : les dimensions structurelle et calculatoire de l'équivalence, la valeur monstrative des expressions numériques et algébriques, l'analyticité dans la résolution de problèmes, notamment de généralisation, la mise en relation des données connues et des inconnues dans les problèmes numériques des champs

additifs et multiplicatifs. Notre caractérisation des praxéologies mathématiques relevant de l'activité numérique-algébrique met à jour trois organisations mathématiques locales, et celle sur le calcul sur les expressions numériques a fait l'objet d'un développement plus fin dans ce texte. Nous avons centré l'étude sur le calcul réfléchi (T3.2) et caractérisé les variables de types de tâches et les variables de tâches pour le type de tâche relatif au calcul réfléchi multiplicatif (T3.2.3). Cette caractérisation permet de distinguer des structures de calculs en fonction des propriétés des nombres et des opérations mises en jeu. Pour le calcul multiplicatif, deux structures principales ressortent : celles favorisant une décomposition multiplicative et celles favorisant une décomposition additive. Elles reposent sur des techniques et des technologies différentes.

L'analyse de deux manuels scolaires de CM2 met en évidence des potentialités dans les deux manuels pour travailler des aspects épistémologiques de l'activité numérique-algébrique comme la valeur monstrative d'une expression numérique, les propriétés des nombres et des opérations. Mais l'analyse dévoile aussi des faiblesses et disparités importantes qui seraient certainement à examiner par l'analyse d'une plus grande diversité de manuels de cycle 3, notamment la place des décompositions multiplicatives et des écritures numériques. Ces disparités peuvent affaiblir les potentialités repérées et limiter le travail sur les aspects épistémologiques des expressions numériques qui seront communs avec ceux des expressions algébriques rencontrées dans l'enseignement secondaire par les élèves.

La méthodologie d'analyse de manuels consistant à caractériser les tâches en termes de variables de types de tâches et de variables de tâches s'avère opératoire pour décrire finement les calculs réfléchis multiplicatifs travaillés et les aspects épistémologiques présents. Toutefois, elle serait à compléter par une étude plus systématique de la chronologie des calculs et de leur répartition. De plus, la caractérisation par des variables de types de tâches et des variables de tâches reste à faire pour les calculs réfléchis additifs (T3.2.1), soustractifs (T3.2.2) et de division (T3.2.4). Elle pourrait également être une référence pour définir des supports d'enseignement avec les enseignants.

Références

Adihou, A., Squalli, H., Saboya M., Tremblay, M. et Lapointe, A. (2015). Analyse des raisonnements d'élèves à travers des résolutions de problèmes de comparaison. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque EMF2015* (p. 206-219). Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene.

Bosch, M. et Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. Dans A. Mercier et C. Margolinas (dir.), *Balises pour la didactique des mathématiques. Actes de la 12^e école d'été de didactique de mathématiques* (p. 107-122). Éditions la Pensée sauvage.

Bronner, A. et Larguier, M., (2018). Éléments d'analyse du curriculum officiel à propos de la pensée algébrique. Dans M. Abboud (dir.), *Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines. Actes du colloque EMF2018* (p. 236-245). Université de Paris.

Bronner, A. et Squalli, H. (2020). Le développement de la pensée algébrique avant l'introduction du langage algébrique conventionnel (vol. 2). *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 22(1), 1-10. <https://doi.org/10.7202/1070022ar>

Bronner, A., et Squalli, H. (2021). La généralisation dans la pensée algébrique. *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, 3, 3-38. <https://rqdm.recherche.usherbrooke.ca/ojs/ojs-3.1.1-4/index.php/rqdm/article/view/32>

Butlen, D. (2007). *Le calcul mental entre sens et technique : recherches sur l'enseignement des mathématiques aux élèves en difficulté, du calcul mental à la résolution de problèmes numériques*. Presses Université de Franche-Comté.

Butlen, D. et Pézard, M. (1992). Calcul mental et résolution de problèmes multiplicatifs, une expérimentation du C.P. au CM2, *Recherches en didactique de mathématiques*, 12(2.3), 319-368.

Butlen, D. et Pézard, M. (2000). Le rôle du calcul mental dans la connaissance des nombres, des opérations et dans la résolution de problèmes. *Repères-IREM*, 41, 5-24.

Castioni L., Budon Dubarry, H., Flament-Taillez, S. et Aboukrat, Y. (2016a). *Maths explicites*. Hachette.

Castioni L., Budon Dubarry, H., Flament-Taillez, S. et Aboukrat, Y. (2016b). *Maths explicites, Guide de l'enseignant*. Hachette.

Charnay, R., Anselmo, B., Combier, G., Dussuc, M.-P. et Madier, D. (2016a). *Cap Maths*. Hatier.

Charnay, R., Anselmo, B., Combier, G., Dussuc, M.-P. et Madier, D. (2016b). *Cap Maths, Guide de l'enseignant*. Hatier.

Chaachoua, H. (2018). T4TEL, un cadre de référence didactique pour la conception des EIAH. Dans J. Pilet et C. Vendeira (dir.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques 2018* (p. 8-25). IREM de Paris - Université Paris Diderot.

Chevallard, Y. (1984). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, 5, 51-94.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, 19, 43-75.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266.

Chevallard, Y. et Bosch, M. (2012). L'algèbre entre effacement et réaffirmation. Aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. Dans L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier et A. Robert (dir.), *Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire : bilan et perspectives* (p. 19-39). Éditions La Pensée sauvage.

Grugeon-Allys B., Pilet J., Chenevotot-Quentin F. et Delozanne E. (2012). Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. Dans L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier et A. Robert (dir.), *Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire : bilan et perspectives* (p. 137-162). Éditions La Pensée sauvage.

Grugeon-Allys, B., Chenevotot-Quentin, F. et Pilet, J. (2022) Using didactic models to design adaptive pathways to meet students' learning needs in an on-line learning environment. Dans P. R. Richard (dir.), *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence. How Artificial Intelligence can serve mathematical human learning?* (p. 157-188). Springer.

Jolivet, S, Lesnes-Cuisiniez, E. et Grugeon-Allys, B. (2021). Conception d'une plateforme d'apprentissage en ligne en algèbre et en géométrie : prise en compte et apports de modèles didactiques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 26, 117-156.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? Dans J. J. Kaput, D. W. Carraher et M. Blanton (dir.), *Algebra in the early grades* (p. 5-18). Routledge.

Kieran, C. (2007) Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: building meaning for symbols and their manipulation. Dans F. K. Lester (dir.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 707-762). Information Age.

Kieran, C. (2018). *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*. Springer.

- Kieran, C. et Martínez-Hernández, C. (2022). Structure sense at early ages: The case of equivalence of numerical expressions and equalities. Dans T. Rojano (dir.), *Algebra Structure Sense Development amongst Diverse Learners* (p. 35-66). Routledge.
- Lee, L. (1997). *Algebraic understanding: The search for a model in the mathematics education community* [thèse de doctorat inédite]. Université du Québec à Montréal.
- Linchevski, L. et Livneh, D. (1999). Structure sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 40, 173-196.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. Dans N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approaches to algebra* (p. 65-86). Kluwer.
- Mounier, E. et Priolet, M. (2015). *Les manuels scolaires de mathématiques à l'école primaire. De l'analyse descriptive de l'offre éditoriale à son utilisation en classe élémentaire*. Rapport présenté lors de la conférence de consensus. Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire. IFÉ-ENS.
- Pilet, J. (2015). Réguler l'enseignement en algèbre élémentaire par des parcours d'enseignement différencié. *Recherches en didactique des mathématiques*, 35(3), 273-312.
- Pilet, J. et Grugeon-Allys, B., (2020) Quelles potentialités du calcul en ligne dans l'enseignement primaire en France pour favoriser une entrée précoce dans l'algèbre? Dans H. Squalli, I. Oliveira, A. Bronner et M. Larguier (dir.), *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires*. Livres en ligne du CRIRES. <https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches>
- Pilet, J. et Grugeon-Allys, B. (2021). L'activité numérique-algébrique à la transition entre l'arithmétique et l'algèbre. *Éducation et didactique*, 15(2), 9-26. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.8580>
- Piolti-Lamorthe, C. et Roubin, S. (2010). Le calcul réfléchi : entre sens et technique. *Bulletin APMEP*, 488, 272-280.
- Radford, L. (2013). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Group of Australia*, 26, 257-277. <https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2>
- Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. et Gascón, J. (2020). Un modèle épistémologique de référence pour la recherche sur l'algèbre élémentaire. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 22(1), 123-144.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Sirejacob, S. (2017). *Le rôle de l'enseignant dans l'organisation de l'étude personnelle hors la classe de collégiens : le cas des équations du premier degré à une inconnue* [thèse de doctorat, Université Paris-Diderot]. TEL. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01686587>

Squalli, H. et Bronner, A. (2017). Le développement de la pensée algébrique avant l'introduction du langage algébrique conventionnel (vol. 1). *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 20(3), 18. <https://doi.org/10.7202/1055725ar>

Squalli, H., Oliveira, I., Bronner, A. et Larguier, M. (2020). *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires*. Livres en ligne du CRIRES. <https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches>

Vlassis, J., Demonty, I. et Squalli, H. (2017). Développer la pensée algébrique à travers une activité de généralisation basée sur des motifs (patterns) figuratifs. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 20(3), 131-155. <https://doi.org/10.7202/1055731ar>



Le développement de la pensée algébrique dans les programmes de l'Ontario : quel potentiel et quelle trajectoire visée?

Doris JEANNOTTE

Université du Québec à Montréal/Montclair State University

jeannotte.doris@uqam.ca

Hassane Squalli

Université de Sherbrooke

hassane.squalli@usherbrooke.ca

Résumé : Depuis 2005, le programme de mathématiques de l'Ontario vise à développer la pensée algébrique chez les élèves dès le primaire, et même dès le préscolaire. Or, comprendre les implications en termes de potentiel de développement de la pensée algébrique liées aux différents choix faits par les concepteurs de ce programme ne va pas de soi, en particulier parce que la conceptualisation de ce qu'est la pensée algébrique à l'école primaire n'est pas explicitée. Cette étude vise à caractériser le potentiel de développement de la pensée algébrique à partir d'un modèle praxéologique de référence auquel on associe trois praxéologies régionales (Squalli et Jeannotte, soumis), en particulier le potentiel du domaine algèbre du programme ontarien de 2020. L'analyse du programme ontarien a permis de relever que deux de ces trois praxéologies sont explicitées dans le domaine algèbre du programme ontarien, à savoir généraliser et calculer.

Mots-clés : pensée algébrique, curriculum, modèle praxéologique, théorie anthropologique du didactique

The development of algebraic thinking in Ontario programs: what potential and what trajectory aimed for?

Abstract : Since 2005, the Ontario math program has aimed to develop students' algebraic thinking from elementary school and even preschool. However, understanding the implications in terms of the potential of development of algebraic thinking linked to the different choices made by the designers of this program is not straightforward, in particular because the conceptualization of what is elementary algebraic thinking is not explicit. This study aims to characterize the potential of development of algebraic thinking analysed with a praxeological model of reference to which we associate three regional praxeologies (Squalli & Jeannotte, submitted), more specifically the potential of development related to algebra domain. Analysis of the Ontario program revealed that two of these three praxeologies are explicitly targeted by the program: generalizing and calculating.

Keywords: algebraic thinking, curriculum, praxeological model, Anthropological theory of the didactic

Introduction

L'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre dans l'enseignement obligatoire sont reconnus depuis longtemps comme problématiques (Bednarz et Janvier, 1996; Chevallard, 1989; Grugeon, 1997; Jeannotte, 2005; Kieran, 1992; Pilet, 2015; Sfard, 1991; Vergnaud, 1988). Ceci a mené les recherches en didactique des mathématiques à tenter de développer une façon de favoriser l'apprentissage de l'algèbre pour tous les élèves. L'une des avenues proposées est le développement précoce de la pensée algébrique, c'est-à-dire dès le début du primaire, voire dès le préscolaire (Kaput, 1998). Cette avenue a déjà été adoptée par différentes régions du monde tels le Brésil (Ministério da Educação, 2017), les États-Unis (National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers, 2010) ou encore l'Ontario (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2020). Or, comprendre les implications en termes de potentiel de développement de la pensée algébrique des différents choix faits par les concepteurs de différents programmes ne va pas de soi. Ce projet s'inscrit au sein des travaux de l'Observatoire international de la pensée algébrique (OIPA) visant à comparer différents curriculums en lien avec le développement de la pensée algébrique afin de mieux comprendre les enjeux propres au développement de cette dernière, dès le primaire. Plus précisément, il vise à caractériser le potentiel de développement de la pensée algébrique du domaine algèbre du programme ontarien de 2020 à partir d'un modèle praxéologique de référence auquel on associe trois praxéologies régionales (Squalli et Jeannotte, soumis).

1. Problématique

Déjà en 1981, Hart proposait différents changements curriculaires pour l'introduction de l'algèbre. Ce sont, entre autres, ces recommandations qui ont guidé certains choix dans le programme de mathématiques du Québec au début des années 90 (Jeannotte, 2005). Ces recommandations s'inscrivaient dans la lignée de plusieurs programmes déjà en place et construits selon une approche transitionnelle de l'arithmétique à l'algèbre (Carragher et al., 2006). Dans cette approche, l'algèbre est vue comme une arithmétique généralisée et est donc introduite à la suite de l'arithmétique en s'appuyant sur les apprentissages réalisés dans ce domaine. Or, le passage de l'arithmétique à l'algèbre pose encore problème pour les élèves (Kieran, 1992) et d'autres approches sont explorées pour permettre à tous les élèves de réussir en algèbre.

En particulier, dans les 20 dernières années, plusieurs pays ont modifié leurs programmes pour passer d'une approche transitionnelle à une approche visant le développement précoce de la pensée algébrique dès le préscolaire. C'est le cas de l'Ontario qui, depuis 2005, a adopté un curriculum où l'algèbre apparaît comme sujet d'étude dès la maternelle. Cette approche, reconnue sous le nom d'*Early Algebra* vise à enrichir les contenus mathématiques enseignés au primaire et à approfondir davantage certains notions et concepts mathématiques, par exemple les concepts d'opération, d'égalité et d'équation.

En outre, selon Kaput (1998) cette approche apporterait au curriculum une cohérence longitudinale en permettant une meilleure transition primaire-secondaire. Il va jusqu'à dire qu'il faut « algébriser » les mathématiques scolaires afin de répondre aux besoins du 21^e siècle. Selon lui, ce changement non seulement apportera une cohérence aux curriculums, mais développera des habitudes de pensée.

1.1 Pourquoi étudier les curriculums?

Quoique les choix faits par les concepteurs de manuels et par les enseignants s'expliquent en partie par l'interprétation qu'ils se font des programmes de formation (Larguier, 2019), les conditions que peut mettre en place la personne enseignante et les contraintes qui façonnent son agir sont aussi contingentés par les institutions dans lesquelles elle s'inscrit. Mieux comprendre les structures des programmes qui visent le développement de la pensée algébrique dès le primaire permet ainsi de mieux comprendre le potentiel de développement de cette dernière. Mais que signifie développer la pensée algébrique dès le primaire? Comment les programmes qui relèvent de ce choix, en particulier celui de l'Ontario, sont-ils structurés?

2. La pensée algébrique

Notre cadre de référence de l'algèbre et de la pensée algébrique est basé sur les travaux de Squalli (2000; 2015). Cette conceptualisation est en cohérence avec l'idée que la pensée peut être approchée comme une pratique réflexive (Radford, 2011, 2015), c'est-à-dire une synthèse d'une pratique sociale. La pensée, au sens anthropologique, est ainsi définie comme une possibilité d'agir, de réfléchir d'une manière particulière qui a le potentiel de s'actualiser chez le sujet pensant.

En considérant les mathématiques comme une activité humaine, l'algèbre peut être vue comme un ensemble d'activités mathématiques où interviennent des **opérations** (lois de composition, internes ou externes, binaires ou n-aires), pouvant être de nature quelconque (addition, multiplication, rotation, composition, etc.), mais répétées un nombre fini de fois. Ainsi, le concept central de l'algèbre est l'opération. En effet, si l'arithmétique peut être qualifiée comme la science des nombres, l'algèbre devrait être qualifiée comme la science des opérations. Ainsi, dès qu'est donné un ensemble sur lequel une opération est définie, il y a système algébrique. On peut alors faire du calcul dans ce système grâce à la dynamique créée par l'opération. Un élément d'un tel système s'appelle alors nombre. Un nombre en arithmétique devient un nombre en algèbre lorsque l'on ne le regarde plus comme représentant une quantité, une position ou une grandeur, mais comme un élément d'un système algébrique, c'est-à-dire un élément relié à d'autres éléments par un réseau de relations fondées sur les propriétés des opérations. Par exemple, avec une pensée algébrique, nous dirons que l'égalité « $3 + 5 = 5 + 3$ » est vraie non pas parce que chacun de ses membres vaut 8, mais par commutativité de l'addition. Ces activités sont marquées par une manière de penser – la **pensée algébrique** (Squalli, 2000; 2015).

Ainsi, le concept central de l'algèbre est l'opération. La pensée algébrique, elle, se déploie au moyen :

- D'un ensemble de raisonnements particuliers (comme généraliser, raisonner de manière analytique, symboliser et opérer sur des symboles ; exprimer, interpréter, raisonner sur des relations entre variables, en particulier des relations fonctionnelles, raisonner en termes de structures, etc.) ;
- Des manières d'approcher des concepts en jeu dans les activités algébriques (par exemple, voir l'égalité comme une relation d'équivalence, laisser les opérations en suspens, voir une expression numérique comme un objet en soi et non uniquement comme une chaîne de calcul, etc.) ;
- Des modes de représentation et des manières d'opérer sur ces représentations.

La pensée algébrique est donc associée à différentes tendances de l'esprit et le raisonnement algébrique est une opérationnalisation de cette tendance en relation avec les autres composantes, c'est-à-dire les concepts et représentations.

Cette conceptualisation se positionne dans la lignée des travaux anglo-saxons du mouvement *Early Algebra* (par exemple Kaput, 1998) qui permet d'aborder le développement de la pensée algébrique dès le primaire, en concomitance avec d'autres pensées mathématiques.

3. Méthodologie

Dans le cadre des travaux de l'OIPA, Bronner et Larguier (2018) ont développé une méthodologie d'analyse de curriculums officiels. Cette méthodologie s'appuie sur la théorie anthropologique du didactique (TAD) introduite par Chevallard (1999). En particulier, elle se base sur une étude écologique via les niveaux de codétermination didactique. En effet, les mathématiques, et plus spécifiquement la pensée algébrique, ne peuvent être étudiées comme si elles étaient indépendantes de la société dans laquelle elles sont apprises. Comme cette méthodologie permet entre autres de dégager dans les textes institutionnels des éléments pouvant potentiellement favoriser le développement de la pensée algébrique, elle nous est apparue comme un choix pertinent. Elle se décline en trois phases.

Avant, toute chose, il est nécessaire de développer un modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique (MPRPA). C'est ce que Bronner et Larguier (2018) nomment la phase 0. Rappelons que dans le cadre de la TAD, une praxéologie est un quadruplet de quatre éléments articulés : type de tâches (T), technique (τ), technologie (θ), théorie (Θ). Selon ce modèle, toute tâche t est accomplie au moyen d'une technique τ (une manière de réaliser t). Chaque technique est justifiée par une technologie θ (un discours rationnel qui permet d'expliquer et de justifier la technique). Finalement, toute technologie repose elle-même sur les fondements d'une théorie Θ (Chevallard, 1999). Le MPRPA présenté à la section 3.1 correspond au résultat de cette première phase.

La phase 1 fait référence au repérage des instances et des textes officiels afin d'identifier les données à analyser. On doit ici décrire les différents niveaux de codétermination (société, école, pédagogie, discipline, domaine, etc.) qui déterminent les conditions et contraintes de diffusions des praxéologies humaines (Chevallard, 2013). Les systèmes scolaires n'étant pas tous structurés de la même manière, cette phase permet par la suite de comparer des résultats entre pays. Selon Larguier (2019), on se demandera alors (niveau société) par qui est produit le curriculum, s'il a force de loi, s'il est accompagné par d'autres textes. Au point

de vue de l'école, on précisera la formation des enseignants, les années scolaires, l'âge des enfants. Au point de vue de la pédagogie, on précisera le nombre d'heures prescrit, l'approche privilégiée, toute information permettant de mieux comprendre les conditions et contraintes de l'apprentissage mathématique.

La phase 2 correspond à l'analyse du programme proprement dit. Les éléments relatifs aux différentes praxéologies mathématiques et didactiques sont analysés en étudiant les questions suivantes :

- Quelles sont les praxéologies (au sens de la TAD) complètes¹ ou non et quelles sont les situations potentiellement pertinentes pour développer la pensée algébrique en précisant s'il s'agit d'éléments explicites ou non?
- Quelles sont les raisons d'être (épistémologiques et/ou didactiques) des genres de tâches ou des situations repérées précédemment? Autrement dit, qu'est-ce qui les motive?
- Des éléments d'organisation didactique apparaissent-ils et, si oui, lesquels? (Bronner et Larguier, 2018, p. 237)

Étant donné que les programmes ne donnent que peu sinon aucune indication sur les raisons d'être des genres de tâches et sur les éléments d'organisation didactiques, ce texte se centre sur la première question et ne prend pas en compte la complétude des praxéologies.

3.1 Phase 0 : Un modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique

Le MPRPA utilisé pour analyser le potentiel de développement de la pensée algébrique dans les documents institutionnels consultés s'appuie sur la définition de la pensée algébrique présentée à la section 2. La théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999) définit quatre niveaux de praxéologie, ce qui correspond à quatre façons de structurer l'enseignement d'activité humaine : 1) le niveau discipline ; 2) le niveau domaine ou praxéologie globale; 3) le niveau secteur ou praxéologie régionale; et 4) le niveau thème ou praxéologie locale [PL]. Habituellement, l'analyse des programmes proposée se fait en lien avec un domaine spécifique, par exemple l'algèbre, ou un concept particulier, tels les proportions et rapports. Or, l'objectif ici est l'étude du potentiel de développement de la pensée algébrique, ce qui ne correspond pas tout à fait à ce que Chevallard définit comme un domaine mathématique (praxéologie globale). Nous stipulons que la pensée algébrique, en tant qu'une manière de penser dans des activités algébriques, peut être considérée comme une praxéologie globale de la discipline

¹ Une praxéologie complète fait référence au quadruplet $(T, \tau, \theta, \Theta)$.

mathématique puisque cette pensée est régie par certaines règles spécifiques du jeu algébrique, propre d'une théorie (©). Ce sont les tendances de la pensée algébrique qui seront opérationnalisées selon ses différentes composantes. Ainsi, le MPRPA proposé associe trois praxéologies régionales de la pensée algébrique : généraliser, modéliser et calculer, elles-mêmes structurées autour de différentes praxéologies locales et praxéologies ponctuelles ou genres de tâches (voir figure 1). Ces trois praxéologies régionales, en cohérence avec la conceptualisation de la pensée algébrique présentée plus haut, ont été dégagées d'une analyse du développement historique de l'algèbre par Squalli (2000).

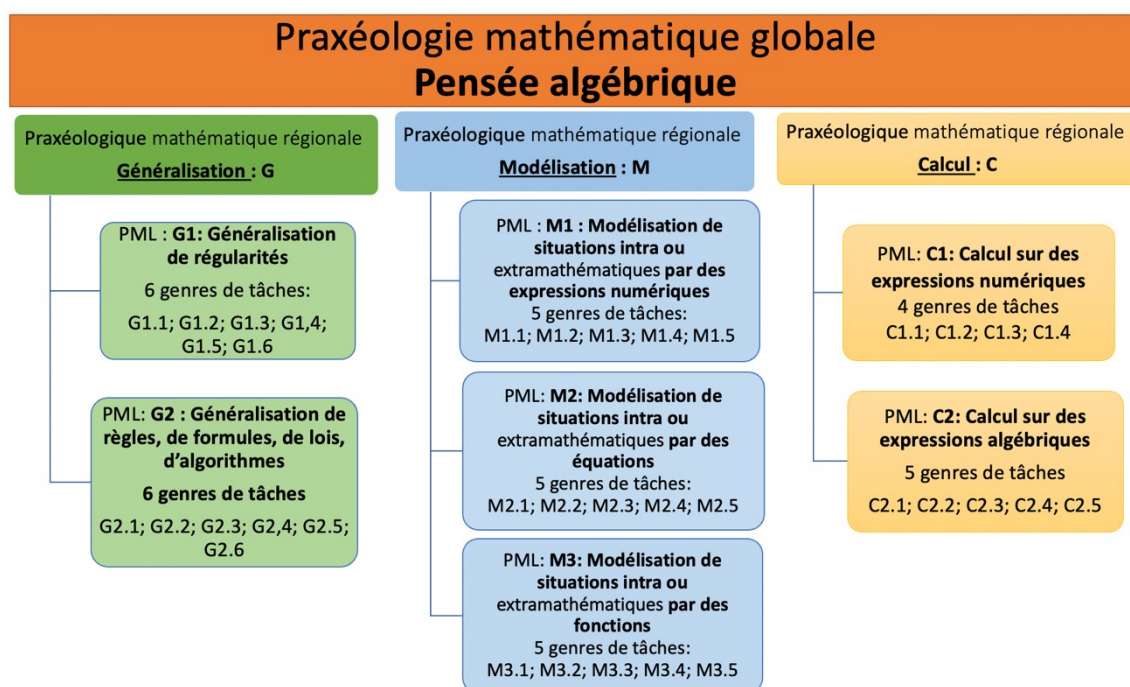


Figure 1. MPRPA (Squalli et Jeannotte, soumis)

3.1.1 Praxéologie régionale : Généraliser

Généraliser est un aspect essentiel de la pensée algébrique. Pour Squalli (2000), comme mentionné plus haut, la pensée algébrique se déploie à partir d'un ensemble de raisonnements particuliers dont généraliser fait partie. Généraliser en tant que processus de raisonnement mathématique permet d'élargir le domaine de validité d'un énoncé (Jeannotte, 2015), l'énoncé pouvant porter sur une régularité. Spécifions que toute généralisation n'est pas algébrique. Radford (2006) souligne, par exemple, que certaines généralisations sont arithmétiques, d'autres algébriques. Pour Radford, ce qui distingue les généralisations arithmétiques des

généralisations algébriques est le fait que les dernières mènent à un objet qui prend la forme d'une règle permettant de générer n'importe quel terme d'une suite. Ouvrant à d'autres activités de généralisation que les suites, Squalli et Jeannotte (soumis) précisent la distinction entre une généralisation arithmétique et une généralisation algébrique. La première est de nature empirique : la régularité est observée à partir des caractéristiques empiriques de quelques cas particuliers et étendue à tous les cas par un raisonnement inductif. Par exemple, l'énoncé général « dans l'ensemble des nombres naturels l'addition est commutative, soit $n + m = m + n$ pour n et m entiers naturels » est constaté par calcul pour des valeurs déterminées de n et m : les valeurs nombrantes de $n + m$ et de $m + n$ sont identiques puis étendue à toutes les valeurs de n et m . La seconde est de nature théorique, les arguments sont de nature intellectuelle.

Par exemple, étant données deux collections d'objets A et B de cardinal n et m , respectivement. Calculer $n + m$ revient à ajouter m objets de la collection B aux n objets de la collection A et à dénombrer le tout. Calculer $m + n$ revient à ajouter les n objets de la collection A aux m objets de la collection B et à dénombrer le tout. On s'aperçoit que les deux opérations de réunion des deux collections forment le même tout. Une réflexion sur ces opérations – sans effectuer de dénombrements – conduirait à comprendre que ces opérations ne dépendent pas des cardinaux des deux collections. Le cas de ces deux collections devient alors *prototypique* de toutes les paires de collections possibles. La généralisation s'appuie alors sur les opérations du sujet et non uniquement sur les observables. (Squalli et Jeannotte, soumis)

On pourrait par exemple imaginer une activité où des élèves travaillent avec des réglettes Cuisenaire qui représentent des nombres quelconques et dégagent cet argument algébrique, c'est-à-dire un argument où l'unité associée à la réglette ne joue pas un rôle.

Dans la praxéologie régionale généraliser, l'élève travaille essentiellement sur un nombre généralisé qu'il représente à l'aide d'un mot, d'un symbole conventionnel ou non, d'un exemple générique. La praxéologie régionale généraliser se décline en deux PL : G1 généraliser des régularités et G2 généraliser des lois, des règles et des algorithmes. Chacune se décline ensuite en genres de tâches selon la nature des objets mathématiques associés.

G1, généraliser des régularités est spécifiquement associé à l'étude des suites numériques et non numériques. Cette PL se décline en six genres de tâches selon qu'il s'agit d'une suite numérique ou non à motif répété, d'une suite numérique à

motif croissant ou d'une suite numérique à motif décroissant. G2², généraliser des lois, des règles et des algorithmes, se déclinent aussi en six genres de tâches (voir figure 2)

Genres de tâches de la PR : Généraliser	
PL G1 : Généraliser des régularités	PL G2 : Généraliser de règles, de formules, de lois, d'algorithmes
<p>G1.1 Repérer une régularité dans une suite</p> <p>G1.2 Prolonger une suite régulière</p> <p>G1.3 Représenter une suite régulière dans un registre donné</p> <p>G1.4 Créer une suite régulière</p> <p>G1.5 Justifier/prouver une régularité</p> <p>G1.6 Comparer des suites régulières dans un sens donné</p>	<p>G2.1 Repérer une règle, une loi, un algorithme</p> <p>G2.2 Étendre le domaine de validité d'une règle, d'une loi, d'un algorithme</p> <p>G2.3 Représenter dans un registre donné une règle, une loi, un algorithme</p> <p>G2.4 Créer une règle, une loi, un algorithme</p> <p>G2.5 Justifier/prouver une règle, une loi, un algorithme</p> <p>G2.6 Comparer des règles, des lois, des algorithmes</p>

Figure 2. PR généraliser

3.1.2 Praxéologie régionale : Modéliser

Modéliser (algébriquement) est une seconde activité centrale à la pensée algébrique. Nous utilisons la notion de modélisation de manière large, incluant les genres de tâches de mathématisation, par exemple la résolution de problèmes mathématiques en contextes. Elle peut avoir lieu dans des situations intra ou extramathématiques. Ainsi, la situation de départ, qu'elle soit mathématique ou non, devra être idéalisée pour ensuite être modélisée à l'aide d'un modèle algébrique, c'est-à-dire que le modèle comprend une expression faisant intervenir un nombre fini d'opérations, des nombres déterminés et non déterminés.

Modéliser se décline en trois PL : M1 modéliser des situations intra ou extramathématiques par des expressions numériques, M2 modéliser des situations intra ou extramathématiques par des équations et M3 modéliser des situations intra ou extramathématiques par des fonctions. Chacune des PL se décline en cinq genres de tâches (voir figure 3)

² Pour des exemples de genre de tâches, voir Squalli et Jeannotte (soumis)

Genres de tâches de la PR: Modéliser	
<p>M1 : Modéliser de situations par des expressions numériques</p> <p>M1.1 Résoudre une situation se modélisant par une expression numérique</p> <p>M1.2 Reconnaître une expression numérique modélisant une situation donnée</p> <p>M1.3. Déterminer et représenter une expression numérique modélisant une situation donnée</p> <p>M1.4 Opérer sur une expression numérique modélisant une situation en vue de dégager des résultats ou des conclusions en lien avec la situation</p> <p>M1.5 Créer une situation se modélisant par une expression numérique donnée</p>	<p>M2 : Modéliser de situations par des équations impliquant des inconnues</p> <p>M2.1 Résoudre une situation se modélisant par une équation faisant intervenir une ou des inconnues</p> <p>M2.2 Reconnaître une équation impliquant des inconnues modélisant une situation donnée</p> <p>M2.3 Déterminer et représenter dans un registre donné une équation impliquant des inconnues modélisant une situation donnée</p> <p>M2.4 Opérer sur une équation impliquant des inconnues modélisant une situation en vue de dégager des résultats ou des conclusions en lien avec la situation</p> <p>M2.5 Créer une situation se modélisant par une équation donnée, impliquant des inconnues</p>
<p>M3 : Modéliser de situations par des relations fonctionnelles</p> <p>M3.1 Résoudre un problème associé à une situation se modélisant par une relation fonctionnelle</p> <p>M3.2 Reconnaître une relation fonctionnelle modélisant une situation donnée</p> <p>M3.3 Déterminer et représenter dans un registre quelconque une relation fonctionnelle modélisant une situation donnée</p> <p>M3.4 Opérer sur le modèle fonctionnel d'une situation en vue de dégager des résultats ou des conclusions en lien avec la situation</p> <p>M3.5 Créer une situation se modélisant par une relation fonctionnelle donnée</p>	

Figure 3. PR modéliser

3.1.3 Praxéologie régionale : Calculer

Enfin, l'algèbre est aussi associée à une activité de calcul sur des expressions et des équations qui se distingue du calcul arithmétique. Le calcul arithmétique avance par exécution des opérations et des calculs sur des valeurs nombrantes pour arriver à un résultat sous forme d'un nombre simple. Le calcul algébrique, pour sa part, avance par des transformations des expressions et des équations en laissant les opérations en suspens et en utilisant les propriétés des opérations et des relations. On distingue deux PL liées à la PR Calculer : C1 Calculer sur des expressions numériques se décline en quatre genres de tâches. C2 Calculer sur des expressions algébriques se décline pour sa part en six genres de tâches (voir figure 4).

Genres de tâches de la PR : Calculer	
<p>PL C1 : Calculer sur des expressions numériques</p> <p>C1.1 Transformer une expression numérique pour arriver à un nombre unique en utilisant un calcul réfléchi.</p> <p>C1.2 Sans calculer sa valeur, transformer une expression numérique pour obtenir une expression numérique équivalente, dans une optique donnée</p> <p>C1.3 Établir l'équivalence d'expressions numériques données, sans calculer leurs valeurs.</p> <p>C1.4 Transformer une égalité en une autre équivalente, sans calculer les valeurs des expressions en jeu, dans une optique donnée</p>	<p>PL C2 : Calculer sur des expressions algébriques</p> <p>C2.1 Résoudre une équation algébrique représentée dans un registre donné.</p> <p>C2.2 Transformer une expression algébrique en une autre équivalente dans un même registre ou dans un registre différent, dans une optique donnée.</p> <p>C2.3 Établir l'équivalence d'expressions algébriques dans un même registre ou dans un registre différent.</p> <p>C2.4 Transformer une équation en une autre équivalente dans un même registre ou dans un registre différent, dans une optique donnée.</p> <p>C2.5 Additionner-soustraire-multiplier-diviser des expressions polynômiales</p> <p>C2.6 Calculer la valeur numérique que prend une expression algébrique en un ou des nombres déterminés.</p>

Figure 4. PR calculer

3.2 Phase 1 : La construction du corpus de données

La phase 1 demande de décrire les différents niveaux de codétermination (société, école, pédagogie, discipline, domaine, etc.) qui déterminent les conditions et contraintes de diffusions des praxéologies humaines. Ceci aidera ultérieure la comparaison de différents programmes.

Au Canada, l'éducation relève des gouvernements provinciaux. L'éducation mathématique en Ontario est donc sous la tutelle du ministère de l'Éducation de l'Ontario. Le système scolaire ontarien se compose de trois paliers, après la maternelle et le jardin d'enfants. L'élève débute la 1^{re} année du primaire à l'âge de 6 ans (âge atteint au plus tard au premier jour de classe). Le palier du primaire couvre les 8 premières années d'études et le palier du secondaire s'étend de la 9^e année à la 12^e année d'études puis vient le palier du postsecondaire.

Au niveau des écoles physiques, il y a deux cas de figure pour le primaire. Le premier est de retrouver des élèves de la 1^{re} à la 8^e année dans une même école. Le second est de retrouver les trois dernières années du primaire (6^e à 8^e) dans une école différente. Ces deux cas de figure entraînent des conditions différentes quant à la possible collaboration entre personnes enseignantes d'un niveau scolaire à l'autre.

Au niveau de la formation, l'enseignant de mathématiques est un généraliste pour les cinq premières années du primaire. Pour les trois dernières années du palier primaire, l'enseignant de mathématiques peut être un spécialiste ou un généraliste. La loi de 2016 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2016) prescrit 300 minutes par cycle de cinq jours à raison d'au moins 40 minutes par jour à l'enseignement dit efficace des mathématiques. « Ces blocs réservés à un enseignement ciblé [des mathématiques] permettront... de développer une communauté et une culture de pratique mathématique et de résolution de problèmes, qui ensemble aident les élèves à développer leur compétence » (p. 31).

Le programme de mathématique (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2020) contient les huit années du primaire dans un même document. Il existe des documents d'accompagnement, mais ces derniers ne sont pas prescrits. Dès 2005, l'Ontario faisait le choix d'introduire un domaine algèbre et modélisation dès la 1^{re} année du primaire (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005). En septembre 2020, un nouveau programme-cadre de mathématique de la 1^{re} à la 8^e année a remplacé celui qui était en place depuis 2005. Il est structuré autour de six domaines d'études interreliés, mais présentés de façon distincte. Le premier est nouveau par rapport à la version de 2005 et transversal aux cinq autres. Il réfère à un ensemble d'habiletés socioémotionnelles et de processus mathématiques qui

Le développement de la pensée algébrique dans les programmes de l'Ontario...

sont enseignés et évalués dans les cinq autres domaines d'études (voir figure 5). Les autres domaines sont Nombres, Algèbre, Données (contient la statistique et les probabilités), Sens de l'espace (contient la géométrie et la mesure) et Littérature financière. Chacun des domaines est décliné en un certain nombre d'attentes, lesquelles sont liées à différents contenus mathématiques.

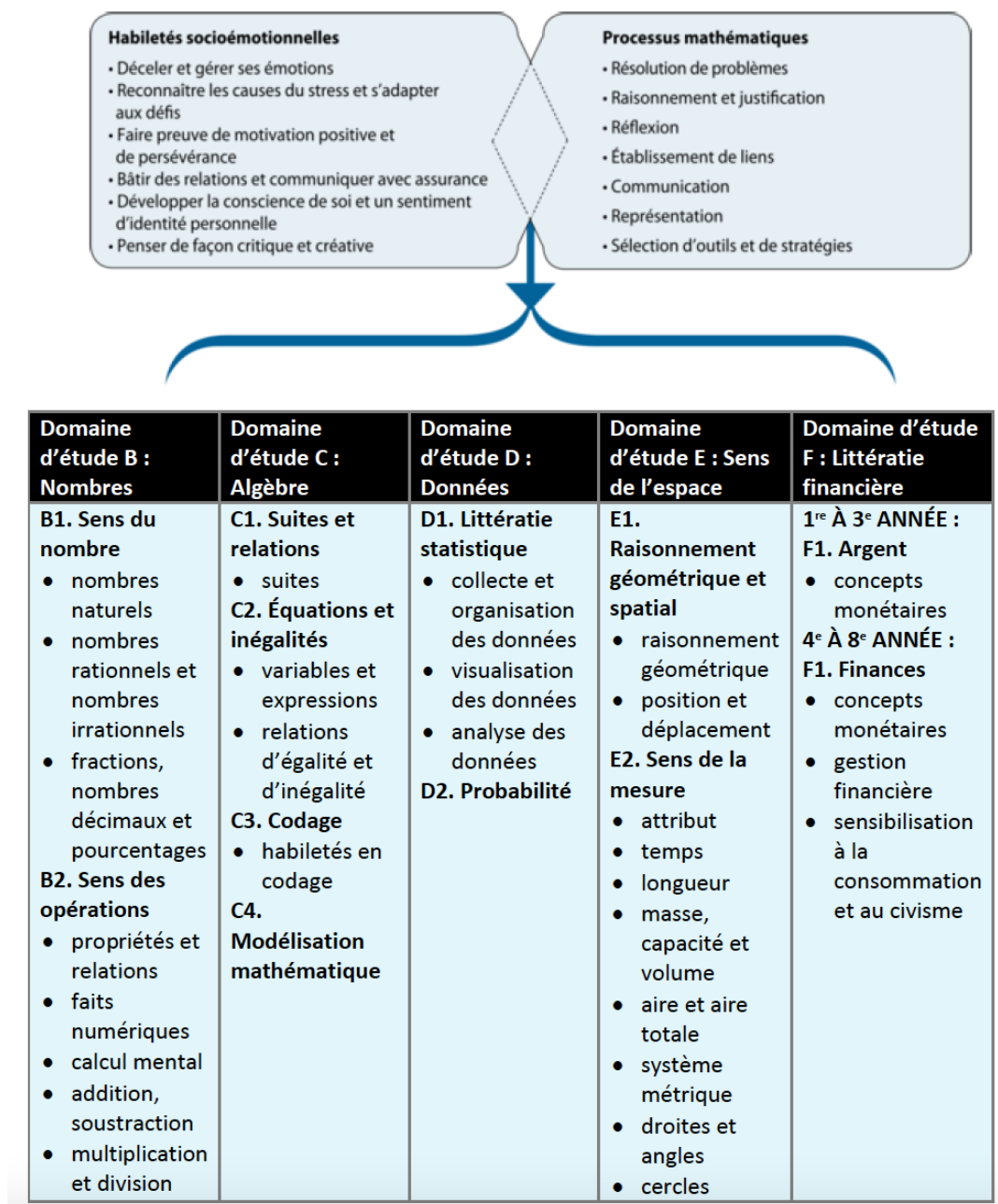


Figure 5. Les six domaines d'étude du programme ontarien (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2020, p. 93)

Si l'on regarde plus spécifiquement le domaine de l'algèbre, on remarque premièrement que le nom du domaine est passé de Modélisation et Algèbre en 2005 à seulement Algèbre en 2020, la modélisation étant maintenant une attente du domaine algèbre. Quoique le mot modélisation ait disparu du titre, le programme-cadre donne une grande importance à la modélisation mathématique dans le domaine algèbre. Ainsi, ce dernier est composé de quatre attentes nommées : suites et relations, équations et inégalités, codage et modélisation mathématique. Contrairement aux trois autres, la modélisation n'a pas de contenu spécifique qui lui est associé. Ce choix est justifié par les concepteurs par le fait que :

[L]a modélisation mathématique est un processus itératif et interconnecté qui, lorsque mis en application dans divers contextes, permet aux élèves de transférer des apprentissages effectués dans d'autres domaines d'études. L'évaluation porte sur la manifestation par l'élève de son apprentissage du processus de modélisation mathématique dans le contexte des concepts et des connaissances acquis dans les autres domaines. (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2020 p. 148)

3.3 Phase 2 : L'analyse du corpus

Le choix d'intégrer dans le curriculum ontarien le développement de la pensée algébrique dès le primaire s'est concrétisé par l'apparition d'un nouveau domaine d'étude dans le programme de mathématiques du primaire appelé Algèbre. Bien que nous ne nions pas que la pensée algébrique puisse aussi se développer dans des activités en lien avec d'autres domaines d'étude, en particulier dans les domaines Nombres et Sens de l'espace, nous avons choisi de concentrer notre analyse sur le domaine d'étude Algèbre en tant qu'habitat institutionnel de la praxéologie globale pensée algébrique. Il s'agit évidemment d'un domaine nouveau dans les curriculums qui se situent dans la perspective *Early Algebra*. Mieux comprendre le genre de tâches qu'on y retrouve permettra par le fait même de mieux comprendre ce qui est entendu par pensée algébrique par les concepteurs du programme. L'analyse du corpus a été faite par le repérage des praxéologies régionales, locales et des genres de tâches. Plusieurs des attentes du domaine algèbre ont été liées à l'une des praxéologies régionales puis locales. Enfin, les énoncés de contenu associés à chacune des attentes ont servi au repérage de genres de tâches.

3.3.1 Un retour sur les éléments liés à la pensée algébrique

Un élément particulier à souligner est que, quoiqu'on reconnaisse des éléments liés à la pensée algébrique telle que nous l'avons conceptualisée, le terme « pensée algébrique » ne figure qu'une seule fois dans tout le document du programme de formation ontarien. Le terme « raisonnement algébrique » est pour sa part vu

comme un type de raisonnement mathématique et est donc plus spécifique que celui de pensée algébrique. « Pensée algébrique » apparaît dans une remarque qui suit le contenu d'apprentissage C1.2 : « La comparaison et l'utilisation de différentes représentations pour communiquer sa compréhension sont des composantes essentielles au développement de la pensée algébrique » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2020, p. 178). En revanche, le texte du programme réfère à d'autres types de pensée mathématiques : mathématique, récursive, fonctionnelle, additive, multiplicative :

Elles et ils [les élèves] développent la pensée récursive et fonctionnelle, ainsi que la pensée additive et multiplicative, en travaillant avec des suites linéaires, et utilisent ces types de pensée pour déterminer les règles et trouver la valeur des inconnues. (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2020, p. 100)

Les termes « pensée fonctionnelle » et « pensée récursive » sont même définis dans le glossaire fourni à la fin du programme :

Pensée fonctionnelle : Type de raisonnement qui met l'accent sur les relations entre deux variables. Voir aussi Pensée récursive.

Pensée récursive : Type de raisonnement qui met l'accent sur la relation entre un terme et le suivant. Voir aussi Pensée fonctionnelle. (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2020, p. 561)

Il semble paradoxal que la pensée algébrique soit le concept structurant du domaine algébrique, mais que ce choix n'ait pas mené à expliciter ce qui est entendu par pensée algébrique. En fait, on peut penser que la conceptualisation de la pensée algébrique n'est pas encore aboutie. Ainsi, il est difficile de comprendre pleinement les raisons d'être des différents genres de tâches.

4. Résultats

L'analyse du programme ontarien permet de dégager des genres de tâches qui appartiennent principalement à deux des trois praxéologies régionales à savoir généraliser et calculer. En effet, les concepteurs du programme ont choisi de ne pas spécifier de contenu spécifique pour l'attente modélisation en argumentant que la modélisation était une activité transversale à toute activité algébrique.

4.1 La place de la praxéologie modéliser

L'attente liée à la modélisation mathématique propre au domaine Algèbre fait référence à la mise en application du « processus de modélisation mathématique pour représenter et analyser des situations de la vie quotidienne, ainsi que pour faire des prédictions et fournir des renseignements à leur sujet » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2020, p. 148). Par rapport à notre MPRPA, le programme

considère uniquement les situations extramathématiques (« cadre non mathématique »). Le programme précise que le processus doit comporter quatre étapes « interreliées et itératives : la compréhension du problème, l'analyse de la situation, la création d'un modèle mathématique ainsi que l'analyse et l'évaluation du modèle » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2020, p. 148). En fait, notre analyse n'a dégagé que deux genres de tâches explicitement liés à modéliser. Il s'agit du premier contenu d'apprentissage lié à l'attente « 2. Démontrer sa compréhension des variables, des expressions, des égalités et des inégalités et mettre en application cette compréhension dans divers contextes » de la 1^{re} à la 5^e année du primaire. Voici la description de ce contenu (Voir Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2020) :

- 1^{re} année : déterminer les quantités qui peuvent changer et celles qui restent toujours les mêmes dans des situations de la vie quotidienne;
- 2^e année : décrire des façons et des situations où des symboles sont utilisés comme variables;
- 3^e année : décrire de quelles façons les variables sont utilisées, et les utiliser de manière appropriée dans une variété de contextes;
- 4^e année : déterminer et utiliser des symboles comme variables dans des expressions et des équations;
- 5^e année : décrire des relations d'équivalence à l'aide de mots, d'expressions algébriques et de représentations visuelles, et établir les liens entre les représentations.

Ce contenu, pour la 1^{re} à la 3^e année, peut être associé au genre de tâches M3.2 – Reconnaître une relation fonctionnelle modélisant une situation et, pour la 4^e et 5^e année au genre de tâches M3.3 – Déterminer et représenter dans un registre donné une relation fonctionnelle modélisant une situation. Le mot variable est ici ce qui nous pousse à associer ce contenu à la PL Modéliser à l'aide de relations fonctionnelles. Toutefois, l'expression dans « divers contextes » nous apparaît référer implicitement à la praxéologie régionale modéliser dans son ensemble. Ces divers contextes pourraient amener l'élève à modéliser une situation à partir d'une expression numérique, d'une équation algébrique ou d'une fonction.

4.2 La place de la praxéologie généraliser

Les genres de tâches liés explicitement à généraliser portent spécifiquement sur la praxéologie locale G1 – généraliser des régularités – et se trouvent liés à l'attente « 1.Reconnaître, décrire, prolonger et créer une variété de suites, y compris des suites trouvées dans la vie quotidienne, et faire des prédictions à leur sujet » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2020, p. 142). Cinq des six genres de tâches

(de G1.1 à G1.5) sont abordés dès la 1^{re} année du primaire. Le sixième genre de tâches – comparer des suites régulières – est pour sa part abordé dès la 2^e année.

Les concepteurs ont donc privilégié ici l'entrée dans la généralisation algébrique via le concept de suite plutôt que la seconde PL généraliser des règles, des formules, des lois, des algorithmes. L'attente « 3. Résoudre des problèmes et créer des représentations de situations mathématiques de façons computationnelles à l'aide de concepts et d'habiletés en codage » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2020, p. 146) apparaît comme un habitat intéressant pour travailler les genres de tâches qui appartiennent à la PL G2. En effet, les travaux de Briant (2013, voir aussi Briant et Bronner, 2015) montrent bien les liens entre pensée algébrique et pensée algorithmique : « l'algorithmique et la programmation forment un micromonde pour le domaine algébrique, où il est possible d'explorer et d'expérimenter sur des objets de l'algèbre comme s'ils étaient des objets matériels. Ceci renforce une entrée dans la pensée algébrique » (Briant et Bronner, 2015, p. 244). Malheureusement, la formulation des attentes dans le programme ne permet pas de conclure.

4.3 La place de la praxéologie calculer

En lien avec la praxéologie régionale – Calculer, on retrouve des genres de tâches autant sur le calcul sur des expressions numériques qu'algébriques. Cette praxéologie régionale est liée à l'attente « 2. Démontrer sa compréhension des variables, des expressions et des inégalités et mettre en application cette compréhension dans divers contextes » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2020, p. 145).

Les cinq premières années du primaire proposent des genres de tâches liés à la praxéologie locale C1 – Calculer sur des expressions numériques. Sur les quatre genres de tâches associés à cette praxéologie, deux se retrouvent dans le domaine algèbre. Le premier C1.1 – Transformer une expression numérique pour arriver à un nombre unique en utilisant un calcul réfléchi – n'a pas été retenu par les concepteurs du programme comme faisant partie du domaine algèbre. De même, le genre de tâches C1.4 – Transformer une égalité en une autre équivalente – n'est pas présent. Notons que cela ne signifie pas qu'ils ne se retrouvent pas ailleurs, dans un autre domaine du programme.

Un changement s'opère à partir de la 4^e année du primaire avec la disparition de cette praxéologie locale (C1 – Calculer sur des expressions numériques) et l'apparition des genres de tâches liés à la praxéologie locale (C2 – Calculer sur des expressions algébriques). Trois des six genres de tâches associés à cette PL ont été repérés : C2.1 – Résoudre une équation algébrique représentée dans un registre

donné, C2.5 – Opérer sur des expressions polynomiales et C2.6 – Calculer la valeur numérique que prend une expression algébrique en un ou des nombres déterminés.

4.4 Une trajectoire de développement de la PA

La visite de différents genres de tâches par les élèves tout au long de leur scolarité leur permettra de développer leur pensée algébrique, c'est-à-dire de développer des tendances propres à la pensée algébrique. En effet, les genres de tâches et l'ordre de rencontre de ces dernières offrent une certaine trajectoire de développement de cette pensée, en orientant ces tendances. C'est une façon d'organiser le potentiel culturel de cette pratique réflexive. On peut penser qu'il ne s'agit pas de la seule façon. D'une certaine manière, cette organisation des tâches à travers les différentes années scolaires est un élément de l'organisation didactique du programme. Les concepteurs ont choisi que certains genres de tâches seront rencontrés et qu'ils le seront dans un certain ordre.

D'une part, le domaine d'étude Algèbre est explicitement structuré autour de deux des trois praxéologies régionales selon une certaine trajectoire de développement de la pensée algébrique : « Dans ce domaine d'étude, les élèves développent leur raisonnement algébrique en travaillant avec des suites, des variables, des expressions, des équations, des inégalités, du codage, et en faisant usage de la modélisation mathématique » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2020, p. 100). Dans la citation précédente, c'est bien le développement de la pensée algébrique qui est l'enjeu à travers ses trois dimensions décrites à la section 2.1 de ce texte, à savoir raisonnement, conceptualisation et symbolisation. En effet, ce travail « avec » les suites, variables, expression, équations se fait à l'aide de raisonnements particuliers comme généraliser, symboliser, raisonner sur des relations et en termes de structures. Ce travail « avec » demande des manières algébriques de penser et des modes de représentation particuliers.

D'autre part, la trajectoire de développement est explicitée sous forme de progressions des genres de tâches tout au long des 8 années d'études.

La figure 6 présente un exemple de cette progression pour le contenu d'apprentissage 1.1 – Suites. Le contenu 1.1 est principalement associé au genre de tâches G1.1 – repérer une régularité dans une suite. Dès la première année du primaire, l'élève doit apprendre à repérer une régularité (reconnaitre et décrire) dans toutes sortes de suites sans spécifier le type de suite (numérique ou non) ni le type de description visée.

1 ^{re} année	2 ^e année	3 ^e année	4 ^e année
Suites			
C1.1 reconnaître et décrire les règles dans une variété de suites, y compris des suites trouvées dans la vie quotidienne.	C1.1 reconnaître et décrire une variété de suites non numériques, y compris des suites trouvées dans la vie quotidienne.	C1.1 reconnaître et décrire les éléments et les opérations qui se répètent dans diverses suites (numériques et non numériques), y compris des suites trouvées dans la vie quotidienne.	C1.1 reconnaître et décrire des suites à motif répété et des suites croissantes, y compris des suites trouvées dans la vie quotidienne.
5 ^e année	6 ^e année	7 ^e année	8 ^e année
C1.1 reconnaître et décrire des suites à motif répété ainsi que des suites croissantes et des suites décroissantes, y compris des suites trouvées dans la vie quotidienne.	C1.1 reconnaître et décrire des suites à motif répété ainsi que des suites croissantes et des suites décroissantes, y compris celles trouvées dans la vie quotidienne, et déterminer lesquelles sont des suites croissantes linéaires.	C1.1 reconnaître et comparer une variété de suites à motif répété, de suites croissantes et de suites décroissantes, y compris des suites trouvées dans la vie quotidienne, et comparer les suites croissantes linéaires selon leurs taux constants et leurs valeurs initiales.	C1.1 reconnaître et comparer une variété de suites à motif répété, de suites croissantes et de suites décroissantes, y compris des suites trouvées dans la vie quotidienne, et comparer des suites croissantes linéaires et des suites décroissantes selon leurs taux constants et leurs valeurs initiales.

Figure 6. Progression du contenu d'apprentissage 1.1 – Suites de la 1^{re} à la 8^e année (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2020, p. 1)

Ensuite, on spécifie que les suites à l'étude sont non numériques. En troisième lieu, la description visée est en termes de similitude : décrire les éléments et les opérations qui se répètent. On ajoute aussi l'étude des suites numériques. En quatrième lieu, l'étude des suites à motif répété et à motif croissant est spécifiée. Puis, on ajoute les suites décroissantes en 5^e année et les suites croissantes linéaires en 6^e année. En 7^e année, le contenu d'apprentissage est légèrement modifié pour inclure un second genre de tâche, à savoir G1.6 – comparer des suites régulières dans un sens donné. Cette comparaison se fera en termes de taux de variations et d'ordonnée à l'origine pour des suites croissantes linéaires en 7^e année et pour des suites croissantes linéaires et décroissantes en 8^e année.

Pour ce contenu d'apprentissage, la trajectoire de développement se fait ainsi selon deux axes : 1) selon l'objet mathématique traité (le type de suite à l'étude) et 2) selon les caractéristiques mathématiques à prendre en compte dans les raisonnements mis en place (repérage d'éléments ou d'opérations qui se répètent, taux de variations et ordonnées à l'origine).

4.4.1. La contribution de la praxéologie régionale généraliser

La praxéologie régionale généraliser contribue à la trajectoire de développement de la pensée algébrique uniquement via PL généraliser des régularités. On voit une progression dans le type de suite étudié, le type de nombres impliqués (naturels dès la 1^{re} année, décimaux en 4^e, entiers en 7^e et rationnels en 8^e) et les éléments à prendre en compte dans les raisonnements mis en place. On spécifie l'introduction de certaines représentations dès la 3^e année pour la création de suite à l'aide de tableaux de valeur en 3^e, de représentations graphiques en 4^e, d'expressions symboliques en 6^e. Lorsqu'introduites, ces différentes représentations serviront pour effectuer différents genres de tâches : G1.2 - prolonger des suites, G1.5 - justifier des prédictions et trouver des termes manquants, tout au long du primaire. Notons aussi que le vocabulaire change en 6^e année. En effet, on ne parle plus seulement de termes manquants, mais de valeurs inconnues lorsqu'on introduit les suites croissantes linéaires. On semble alors s'approcher davantage de la praxéologie régionale M3 - modéliser par des fonctions.

4.4.2. La contribution de la praxéologie régionale calculer

La praxéologie régionale C - calculer - contribue au développement de la pensée algébrique via ses deux PL associées, avec transition marquée de C1 vers C2 à partir de la 4^e année du primaire. En effet, on ne retrouve aucun genre de tâches lié à C1 en 4^e ni à partir de la 6^e. Les genres de tâches associés à C2 débutent en 4^e année avec la résolution d'équations comprenant des nombres naturels jusqu'à 50 que nous associons à C2.1 - résoudre une équation représentée dans un registre donné. On passe d'un travail sur l'équivalence d'expressions numériques jusqu'en 3^e (C1.2 et C1.3) à un travail sur l'équivalence et l'évaluation d'expressions algébriques à partir de la 5^e année (C2.2, C2.3 et C2.6). Ainsi, les raisonnements sur l'équivalence se font sur de nouveaux objets mathématiques, ce qui mène aussi à l'introduction d'un genre de tâches qu'on ne retrouvait pas dans la praxéologie C1, l'évaluation d'une expression algébrique.

5. Discussion

Une analyse du programme selon le MPRPA développé par Squalli et Jeannotte (soumis) met en évidence au moins deux des trois praxéologies de façon explicite.

Toutefois, on peut penser que certaines PL ou genres de tâches pourraient être abordées soit implicitement ou dans d'autres domaines que celui de l'algèbre. C'est le cas de la PL G2 – généralisation de règles, formules, lois et algorithmes – qui pourrait potentiellement se retrouver dans l'attente 3, codage tel que discuté plus haut. De même, quoi que le genre de tâches C1.1 – transformer une expression numérique pour arriver à un nombre unique en utilisant un calcul réfléchi – n'a pas été retenu par les concepteurs du programme comme faisant partie du domaine algèbre, un regard du côté du domaine nombre permet de constater qu'on y retrouve des contenus en lien avec le calcul réfléchi. Évidemment, le fait que l'on cherche une réponse unique fait pencher la balance vers le calcul arithmétique plutôt qu'algébrique, ce qui permet de justifier le choix des concepteurs de mettre le calcul réfléchi dans le domaine nombre. Toutefois, le calcul réfléchi s'appuie sur les propriétés des opérations et la décomposition en expressions équivalentes. En fait, pour Pilet et Grugeon (2021) le calcul réfléchi est un levier pour travailler la transition de l'arithmétique à l'algèbre par la modification des usages qui sont faits sur certains objets communs aux deux domaines et, de ce fait, sera inclus dans leur modèle épistémologique de référence de l'algèbre élémentaire. Comme le calcul réfléchi ne se retrouve pas dans le domaine algèbre dans le programme ontarien, il est difficile de dire si ces objets communs (propriétés, équivalence, expression) sont abordés à l'aide de raisonnements arithmétiques ou algébriques.

Par ailleurs, le fait de retrouver ces genres de tâches liés à notre MPRPA dans d'autres domaines que l'algèbre pointe vers une limite de notre étude. En effet, le potentiel de développement de la pensée algébrique pourrait être plus grand que ce qui se trouve dans le domaine algèbre. Toutefois, Blanton et al. (2018) soulignent qu'« au mieux, nous avons constaté que les programmes d'arithmétique traditionnels n'offraient qu'un traitement aléatoire des concepts algébriques "populaires"... souvent enfouis dans le contenu arithmétique d'une manière qui permettait potentiellement d'ignorer ou de marginaliser leur traitement dans l'enseignement » (p. 28, traduction libre³). Le choix de mettre le calcul réfléchi dans le domaine nombre n'est donc pas anodin et joue sur le potentiel du programme pour le développement de la pensée algébrique.

³ At best, we found that mainstream arithmetic curricula offered only a random treatment of “popular” algebraic concepts... often buried in arithmetic content in ways that allowed one to potentially ignore or marginalize their treatment in instruction (Blanton et al., 2018, p. 28).

5.1. Trajectoire de développement de la pensée algébrique

En termes de trajectoire de développement, on constate que celle-ci a été réfléchi selon les trois axes de la pensée algébrique présentés dans la section 2, à savoir la conceptualisation, les raisonnements et les registres de représentations utilisés. En ce sens, elle est alignée avec les travaux fondateurs du mouvement *Early Algebra* tel que les travaux de Kaput (1998). Le concept de régularité en est un bon exemple. Le programme a été pensé de façon à ce que la conceptualisation des régularités s'enrichisse tout au long du primaire jusqu'à en arriver au concept de fonction avec l'introduction de l'étude des suites croissantes et décroissantes linéaires. Par le fait même, les raisonnements se complexifient tout comme les registres de représentations et les manières d'utiliser ces représentations, en phase avec les travaux de Radford (2011). Il en est de même pour le concept d'équivalence qui est introduit très tôt, mais qui sera complexifié selon le type de nombres utilisés, mais aussi le passage d'un travail sur l'équivalence d'expressions numériques à un travail sur l'équivalence d'expressions algébriques.

Soulignons que les concepteurs ont fait le choix d'introduire le concept de variables dès la première année du programme sans passer par l'introduction de la lettre, mais plutôt par une compréhension conceptuelle de la variable en tant que quantité qui varie, introduisant les lettres plus tard dans le cursus scolaire. Or, certaines études laissent croire qu'il serait possible d'introduire les lettres dès le début du primaire afin de favoriser les liens entre les différentes représentations de la variable. Les travaux de Ventura et al. (2021), basés sur les travaux de Blanton et al. (2017) rapportent que des élèves de maternelle et de première année sont en mesure d'interpréter la lettre en tant que quantité indéterminée lorsque placée face à une séquence de tâches particulières liée à la modélisation de relation fonctionnelle.

Par ailleurs, le fait que certains genres de tâches soient explicites pourrait faire en sorte que l'élève rencontre certains genres de tâches plutôt que d'autres, ce qui jouera sur le potentiel de développement de la pensée algébrique. Par exemple, le fait de ne pas rencontrer de tâches de calcul réfléchi dans le domaine Algèbre du programme pourrait favoriser le développement de raisonnement plutôt axé sur l'obtention d'une réponse et sur l'utilisation de registre qui ne mettent pas de l'avant la structure des calculs exploitée. Une analyse des autres domaines pourrait aider à mieux décrire la trajectoire.

6. Conclusion

L'approche du programme ontarien basée sur le développement précoce de la pensée algébrique semble dans une certaine mesure une porte d'entrée

intéressante pour réduire les discontinuités et ruptures entre les modes de pensées arithmétique et algébrique documentés par les recherches sur la transition arithmétique-algèbre. En effet, les élèves sont, dès leur entrée à l'école primaire, mis en face de tâches favorisant certains aspects de la pensée algébrique. Une analyse des manuels permettrait de pousser plus loin la description du potentiel de développement de la pensée algébrique du domaine Algèbre du programme ontarien en clarifiant les tâches précises potentiellement rencontrées par les élèves ainsi que certains éléments de l'organisation didactique.

L'analyse du programme laisse aussi penser qu'il y aura une meilleure articulation entre les différents types de pensée. Toutefois, ceci mérite une étude plus approfondie. En effet, notre analyse ne permet pas de comprendre comment est articulée la trajectoire du développement de la pensée algébrique dans le programme ontarien avec celle du développement d'autres formes de la pensée mathématique, en particulier la pensée algorithmique, nommée codage, qui relève, dans le programme, du même domaine (Algèbre). Enfin, notre recherche montre que potentiellement, la stratégie du programme ontarien du développement précoce de la pensée algébrique devrait apporter un enrichissement des mathématiques enseignées par rapport au programme basé sur une approche transitionnelle arithmétique-algèbre. Mais que perd-on en passant d'une approche transitionnelle à une approche de développement précoce de la pensée algébrique? Il faudra attendre l'implantation du programme depuis quelques années pour être en mesure de constater ses effets sur les apprentissages des élèves.

Références

Bednarz, N. et Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. Dans N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (p. 115-136). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_8

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. et Newman-Owens, A. (2017). A progression in first-grade children's thinking about variable and variable notation in functional relationships. *Educational Studies in Mathematics*, 95(2), 181-202. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9745-0>

Blanton, M., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., Stroud, R., Fonger, N. et Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. Dans C. Kieran (dir.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds* (p. 27-49). Springer.

Briant N. (2013). *Étude didactique de la reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique au niveau de la classe de seconde du lycée français* [thèse de doctorat, université Montpellier 2]. TEL. <https://theses.hal.science/tel-01002513>.

Briant, N. et Bronner, A (2015). Étude d'une transposition didactique de l'algorithmique au Lycée : Une pensée algorithmique comme un versant de la pensée mathématiques. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque EMF2015* (p. 231-246). Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene.

Bronner, A. et Larguier, M., (2018). Éléments d'analyse du curriculum officiel à propos de la pensée algébrique. Dans M. Abboud (dir.), *Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines. Actes du colloque EMF2018* (p. 236-245). Université de Paris.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M. et Earnest, D (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics education*, 37(2), 87-115. <https://doi.org/10.2307/30034843>

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, 19, 43-75.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2013). L'évolution du paradigme scolaire et le devenir des mathématiques : questions vives et problèmes cruciaux. Dans A. Bronner, C. Bulf, C. Castela et J.-P. Georget (dir.), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage. Actes de la XVI^e école d'été de didactique des mathématiques* (p. 85-120). La Pensée sauvage.

Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, 17(2), 167-210.

Hart, K. M. (1981). *Children's understanding of mathematics*. John Murray.

Jeannotte, D. (2005). *L'interprétation de la lettre et des erreurs commises en algèbre par les élèves du secondaire d'aujourd'hui et ceux de la fin des années 70 : une étude comparative* [mémoire de maîtrise, Université de Sherbrooke]. Savoirs UdeS. <https://savoirs.usherbrooke.ca/handle/11143/570>

Jeannotte, D. (2015). *Raisonnement mathématique : proposition d'un modèle conceptuel pour l'apprentissage et l'enseignement au primaire et au secondaire* [thèse de doctorat, Université du Québec à Montréal]. Archipel. <https://archipel.uqam.ca/8129/>

Kaput, J. J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by “algebrafying” the K-12 curriculum. Dans National Research Council (dir.), *The Nature and Role of Algebra in the K-14 Curriculum: Proceedings of a National Symposium*. The National Academies Press. <https://doi.org/10.17226/6286>.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. Dans D. A. Grouws (dir.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (p. 390-419). Macmillan.

Larguier, M. (2019). Le développement de la pensée algébrique dans le curriculum officiel en France et au Québec. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 21(4), 311-321. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i4p311-321>.

Ministère de l'Éducation de l'Ontario. (2005). *Le curriculum de l'Ontario de la 1^{re} à la 8^e année*. Mathématiques. Gouvernement de l'Ontario.

Ministère de l'Éducation de l'Ontario. (2016). *Les écoles de l'Ontario, de la maternelle et du jardin d'enfants à la 12^e année*. Politiques et programmes. Gouvernement de l'Ontario.

Ministère de l'Éducation de l'Ontario. (2020). *Le curriculum de l'Ontario de la 1^{re} à la 8^e année*. Mathématiques. Gouvernement de l'Ontario.

Ministério da Educação. (2017). *Base nacional comum curricular: BNCC*. Governo do Brasil.

National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers. (2010). *Common Core State Standards (Mathematics)*. <http://www.corestandards.org>

Pilet, J. (2015). Réguler l'enseignement en algèbre élémentaire par des parcours d'enseignement différencié. *Recherches en didactique des mathématiques*, 35(3), 273-312.

Pilet, J. et Grugeon-Allys, B. (2021). L'activité numérique-algébrique à la transition entre l'arithmétique et l'algèbre. *Éducation didactique*, 15(2), 9-26. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.8580>

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. Dans S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz et A. Méndez (dir.) *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 2-21). Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2011). Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage : la théorie de l'objectivation. *Éléments*, 1, 1-27.

Radford, L. (2015). Pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation, Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque EMF2015* (p. 334-345). Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions : Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 1-36. <https://doi.org/10.1007/BF00302715>

Squalli, H. (2000). *Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base* [thèse de doctorat, Université Laval]. Corpus. <https://corpus.ulaval.ca/jspui/handle/20.500.11794/51025>

Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque EMF2015* (p. 346-356). Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene.

Squalli, H. et Jeannotte, D. (soumis). Un modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique élémentaire. *Revue québécoise de didactique des mathématiques*.

Ventura, A. C., Brizuela, B., Blanton, M., Sawrey, K., Gardiner, A. M. et Newman-Owens, A. (2021). Trajectory in Kindergarten and first grade students' thinking of variable and use of variable notation to represent indeterminate quantities. *Journal of Mathematical Behavior*. 62, 1-17. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100866>

Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. Dans C. Laborde (dir.), *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique* (p. 189-200). Éditions La Pensée sauvage.



Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie : analyse du savoir à enseigner relatif au développement de la pensée algébrique dans les manuels de 6^e année primaire

Sonia BEN NEJMA

Université de Carthage – Tunisie

sonia.bennejma@fsb.u-carthage.tn

Saïd ABOUHANIFA

CRMEF Casablanca-Settat – Maroc

saidabouhanifa@yahoo.fr

Eugène OKÉ

Université d'Abomey-Calavi – Bénin

eugene.oke@imsp-uac.org

Ridha NAJAR

Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue

ridha.najar@uqat.ca

Hassane SQUALLI

Université de Sherbrooke

hassane.squalli@usherbrooke.ca

Adolphe ADIHOU

Université de Sherbrooke

adolphe.adihou@usherbrooke.ca

Résumé : Cet article présente des résultats relatifs au développement de la pensée algébrique à la fin du cycle primaire au Bénin, au Maroc et en Tunisie à partir d'une analyse des programmes et des manuels officiels propres à chaque système éducatif. Cette recherche en cours s'inscrit dans le cadre du programme international APPRENDRE et du projet intitulé : « Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie. État des lieux,

Revue [québécoise](#) de didactique des mathématiques, 2022, *Numéro thématique 2* (Tome 1), p. 59-95.

comparaison et perspectives de l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre ». L'analyse menée se base sur le Modèle épistémologique de référence de la pensée algébrique (MRPA) (Squalli et al., 2019) et s'appuie sur les travaux développés dans le cadre de l'Observatoire international de la pensée algébrique (OIPA). Cette étude vise à analyser les praxéologies mathématiques développées dans les manuels et à identifier le potentiel des tâches proposées aux élèves pour développer la pensée algébrique avant même l'introduction du symbolisme algébrique. Ces analyses nous ont permis de lever un coin de voile sur la manière dont les programmes de chacun de ces pays préparent les élèves à passer du cycle de l'enseignement primaire vers le cycle de l'enseignement secondaire à propos de l'algèbre.

Mots clés : savoir à enseigner, arithmétique/algèbre, pensée algébrique, modèle épistémologique de référence, manuels.

The primary to secondary school transition in Benin, Morocco and Tunisia: analysis of the knowledge to teach concerning the development of algebraic thinking in 6th grade primary school textbooks

Abstract: This article focuses on the development of algebraic thinking at the end of primary school in Benin, Morocco, and Tunisia, based on an analysis of the official curricula and textbooks of each education system. This ongoing research is part of the international APPRENDRE program, and the project entitled: "The primary-secondary school transition in Bénin, Maroc and Tunisia. State of play, comparison, and perspectives on the teaching of arithmetic and algebra." Our research was based on the epistemological reference model of algebraic thinking (MRPA, Squalli et al., 2019) and draws on research developed by the International Observatory of Algebraic Thinking (OIPA). The study aims to analyze the mathematical praxeologies developed in textbooks in order to identify the potential of tasks to develop algebraic thinking before algebraic symbolism is even introduced. These analyses allowed us to lift a corner of the veil on how the curricula in each of these countries prepare students for the transition from late primary to secondary school in relation to algebra.

Keywords: knowledge to teach, arithmetic / algebra, algebraic thinking, epistemological reference model, textbooks.

Introduction

Cette recherche s'inscrit dans le cadre du projet international « Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie. État des lieux, comparaison et perspectives de l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre » du programme APPRENDRE (Appui à la professionnalisation des pratiques enseignantes et au développement de ressources). Ce projet (Najar et al., 2021) vise à analyser les conditions et les contraintes liées au passage de l'arithmétique enseignée à l'école primaire vers l'algèbre dispensée au collège, et plus particulièrement la manière dont le curriculum de chaque pays prépare les élèves au développement de la pensée algébrique avant l'introduction du formalisme conventionnel. Dans le

cadre de cet article, nous présentons les principaux résultats relatifs aux programmes et manuels de la dernière année du primaire (6^e année du primaire) pour les trois pays concernés par ce projet. Les fondements épistémologiques de cette étude font référence au courant Early Algebra (Kieran et al., 2016) qui vise à offrir aux élèves des opportunités pour soutenir la transition de l'arithmétique à l'algèbre dès l'école primaire et le début du collège. Il s'agit, plus précisément, de caractériser cette approche d'enseignement à partir du potentiel des curricula du Bénin, du Maroc et de la Tunisie à développer la pensée algébrique par le biais de situations d'apprentissage proposées. Ces analyses s'inscrivent dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1997) en articulation avec le modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique (Squalli et al., 2019, Najar et al., 2021) et développé, à son tour, sur la base de certains travaux en didactique de l'algèbre (Bednarz et al., 1996; Grugeon, 1997; Lins et Kaput, 2004; Carraher et Schliemann, 2007; Radford, 2014, 2018). Dans la première partie de cet article, nous présentons les cadres épistémologique et théorique qui nous ont servi de référence à cette étude. La seconde partie porte sur la description de la méthodologie d'analyse suivie pour analyser les manuels scolaires de la 6^e année du primaire, pour les trois contextes institutionnels. La troisième partie est subdivisée en trois sous-parties, chacune d'elle présentant une brève description du contexte d'étude, corpus des données à analyser et système d'enseignement dans chaque pays. Finalement, nous exposons les principaux résultats relatifs à l'analyse des praxéologies mathématiques développées autour de la pensée algébrique. Celle-ci est illustrée par des extraits des manuels relatifs à chaque contexte. Nous présentons ensuite la conclusion de cette étude.

1. Problématique

L'enjeu de l'enseignement des mathématiques au Bénin, Maroc et Tunisie, à ce moment charnière de la scolarité obligatoire primaire/collège réside dans le passage d'un mode arithmétique de pensée à un mode algébrique. Depuis longtemps, plusieurs chercheurs se sont penchés sur cette problématique et se sont focalisés sur les caractéristiques de cette transition conceptuelle d'un domaine à l'autre des mathématiques (Verschaffel et De Corte, 1996, Kieran, 2007) mettant en avant des obstacles qui peuvent être rencontrés par les élèves pour une entrée dans l'algèbre. Vergnaud (1986) évoque une double rupture épistémologique entre l'arithmétique à l'algèbre : d'un côté, une opposition des caractéristiques de la résolution arithmétique avec celles de la résolution algébrique, et de l'autre, une opposition des modes d'appréhension des écritures algébriques et numériques (statut du signe d'égalité, statut des lettres) ainsi que des modes de contrôle dans la transformation des écritures. Pour leur part, Filloy et Rojano (1989) évoquent

une coupure didactique le long de la ligne d'évolution d'une pensée arithmétique à une pensée algébrique.

Ces dernières années, le mouvement Early Algebra, fortement inspiré des travaux de Kaput (1998), a remis en question l'approche classique d'une rupture nécessaire dans l'approche d'enseignement de ces deux domaines pour proposer des perspectives de recherche curriculaires, notamment dans la formation initiale et continue des enseignants. Ce courant met l'accent sur le développement de la pensée algébrique dès les premières années du primaire sans recourir au langage formel de l'algèbre. Selon certains chercheurs (Kaput, 1998; Carraher et Schliemann, 2007; Squalli et al., 2011,) cette nouvelle approche ne doit pas être envisagée comme une préalgèbre, mais plutôt comme un moyen d'enrichir le savoir mathématique à enseigner en développant certains concepts (inconnue, variable, équation, égalité, variation, formule, fonction, etc.). Cette nouvelle approche semble intéresser les curricula de mathématiques du primaire et du collège de plusieurs pays. Ainsi, à la suite des standards du National Council of Teachers in Mathematics (NCTM) de 2000, les curricula en vigueur aux États-Unis proposent le développement de la pensée algébrique dès la maternelle et abordent les fonctions dans les classes du primaire. Cette tendance ne fait pas exception puisque, depuis les années 2000, nous assistons à des innovations dans les programmes de mathématiques pour certains pays, visant de manière explicite le développement précoce de la pensée algébrique. C'est le cas, par exemple, de toutes les provinces canadiennes, sauf le Québec, de plusieurs pays d'Asie (Chine, Singapour, Corée du Sud, etc.), de l'Australie, du Brésil, etc.

À l'instar du programme québécois, dans les programmes qui ne s'inscrivent pas explicitement dans Early Algebra le développement de la pensée algébrique n'est pas absent pour autant (Squalli et al., 2019). C'est dans cette visée que nous nous proposons de fonder une réflexion sur la nature des contenus à enseigner dans les trois pays concernés par ce projet en interrogeant cette dialectique arithmétique/algèbre à travers une analyse des programmes et des manuels du primaire (puis du collège) dans l'objectif de caractériser l'approche d'enseignement choisie dans chaque pays et son positionnement par rapport au courant de Early Algebra. Les travaux réalisés par l'Observatoire international de la pensée algébrique (OIPA) ont déjà abordé cette problématique dans plusieurs pays, par exemple Bronner et Larguier (2018) en France, en Belgique et au Canada. Pour notre part, nous explorons la manière dont les programmes de mathématiques de la fin du cycle primaire au Bénin, au Maroc et en Tunisie envisagent l'entrée dans l'algèbre à partir des situations d'apprentissage proposées. Nous nous limitons, dans le cadre de cet article, à la mettre à l'épreuve dans le curriculum de chaque pays et à dégager le potentiel d'éléments pertinents

pour développer la pensée algébrique avant l'introduction du symbolisme conventionnel. Ainsi, les questions de recherche qui se situent au cœur de notre problématique sont les suivantes :

Comment la dialectique arithmétique-algèbre est-elle envisagée dans chacun des contextes institutionnels (Bénin, Maroc, Tunisie)? Quelles sont les caractéristiques des situations d'apprentissages visant le développement de la pensée algébrique? Ces situations préparent-elles les élèves à l'algèbre dispensée au collège?

Nous commençons par caractériser les aspects d'ordre épistémologiques relatifs au développement de la pensée algébrique à partir d'une synthèse de travaux prenant en compte différentes approches de l'enseignement de l'algèbre et son rapport avec l'arithmétique.

2. La dialectique arithmétique/algèbre dans la scolarité obligatoire

Il ne s'agit pas dans cette partie de dresser un panorama des travaux existants à propos de la nature du travail algébrique, mais d'identifier quelques enjeux de l'enseignement de l'algèbre élémentaire à ce niveau scolaire. Pour chacun de ces enjeux, il s'agit de mettre en avant un certain nombre de points spécifiques à ce domaine qui sont susceptibles de nous renseigner sur la nature des rapports institutionnels développés aux objets de savoir algébriques, à l'entrée au collège. Ces rapports étant clivés entre l'élève et l'enseignant, ils répartissent les rôles, tâches et compétences respectifs de chacun dans l'institution. Nous avons fait le choix de prendre en compte, à partir de travaux en didactique de l'algèbre, certains aspects relatifs à l'enseignement de ce domaine d'étude.

Historiquement, l'arithmétique en tant que discipline mathématique a précédé l'algèbre, ce qui a longtemps influencé les programmes d'enseignement des mathématiques. Considérer l'arithmétique comme prérequis ou levier à l'apprentissage de l'algèbre a souvent été un argument de nature didactique renforçant la dialectique de l'ancien et du nouveau et permettant ainsi de créer, espérait-on, une certaine continuité dans l'enseignement des mathématiques. De nombreuses recherches ont été menées autour des continuités et des ruptures entre l'arithmétique et l'algèbre en vue d'une meilleure compréhension des enjeux institutionnels de l'enseignement de l'algèbre. La connaissance des perspectives d'enseignement de l'algèbre et des problématiques qu'elles peuvent poser permet d'avoir du recul par rapport aux choix des stratégies d'enseignement compte tenu de l'épistémologie du domaine et de l'histoire de son enseignement.

Fruit d'une revue de la littérature de recherche et d'une analyse d'épreuves, ce paragraphe expose certains travaux menés sur l'enseignement de l'algèbre (travaux anglo-saxons, travaux français...) qui témoignent d'une diversité d'entrées possibles dans la pensée algébrique, selon les choix curriculaires de

chaque contexte institutionnel (Ben Nejma, 2004, 2009, 2012, 2020; Coulange et al., 2012). Ces entrées se réalisent selon différentes perspectives d'enseignement évoquées dans les travaux de Bednarz et al. (1996):

L'introduction de l'algèbre élémentaire se réalise selon différentes approches : les règles de transformation et de résolution d'équations (l'enseignement actuel se réduit souvent à cette approche équationnelle), la résolution de problèmes ou de situations problèmes (qui, historiquement, a joué un rôle important dans le développement de l'algèbre et de son enseignement), la généralisation (susitant l'intérêt de certains programmes), l'introduction plus récente des notions de variable et fonction (apparues bien plus tard historiquement et occupant une place importante dans certains curricula) et l'étude des structures algébriques (qui a marqué l'enseignement des mathématiques dans les années 1960). (Bednarz, et al., 1996, p. 96, traduction libre¹)

La transition institutionnelle primaire/collège est marquée par le problème du passage de l'arithmétique à l'algèbre. Des chercheurs ont distingué la pensée arithmétique (Verschaffel et De Corte, 1996) et la pensée algébrique (Kieran, 2007). La notion d'obstacle épistémologique a émergé dans les travaux de Vergnaud et al. (1988) « une rupture épistémologique importante avec l'arithmétique » (p. 189). L'entrée dans l'algèbre la plus familière est celle par les équations et par la démarche analytique via la mise en équations de problèmes divers. La lettre a alors prioritairement un statut d'inconnue et les objets traités en priorité sont les équations et les inéquations. Dans le mouvement de Early Algebra en vogue dans certains curricula (Russie, États-Unis, Brésil, Canada, etc.), fortement inspiré des travaux de Kaput (1998), cette approche classique est remise en question. Il ne s'agit pas d'une préalgèbre (Squalli, 2015), mais plutôt d'un moyen d'enrichir les contenus mathématiques dispensés au primaire dans le but de développer la pensée algébrique chez les élèves, en consolidant l'acquisition des concepts mathématiques (le concept d'opération, d'égalité, d'équation, de régularité, de formule, de propriété, de variable et de variation, entre autres). La lettre est alors envisagée comme un nombre généralisé et les objets privilégiés sont les formules, qui expriment les régularités. Ce courant de recherche met en avant deux approches complémentaires et interreliées, l'algèbre comme un ensemble

¹ The introduction of school algebra can take many different directions: the rules for transforming and solving equations (to which current teaching often reduces algebra), the solving of specific problems or classes of problems (which has played an important role historically in the development of Algebra and his teaching), the generalization of laws governing numbers (a very strong focus on certain curricula), the more recent introduction of the concepts of variable and function (which appeared much later historically and which occupy a position of growing importance of some programs), and the study of the algebraic structures (which marked the school curriculum in the 1960s under the influence of modern mathematics). (Bednarz et al., 1996, p. 96)

d'activités mathématiques (résolution de problèmes, étude de structures, modélisation, étude de relations fonctionnelles, etc.) et l'algèbre comme un mode de pensée (pensée algébrique), en tant que processus impliqués dans ce type d'activités. Ainsi, deux composantes essentielles de la pensée algébrique fondent cette approche (Squalli et al., 2020), la tendance à généraliser et la tendance à raisonner de manière analytique. Dans cet article, nous analysons les entrées possibles dans l'algèbre en référence au cadre théorique évoqué en se focalisant sur trois approches d'enseignement qui nous semblent à la fois complémentaires et interdépendantes : la généralisation, la résolution de problèmes et la modélisation.

2.1. L'approche généralisation

L'entrée familière de cette approche adoptée par certains curricula est de faire émerger les nombres généralisés comme préconcepts des variables et d'engager les pratiques scolaires dans l'utilisation du symbolisme pour une meilleure mémorisation des propriétés. En effet, comme le souligne Chevallard (1994) « la création du langage algébrique permet de dégager plus nettement la problématique d'étude du numérique, en la posant, sans l'opposer, à côté de la perspective calculatrice » (p. 75). L'utilisation du symbolisme en algèbre, et en particulier les lettres qui désignent des quantités connues ou inconnues, permet de conserver une trace écrite des opérations réalisées et même de mettre au jour de nouvelles connaissances sur l'objet d'étude. L'algèbre utilise ainsi pleinement la valeur « monstrative » de l'expression, contrairement à l'arithmétique qui n'envisage que l'aspect calculatoire du langage numérique. Cette perspective d'enseignement permet ainsi d'engager les élèves dans la rationalité algébrique à travers des situations numériques ou figurales, en particulier par la recherche de « patterns ». Cependant, cette valeur monstrative d'une expression n'est pas une caractéristique de l'expression, mais une propriété émergente chez le sujet, d'où la primauté de la pensée sur la nature de l'ostensif et du symbolisme. Dans ce sens, les travaux réalisés dans le courant Early Algebra (Kieran et al., 2016) mettent en avant la généralisation comme une composante essentielle de la pensée algébrique par l'étude des régularités et des relations. Dans cette perspective, les élèves reconnaissent, décrivent et généralisent des régularités via des situations réelles et sont amenés à construire des modèles mathématiques qui leur permettent de prévoir leurs évolutions. Ainsi, contrairement aux approches d'enseignement classiques, l'objectif n'est pas d'introduire le symbolisme littéral pour donner du sens aux concepts ou faire émerger des propriétés, mais plutôt de développer la généralisation algébrique (généraliser, formuler et justifier les généralisations) en tant que composante essentielle de la pensée algébrique. Bien que la présence d'opérations (lois de composition interne ou externe, binaire ou n-aires) en nombre

fini soit essentielle et assure le caractère algébrique de l'activité, la présence des lettres n'y est pas indispensable.

2.2 L'approche résolution de problèmes

Dans la perspective d'enseignement classique de l'algèbre, cette approche vise à engager les pratiques scolaires dans la mise en équation et la résolution des équations et de faire émerger les concepts d'inconnue et de raisonnement algébrique. L'enjeu principal pour accéder avec celle-ci au raisonnement algébrique est de permettre de dépasser la rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre. Dans la perspective de Early Algebra que nous adoptons dans cette recherche, l'enjeu essentiel de cette approche est d'amener les élèves à raisonner de manière analytique, ce qui diffère d'apprendre à résoudre des équations selon une démarche algébrique. Ainsi, l'objet est le développement d'une pensée algébrique, assez tôt en faisant progresser les moyens sémiotiques dont dispose l'élève dans un contexte de résolution de problèmes. Plusieurs différences fondamentales entre les démarches de résolution de problèmes en arithmétique et en algèbre sont mises en avant. En arithmétique, on part de ce que l'on connaît et l'on avance vers ce que l'on recherche, en progressant dans le connu. Cette démarche relève de la synthèse (Gascón, 1995). En algèbre, des lettres étant choisies pour désigner les nombres cherchés, des relations sont établies entre le connu et l'inconnu, mis sur le même plan. Un traitement formel de ces relations conduit ensuite au résultat cherché. Cette démarche relève de l'analyse et suppose un changement profond des modes de pensée. En outre, dans l'approche classique de l'enseignement de l'algèbre lors d'une résolution arithmétique, les stratégies utilisées sont souvent liées au contexte de la situation évoquée par l'énoncé alors que lors d'une résolution algébrique, la légitimité du traitement formel des relations produites s'appuie sur des règles de calcul algébrique, qui n'ont plus forcément de sens par rapport au contexte de départ, et les calculs sont alors contrôlés par le sens interne des écritures algébriques. Dans la perspective de Early Algebra, cette vision des choses est remise en question, car la démarche algébrique ne se définit pas par l'utilisation du formalisme du langage algébrique conventionnel, l'élève peut raisonner analytiquement tout en restant attaché au contexte. Par exemple, dans les problèmes de partage inéquitable, il peut utiliser la notion de part, liée au contexte, comme substitut à l'inconnue et opérer sur elle pour former l'équation et la résoudre. Dans cette perspective, le développement du raisonnement analytique y constitue une composante essentielle de cette approche dès le primaire, et l'introduction de la mise en équation dans l'enseignement classique peut venir bloquer ce type de raisonnements.

De nombreux travaux ont mis en évidence qu'entre la catégorie des raisonnements non analytiques (degré d'analyticité nul) et celle des raisonnements analytiques

(degré d'analyticité optimal) il existe une autre catégorie de raisonnements riches sur le plan de la pensée mathématique, mais qui ne peuvent être classés comme analytiques ou non analytiques (degré d'analyticité non nul mais non optimal). Nous pouvons citer les travaux de Adihou et al., (2020) ainsi que ceux de Squalli et al., (2020).

2.3 L'approche modélisation

Chevallard (1989) propose une théorisation de l'activité mathématique, à l'aide de la notion de modélisation, en considérant que l'activité mathématique consiste à modéliser des systèmes qui peuvent être aussi bien mathématiques qu'extramathématique (physique, chimie, biologie, économie, démographie, etc.). En effet, le terme «mathématisé» désigne, selon l'auteur, le système mathématique que l'on va modéliser, et le terme «mathématique» pour parler du modèle que l'on fabrique. Des exemples de projets d'enseignement ont été construits en s'appuyant sur cette notion de modélisation par Gascón (1995), qui permettent de montrer que la résolution de problèmes, dont on fait souvent l'essentiel de l'activité mathématique, n'est qu'un aspect de l'activité de modélisation (et n'est donc qu'un aspect de l'activité mathématique). Dans le cadre de cette approche par la modélisation, l'objectif de l'activité mathématique est de produire des connaissances sur des systèmes (mathématiques ou extramathématiques) en construisant des modèles mathématiques de ces systèmes. Selon Gascón (1995), les modèles mathématiques ne sont pas ici le point de départ ni le but de l'étude; ils sont des outils de production de connaissances sur les systèmes modélisés. Dans cette perspective d'enseignement, une grande place est accordée à la flexibilité entre les registres de représentations sémiotiques et les cadres mathématiques. Cette approche est à la base de travaux visant une caractérisation des problèmes qui requièrent une modélisation algébrique (Gascón, 1995; Bednarz et Janvier, 1996; Squalli et al., 2020; Ben Nejma, 2021). Ainsi l'une des principales difficultés à mettre en place cet enseignement est d'arriver, à travers des situations appropriées, à faire distinguer par les élèves le sens de l'inconnue, la variable, le paramètre, la formule, etc., avant même l'introduction du symbolisme algébrique.

Ces difficultés sont clairement mises en évidence par l'auteur à travers une analyse du sens donné par les élèves aux représentations symboliques et aux diverses notations sur laquelle se base cette modélisation. Les distinctions qu'il fait entre formule, équation, inconnue, variable, indéterminée, nombre polyvalent dans une expression symbolique permet de mieux situer les différentes approches de l'algèbre, rappelons que ces distinctions ne peuvent être déterminées a priori mais qu'elles sont essentiellement liés à l'activité de l'élève. (Bednarz et al., 1996, p. 10, traduction libre²)

Selon ce point de vue, Early Algebra vise donc à avoir une vision plus large que cette arithmétique généralisée qui remplace pratiquement les nombres par les lettres lors de l'enseignement de l'algèbre. C'est également selon ce point de vue que nous abordons cette recherche à travers une analyse des problèmes proposés à la transition primaire/collège dans ces trois pays.

3. Cadre théorique

La recherche que nous envisageons repose sur des cadres conceptuels de la didactique des mathématiques basée sur la théorie anthropologique du didactique et la proposition d'un modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique pour caractériser l'activité mathématique.

3.1 La notion de praxéologie

La théorie anthropologique du didactique (TAD) permet de modéliser toute pratique humaine ou sociale en termes de praxéologies ou organisations praxéologiques (Chevallard, 1989). Celle-ci permet de décrire et d'analyser toute activité en la décomposant en un quadruplet (tâche, technique, technologie et théorie). Selon ce modèle, les pratiques institutionnelles peuvent être analysées par un découpage en un système de tâches (t) appartenant à des types de tâches (T) (Bosch et Chevallard, 1999). Toute tâche t est accomplie au moyen d'une technique. Chaque technique est justifiée à son tour par une technologie. Celle-ci correspond à un discours rationnel qui permet d'expliquer la technique. Finalement, toute technologie repose elle-même sur les fondements d'une théorie (Chevallard, 1990). Cette décomposition en praxéologies permet de modéliser l'activité mathématique pour en favoriser l'analyse. Par ailleurs, Chevallard (2002) identifie des niveaux de codétermination mathématiques selon les praxéologies à étudier. Un complexe de techniques, de technologies et de théories organisées autour d'un type de tâches

² These difficulties are clearly shown by the author through an analysis of the meaning's students give to symbolic representations and various notations on which this modeling is based. The distinctions he makes among formula, equation, unknown, variable, indeterminate value, and polyvalent noun in a symbolic expression help us to better situate the various approaches to algebra, reminding us that these distinctions cannot be determined a priori but that they are essentially linked to the student's activity. (Bednarz et al., 1996, p. 10)

forme une organisation mathématique ponctuelle (ou praxéologie ponctuelle). L'amalgamation de plusieurs praxéologies ponctuelles créera une praxéologie locale, régionale ou globale selon que l'élément amalgamant est, respectivement, la technologie, la théorie ou la position institutionnelle considérée. Celles-ci lorsqu'elles se regroupent autour d'une technologique déterminée, elles sont nommées praxéologies locales qui, à leur tour, lorsqu'elles font appel à une même théorie, sont qualifiées de praxéologies régionales. Ainsi, une organisation praxéologique globale est par l'agrégation de plusieurs organisations régionales correspondant à plusieurs théories. Dans le contexte de cette étude, cette modélisation est exploitée dans le cadre du développement de la pensée algébrique pour analyser les praxéologies développées à la fin du cycle primaire dans les trois institutions.

3.2 Le modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique pour caractériser l'activité mathématique

Le modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique (MPRPA) (Najar et al., 2021) assez proche des modèles épistémologiques présentés par certains travaux (Bronner et Larguier, 2018; Pilet et Grugeon-Allys, 2020), mais avec une organisation différente proposés dans les travaux de l'OIPA et s'appuyant sur des travaux de recherche en didactique de l'algèbre (Bednarz et al, 1996; Lins et Kaput 2004; Carraher et Schliemann, 2007; Radford, 2010, 2015; Squalli, 2015), servira de base de travail dans ce projet de recherche. Sa mise en fonctionnement nous permet d'analyser le savoir enseigné présente dans les manuels, en lien avec le développement de la pensée algébrique conçue comme une praxéologie mathématique globale. Dans ce modèle, celle-ci s'organise en trois praxéologies mathématiques régionales (PMR) : Généraliser (G), Modéliser (M) et Calculer (C). Chacune d'elle s'organise autour de praxéologies locales. La PMR « Généralisation » se décline en deux PML : généralisation de régularités et généralisation de règles, de formules, de loi et d'algorithmes. La PMR « Modélisation » se décline en trois PML : Modélisation de situations intra ou extramathématiques par des expressions numériques; Modélisation de situations intra ou extramathématiques par des équations et Modélisation de situations intra ou extramathématiques par des fonctions. La PMR « Calcul » se décline quant à elle en deux PML : Calcul sur des expressions numériques et Calcul sur des expressions algébriques. La figure 1 présente l'architecture du MPRPA investi dans le cadre de cette étude.

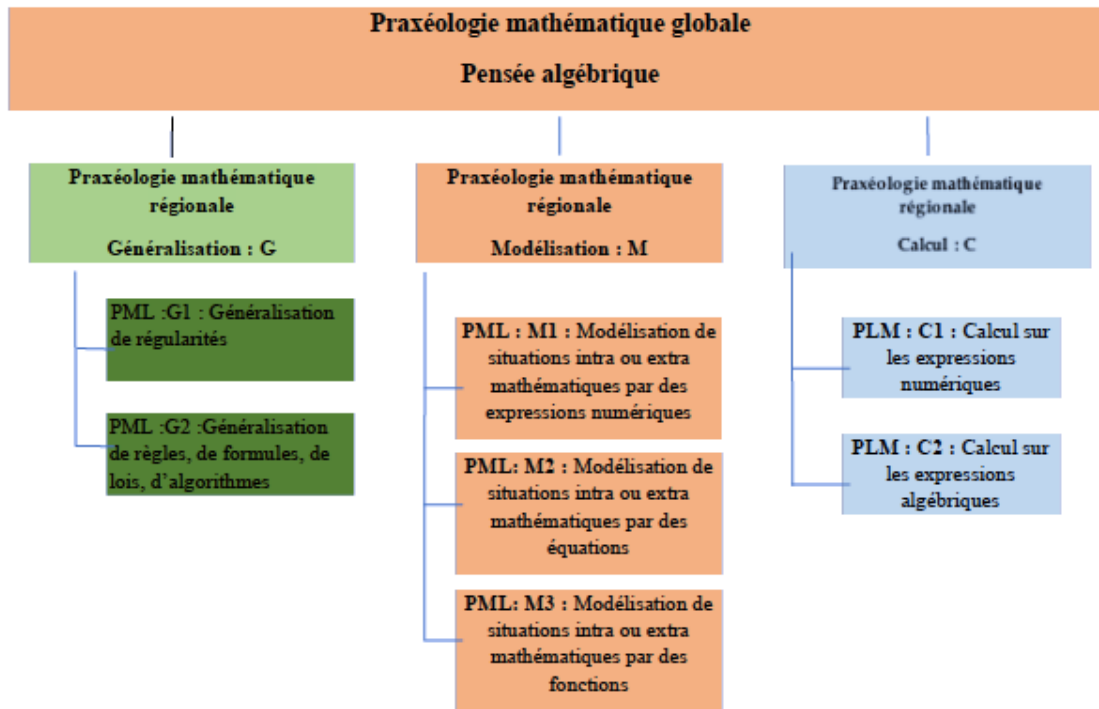


Figure 1. Architecture du MPRPA (Najar et al., 2021, p. 5)

4. Méthodologie

Pour étudier les problèmes de la transition arithmétique-algèbre dans les trois pays concernés par ce projet, nous avons fait l'hypothèse que l'analyse du développement de la pensée algébrique permet d'étudier la transition arithmétique-algèbre. En lien avec le premier objectif, la méthodologie d'analyse du curriculum officiel utilisée dans le réseau OIPA et présentée par Bronner et Larguier (2018) s'inscrit dans la théorie anthropologique du didactique que nous considérons comme pertinente pour étudier et comparer le développement de la pensée algébrique dans divers contextes géographiques, sociaux et politiques. Selon Bronner et Larguier (2018), les étapes de cette méthodologie d'analyse consistent à développer un modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique, repérer les instances et textes officiels et identifier les données à analyser et enfin analyser les éléments relatifs à l'organisation mathématique. Par ailleurs, la réflexion sur le développement de la pensée algébrique du point de vue de la dialectique arithmétique/algèbre soulève des réflexions quant aux techniques possibles à mettre en œuvre par les élèves, indépendamment des attentes institutionnelles, permettant d'accomplir un type de tâches donné. Squalli et al. (2020) instaurent alors la notion de potentiel algébrique d'un point de vue méthodologique pour répondre à cet objectif.

4.1 La notion de potentiel algébrique

La perspective du développement de la pensée algébrique dès l'école primaire soulève des questions de fond en rapport avec les pratiques institutionnelles et les pratiques scolaires pour résoudre les tâches qui leur sont proposées dans le cadre arithmétique ou algébrique. Squalli et al. (2020) partent du fait qu'une tâche potentiellement algébrique peut être résolue par une technique arithmétique ou une technique algébrique. Si l'énoncé de la tâche encourage l'utilisation d'une technique arithmétique, ou si la technique algébrique est hors de portée de l'élève, nous dirons que le degré du potentiel algébrique de la tâche est faible. Dans le cas opposé, si l'énoncé de la tâche encourage l'utilisation d'une technique algébrique, ou si la technique algébrique est accessible à l'élève, nous dirons que le degré du potentiel algébrique de la tâche est fort. Nous avons ainsi une échelle à trois degrés : nul (tâche purement arithmétique), faible et fort. Dans le corpus des tâches obtenu, il s'agit de distinguer entre les tâches potentiellement algébriques et les tâches qui ne le sont pas (purement arithmétiques).

Une tâche est purement arithmétique si les nombres qu'elle implique sont tous déterminés et si le calcul repose uniquement sur la qualité nombrante des nombres (leurs valeurs), si les opérations arithmétiques sont exécutées et, si le raisonnement porte toujours sur des nombres déterminés.

Nous illustrons par des exemples la nuance entre une tâche à potentiel nul et une tâche à potentiel faible :

4.1.1 Exemple de tâche à potentiel nul

Chaque année les parents de Said fêtent son anniversaire, ils préparent un gâteau avec autant de bougies que son âge. Ainsi, à sa première année de naissance, ils ont soufflé une bougie, puis deux à sa deuxième année, trois à sa troisième année et ainsi de suite. À la fin de la fête, la maman de Said lui dit : « depuis ta naissance, nous avons utilisé en tout 78 bougies » quel est l'âge de Said?

Une technique algébrique consiste à trouver la formule de la somme des nombres consécutifs de 1 à n : $n(n + 1) / 2$ et à résoudre l'équation : $n(n + 1) / 2 = 78$. Cette technique est hors de portée des élèves de 6^e année du primaire. Nous accordons donc un potentiel nul à cette tâche.

4.1.2 Exemple de tâche à potentiel faible

Un agriculteur est allé au souk avec un montant de 2 143,50 dhs dans son portefeuille. Il a vendu 17 moutons à 48 600 dhs et 5 chèvres à 3 775 dhs. Il a acheté deux vaches à 44 125 dhs et des fourrages à 785,75 dhs. Quel est le montant restant chez l'agriculteur?

Une modélisation numérique de ce problème est :

$$[2143,50 + (48\,600 + 3\,775)] - (44\,125 + 785,75)$$

Le problème étant connecté, c'est-à-dire qu'il existe un moyen d'obtenir la valeur de l'inconnue en opérant uniquement sur des nombres et des relations connus. Nous constatons dans ce cas qu'une technique arithmétique est facilement accessible et fait obstacle à toute technique algébrique. Nous accordons donc un potentiel faible à cette tâche.

Il nous a ainsi semblé important, à la lumière de la problématique, d'analyser le potentiel du développement de la pensée algébrique dans la transition primaire/collège dans ces trois pays (à l'Annexe 1 nous présentons les niveaux scolaires concernés par l'étude et les tranches d'âges selon les systèmes scolaires (France, Québec, Maroc, Bénin et Tunisie).

4.2 Corpus de données et méthodologie d'analyse

Le protocole d'analyse, mis en place pour mener les analyses des manuels scolaires et les guides de l'enseignant dans les trois pays, a porté sur l'identification des tâches mathématiques et leur caractérisation selon le MPRPA ainsi que le degré du potentiel algébrique des tâches proposées. Une tâche mathématique se présente, ici, sous forme d'un exercice, un problème ou une question isolée ou non. Elle peut être composée de sous-tâches ou faire partie d'un problème comportant plusieurs tâches. Il s'agit de faire d'abord une lecture des tâches présentes dans les manuels officiels des trois pays, pour la dernière année du cycle primaire. Nous sélectionnons, ensuite, les tâches qui relèvent des quatre domaines : nombres et calcul, grandeurs et mesures, géométrie et organisation et gestion de données faisant entre autres intervenir une ou plusieurs opérations de l'arithmétique. Nous menons une analyse a priori des situations d'apprentissage proposées dans le manuel scolaire pour chacun des pays concernés par l'étude en vue d'identifier la nature des praxéologies régionales et locales ainsi que le genre de tâches en lien avec chaque praxéologie locale. Nous identifions, à partir des techniques permettant d'accomplir ce genre de tâches, le degré du potentiel algébrique de la tâche. Par ailleurs, la caractérisation du degré de potentialité algébrique des situations proposées dépend du statut de la tâche proposée et donc des moments de l'étude qui caractérisent les praxéologies didactiques qui accompagnent la mise en œuvre des praxéologies mathématiques développées dans ces manuels.

Nous commençons par présenter une brève description des contextes institutionnels (béninois, marocains et tunisiens) et des choix opérés par chaque noosphère pour préparer les élèves à l'algèbre avant l'usage du formalisme conventionnel, puis nous présentons les principaux résultats relatifs à l'analyse des manuels de la 6^e année du primaire dans chaque institution. Nous illustrons

nos analyses a priori par quelques extraits de manuels permettant d'expliciter la méthodologie suivie.

5. La transition primaire/collège au Bénin, au Maroc et en Tunisie

Nous nous intéressons aux caractéristiques de la transition institutionnelle primaire /collège dans les trois pays Maroc Tunisie et Bénin du point de vue des rapports entre l'arithmétique et l'algèbre. En particulier, nous analysons la manière dont chacun des pays prépare les élèves à l'algèbre et au développement de la pensée algébrique.

5.1. Description du contexte institutionnel et aperçu sur les choix d'entrées à l'enseignement de l'algèbre au collège

Dans ce paragraphe nous présentons une brève description du contexte institutionnel relatif à chacun des pays concernés par la recherche ainsi que les approches d'enseignement adoptées par chacun des pays pour une entrée dans la pensée algébrique.

5.1.1 Au Bénin

Au Bénin c'est une approche par compétences qui est prescrite dans tout le système éducatif. Les domaines d'étude du programme en classe de 6^e année du primaire en mathématiques s'organisent autour de l'arithmétique, la mesure et la géométrie. Les principes de la numération décimale sont à consolider. Les activités de construction, de comparaison, de composition et décomposition, d'ordre, d'arrondissement, d'estimation et d'opération sur les nombres doivent toujours prendre appui sur les ordres et les classes. Ainsi, les thèmes développés en arithmétique tout au long du primaire sont : nombres entiers (à partir du CI³); fractions (à partir du CE2⁴); nombres décimaux (à partir du CM1⁵). Le cadre des grandeurs (mesures de longueur, d'aire, de volume, de temps, les monnaies) et l'organisation des données (proportionnalité, pourcentage, échelle et statistiques) sont aussi progressivement introduits à partir du CP⁶. Le programme d'études béninois au primaire ne fait pas référence explicitement à l'algèbre. On peut donc dire que le programme ne positionne pas l'algèbre comme domaine, mais que les contenus des domaines mis en évidence explicitement, ainsi que les activités suggérées, prépareraient les élèves à l'apprentissage de l'algèbre. Un seul manuel officiel est prescrit : La Mathématique au cours moyen Deuxième année (Ministère des enseignements maternel et primaire du Bénin, 2004a). Au collège, apparaît

³ Cours d'initiation ou première année du primaire.

⁴ Cours élémentaire deuxième année ou quatrième année du primaire.

⁵ Cours moyen première année ou 5^e année du primaire.

⁶ Cours préparatoire ou 2^e année du primaire.

clairement le calcul littéral qui introduit implicitement l'algèbre dans le programme de première année de collège. Les activités de la géométrie ont plus de place que les activités numériques. Deux manuels sont prescrits officiellement. Le premier manuel est édité en 2006, *Conquête de compétences*. Le deuxième manuel est édité en 2017, *Réussir en mathématiques*. Dans ce deuxième manuel, les tâches nous semblent plus contextualisées et favorisent davantage l'approche pédagogique prescrite. Les situations d'apprentissage sont souvent accompagnées de figures, dessins, schémas, etc. De ce fait elles devraient permettre aux élèves de se représenter les données et les relations et de faire émerger des techniques de résolution de nature algébrique sans forcément passer par le symbolisme algébrique.

5.1.2 Au Maroc

Au Maroc, l'algèbre est introduite comme une arithmétique généralisée; la structure du programme de collège est basée sur l'extension des systèmes de nombres et l'établissement du calcul algébrique sur ces domaines de calcul dont la maîtrise par les élèves est l'un des objectifs essentiels du curriculum d'algèbre à ce niveau (ministère de l'Éducation nationale du Maroc, 1991). Selon le curriculum du secondaire collégial, les mathématiques y occupent une place importante justifiée par leur contribution efficace au développement de la pensée logique et au développement de diverses capacités de l'apprenant (ministère de l'Éducation nationale du Maroc, 2009). Les directives des orientations pédagogiques (ministère de l'Éducation nationale du Maroc, 2009) présupposent que l'enseignement des mathématiques soit adapté à la réalité de l'élève, en harmonie avec le contexte culturel, social et économique de son pays, ouvert aux évolutions qu'il connaît aujourd'hui de manière à lui permettre de s'adapter en permanence aux nouveaux développements de la connaissance et de la technologie. Avant 2019, le curriculum du primaire est réduit à la présentation d'un programme d'études dans chaque niveau scolaire de la première année à la 6^e année (ministère de l'Éducation nationale du Maroc, 2011). La discipline mathématique y est présentée de manière indépendante des autres disciplines (ministère de l'Éducation nationale du Maroc, 2011). La situation a changé en 2020, dans le nouveau curriculum (ministère de l'Éducation nationale du Maroc, 2020) on voit l'apparition du domaine : mathématiques, sciences et techniques. Par ailleurs, le programme de mathématiques reste présenté en domaines d'études. En plus des trois domaines mathématiques de l'ancien programme : Nombres et calculs, mesure, et Géométrie, un nouveau domaine vient s'ajouter, sous le titre : Organisation et traitement des données. La résolution des problèmes reste une composante importante dans les deux programmes. Dans le nouveau curriculum (ministère de l'Éducation nationale du Maroc, 2020), le nouveau programme est toujours basé

sur une approche par compétences. L'objectif principal de l'enseignement des mathématiques est d'exploiter les compétences acquises dans la recherche, la modélisation, le raisonnement, la résolution de problèmes, la communication et l'autoformation. Nous avons opté pour le choix d'un manuel scolaire (Ministère de l'Éducation nationale du Maroc, 2020a) pour la 6^e année du primaire, en langue arabe et d'un manuel scolaire (Ministère de l'Éducation nationale du Maroc, 2020b) pour la 1^{re} année du collège, en langue française, ainsi que pour les guides de l'enseignant qui leur sont associés. Dans ce contexte, chaque établissement scolaire ou direction provinciale, après concertation au niveau du conseil pédagogique, choisit le manuel que les élèves vont utiliser durant l'année scolaire. Ces manuels s'adressent principalement à l'élève, mais leur utilisation se fait sous la supervision de l'enseignant et selon ses choix de transposition didactique.

5.1.3 En Tunisie

Le système éducatif scolaire tunisien est composé de deux cycles d'enseignement, l'enseignement de base d'une durée de 9 ans (6 ans de primaire et 3 ans de collège) et l'enseignement secondaire d'une durée de 4 ans sanctionné par l'examen national du baccalauréat à la fin de la 4^e année. L'enseignement de base constitue un cycle complet qui s'étale sur neuf années accueillant des élèves de première année (6 ans) jusqu'à la 9^e année (14-15 ans). Il se compose à son tour de deux cycles complémentaires, le premier cycle (cycle primaire) dispensé dans les écoles primaires et d'une durée de six ans, subdivisés en trois degrés de deux ans chacun, et le second cycle (cycle préparatoire) dispensé dans les collèges et d'une durée de trois ans. L'examen de fin d'études de l'enseignement de base est organisé au terme de la 9^e année et sanctionné par le diplôme de fin d'études de l'enseignement de base (DFEB). La transition primaire/collège est accompagnée d'un changement dans la désignation des lettres et du sens de l'écriture symbolique. En effet, Jusqu'en 6^e année le symbolisme s'appuie sur l'alphabet arabe pour désigner des figures géométriques et les unités de mesure (grandeurs et temps). Le sens des opérations suit celui des textes arabes, c'est-à-dire de droite à gauche. À partir de la 7^e année de base, la langue naturelle en usage à l'écrit et à l'oral en mathématiques est la langue arabe, que ce soit au primaire ou au collège. L'enseignement de base repose sur une approche par compétences qui vise à développer chez l'élève la résolution de problèmes dans une perspective interdisciplinaire permettant l'intégration dans l'enseignement secondaire, la formation professionnelle ou l'insertion dans la société. Le programme de mathématiques vise le développement des concepts de nombres naturels, des nombres décimaux et des nombres rationnels ainsi que les opérations sur ces nombres et la notion de proportionnalité. L'apprentissage comporte également

différents usages des représentations de ces nombres faisant appel à des registres de représentations sémiotiques variés (numériques, géométriques, graphiques) et leur utilisation dans la résolution de problèmes contextualisés essentiellement par des techniques de nature arithmétique. Par ailleurs, dans ce contexte nous disposons, pour chaque niveau d'enseignement, d'un manuel officiel unique qui représente la principale référence à suivre par l'enseignant et ses élèves et traduit en quelque sorte les objectifs du programme officiel (Ministère de l'Éducation nationale de Tunisie, 2020a). Celui-ci s'organise autour de directives officielles des concepteurs sans explicitation des pratiques institutionnelles à mettre en œuvre. Seul le cycle primaire compte un livre du maître en tant que ressource supplémentaire d'accompagnement des pratiques enseignantes multidisciplinaires au niveau de leur formation initiale.

5.2. Analyse des manuels officiels de la 6^e année du primaire dans les trois pays

Dans cette section, nous présentons une analyse des manuels officiels de mathématiques de 6^{ème} année primaire relatifs au Bénin, Maroc et Tunisie. Nous analysons l'ensemble des tâches proposées selon le modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique et nous illustrons cette analyse par des extraits de problèmes proposés dans ces manuels.

5.2.1 Cas du Bénin

En 6^e année du primaire, les tâches du corpus sont des problèmes et situations problèmes relevant du domaine de l'arithmétique directement ou d'autres domaines tels que la géométrie, les grandeurs et la statistique. Ces tâches concernent principalement les nombres entiers naturels, les fractions et les nombres décimaux. Elles articulent toutes les opérations entre ces nombres selon le domaine de contextualisation de la tâche. Les résultats selon les genres de tâches sont présentés dans le tableau suivant.

Tableau 1 : Totaux des tâches selon leurs genres et le degré du potentiel algébrique

Praxéologie régionale	Généralisation	Modélisation	Calcul	Total
Effectifs	3	53	240	296
Fréquences	1,01 %	17,91 %	81,08 %	100 %
A (potentiel nul)	1,01 % (3)	1,01 % (3)	73,65 % (218)	75,68 % (224)
B (potentiel faible)	0 % (0)	16,89 % (50)	7,43 % (22)	24,32 % (72)
C (potentiel fort)	0 % (0)	0 % (0)	0 % (0)	0 % (0)

(A) $3/5$; (B) $1/4$

Dans cette tâche, c'est la transformation d'une expression en des expressions qui lui sont équivalentes. Son degré de potentiel algébrique est nul.

5.2.1.3 Exemple de tâche relevant de la PMR « Calculer »

Dans chaque cas, remplace le [] par la fraction qui convient.

(A) $4/38 + [] = 26/38$; (B) $[] - 64/102 = 35/102$; (C) $[] \times 9 = 45/172$

Ici, c'est la résolution d'une équation algébrique dont l'inconnue est explicite. La résolution est nécessairement algébrique puisqu'il faut manipuler l'égalité comme une relation d'équivalence et il faut penser à retrancher membre à membre et/ou diviser membre à membre afin de trouver la solution de l'équation. Même si on peut penser que l'élève va déduire par des opérations arithmétiques, celles-ci ne sont pas définies par un sens arithmétique dans l'équation. Résoudre des opérations à trou en utilisant les règles de conservation de l'égalité n'est pas à la portée des élèves de 6^e année du primaire au Bénin. Nous en déduisons que le degré du PA est faible.

L'analyse du manuel officiel au CM2 a permis de se rendre compte que les trois praxéologies régionales identifiées pour la pensée algébrique sont présentes dans le manuel avec des proportions très déséquilibrées. La praxéologie « Calculer » contient le plus grand nombre de tâches 81,08 % (240 tâches sur 296) avec un taux de degré du potentiel algébrique nul très élevé 75,68 % (224 tâches sur 296). Cela nous fait dire que l'arithmétique occupe encore une place prépondérante dans le programme d'étude du CM2 au cours primaire.

Nous conjecturons que c'est le caractère transversal de l'arithmétique qui a pris le pas sur les autres domaines, notamment celui de l'algèbre. La transition vers l'algèbre est très peu amorcée. En effet, cela se justifie par la faiblesse du nombre de tâches de la praxéologie « Modélisation » et surtout de « Généralisation ». Il nous semble que ce constat n'est qu'une interprétation du programme. En effet, celui-ci est muet sur les manières de développer l'enseignement et l'apprentissage des objets de savoirs en jeu. Les énoncés de certaines compétences semblent propices au développement de la modélisation et de la généralisation, mais la mise en œuvre proposée par le manuel nous semble en inadéquation. Par exemple, l'énoncé d'une compétence est « raisonner à l'aide de concept et de processus mathématique ». Cette compétence est explicitée comme suit : « c'est établir des liens entre des objets, des idées, des faits en vue de produire une vérité non apparente » (Ministère des enseignements maternel et primaire du Bénin, 2004b, p. 99). Nous pensons que ces précisions du programme peuvent aider à enseigner l'arithmétique en faisant évoluer l'apprentissage vers l'algèbre (sans que les sens des nombres et des opérations ne soient utilisés au cours de l'activité de l'élève).

Nous conjecturons également que ce constat peut révéler une priorité accordée à la praxéologie « Calcul » par l'institution pour faire opérer davantage les utilisateurs du manuel sur les nombres. Cela confirme que l'algèbre n'est pas objet d'enseignement-apprentissage.

5.2.2 Cas du Maroc

Dans le corpus des tâches retenues dans ce manuel, nous avons dégagé, comme le montre le tableau 2, un nombre total de 608 tâches. Elles sont réparties selon les trois praxéologies mathématiques régionales de la praxéologie globale de la pensée algébrique qui sont, généraliser, modéliser et calculer.

Le tableau 2 suivant illustre les densités relatives des tâches selon leurs genres et le degré du potentiel algébrique.

Tableau 2 : Totaux des tâches selon leurs genres et le degré du potentiel algébrique

Praxéologie régionale	Généralisation	Modélisation	Calcul	Total
Effectifs	83	273	252	608
Fréquences	13,65%	44,90 %	41,45 %	100 %
A (potentiel nul)	53,01 % (44)	57,14 % (156)	75,40 % (190)	64,14 % (390)
B (potentiel faible)	27,71 % (23)	27,11 % (74)	18,65 % (47)	23,68 % (144)
C (potentiel fort)	19,28 % (16)	15,75 % (43)	5,95 % (15)	12,17 % (74)

La praxéologie régionale « généraliser » représente 13,65 % (83), la praxéologie régionale « modéliser » représente 44,90 % (273) et la praxéologie régionale « calculer » représente 41,45 % (252). Quant au potentiel des activités de ce manuel, 64,14 % (390) représentent un potentiel nul, 23,68 % (144) représentent un potentiel faible et 12,17 % (74) représentent un potentiel fort.

Dans ce manuel scolaire, l'importance accordée aux PMR « Calculer » et « Modéliser » et de la faible représentation de la PMR « Généraliser » peuvent être expliquées en partie par la voie choisie pour l'entrée à l'algèbre et, par ailleurs, par la compréhension donnée à cette entrée par les concepteurs du manuel. En effet, l'importance de la PMR « Calculer » est prévisible étant donné que la voie d'introduction de l'algèbre est fondée sur le calcul algébrique. Cela explique aussi, a contrario, la faible importance de la PMR « Généraliser » : la généralisation n'est pas une voie privilégiée de façon explicite pour l'introduction de l'algèbre. Selon les orientations curriculaires, la modélisation en mathématiques vise à développer chez les apprenants des modèles de mode de pensée dans le cadre de résolution de problèmes, dans trois domaines : nombres et calcul, grandeurs et mesures et organisation et gestion de données. Le manuel scolaire du primaire accorde une importance aux PMR « Calculer » et « Modéliser ».

Les activités qui permettent d'associer des expressions numériques et/ou les expressions algébriques dans différents modes de représentations sont absentes dans ce manuel. Dans ce manuel, la motivation des expressions algébriques dans des problèmes relevant de l'algèbre est démesurée. La raison d'être de la distributivité comme propriété pour prouver l'équivalence de programmes de calcul ou d'expressions algébriques y est peu visible.

5.2.2.1 Exemple de tâches relevant de la PMR « Généraliser ».

Les tâches 2, 3, 4 et 5 de la page 22 et la page 124 du guide de l'enseignant représentent des activités du domaine calcul et nombres et qui relèvent de la phase de la découverte.

Calculer et comparer :

Déduire

Figure 2. Généralisation de règles. Extrait du manuel scolaire (Ministère de l'Éducation nationale du Maroc, 2020a, p, 22)

Ces activités sont proposées dans ce manuel pour « Justifier » la commutativité, l'associativité pour l'addition et la distributivité (lois), ainsi que pour justifier la généralisation de la règle $a - b = a + c - b - c$. L'argumentation est empirique, se base sur le calcul et uniquement sur les caractéristiques des nombres. La technique de généralisation est basée sur le calcul arithmétique. Nous l'avons qualifiée de potentiel nul.

5.2.2.2 Exemple de tâche relevant de la PMR « Modéliser »

Il s'agit dans cet exemple de modéliser un problème par une expression numérique.

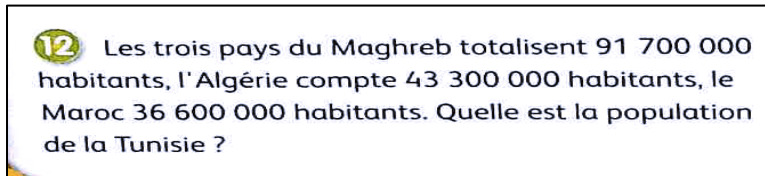


Figure 3. Modélisation par une expression numérique. Extrait du manuel scolaire (Ministère de l'Éducation nationale du Maroc, 2020a, p. 23)

Ce problème est de nature connectée dans la mesure où une technique arithmétique est facilement accessible. Dans le guide, l'attente des concepteurs est de présenter la solution donnée : le nombre d'habitants de la Tunisie : $91\,700\,000 - (43\,300\,000 + 36\,600\,000) = 11\,800\,000$. De ce fait son potentiel algébrique est nul.

Un autre exemple qui consiste à trouver le nombre de parallélépipèdes qu'on peut construire avec 168 cubes, l'arête de chacun étant de 1 cm, et préciser leurs dimensions et leurs volumes :

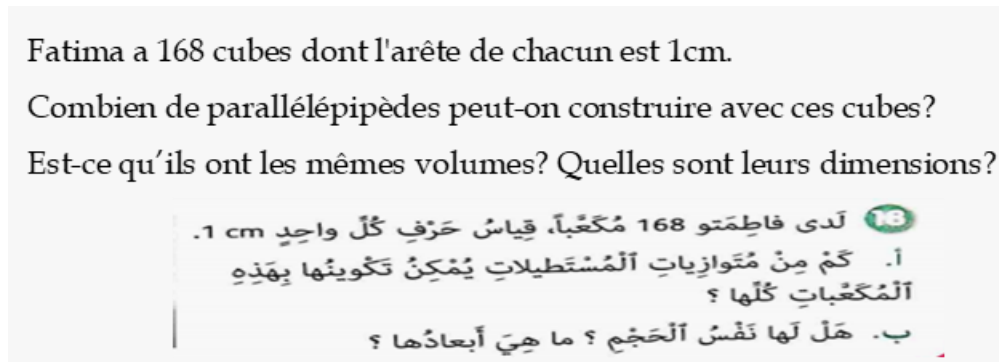


Figure 4. Déterminer et représenter dans un registre donné une relation fonctionnelle modélisant une situation. Extrait du manuel scolaire (Ministère de l'Éducation nationale du Maroc, 2020a, p. 82)

Cette activité consiste à trouver le nombre de parallélépipèdes qu'on peut construire avec 168 cubes dont l'arête de chacun est 1cm et préciser leurs dimensions et leurs volumes. Dans ce genre de tâches, le registre de représentation de la relation fonctionnelle est formulé dans l'énoncé de la tâche.

La tâche ne consiste pas uniquement à transformer une expression numérique pour effectuer des calculs sur le calcul des dimensions et des volumes des parallélépipèdes construits, mais d'opérer sur l'expression de modélisation de la situation dans l'optique de dégager des connaissances sur cette situation.

Nous avons accordé un potentiel fort à cette tâche, car elle pourra amener l'élève à reconnaître une relation fonctionnelle modélisant une situation.

5.2.2.3 Exemple de tâche relevant de la PMR « Calculer »

Pour ce manuel scolaire le calcul en ligne est une méthode alternative au calcul posé et pour favoriser davantage le calcul mental. Les calculs réfléchis multiplicatifs et additifs reposent sur la décomposition canonique d'un des deux nombres. Le calcul réfléchi est peu développé dans ce manuel.

Calculer : 20 أَحْسَبُ مَا يَلِي :

$$25 \times 12 \ ; \ 3,85 \times 7 \ ; \ 6 \times 1,25 \ ; \ 2,75 \times 43$$

Figure 5. Calcul réfléchi. Extrait du manuel scolaire (Ministère de l'Éducation nationale du Maroc, 2020a, p. 6)

C'est une tâche qui relève du domaine « nombres et calcul », donnée dans la phase de l'évaluation des apprentissages. Cette tâche, selon le modèle épistémologique de référence de la pensée algébrique (MERPA), doit consister à trouver la valeur d'une expression numérique en utilisant un calcul réfléchi.

L'intention visée est le calcul de la multiplication de deux décimaux (le calcul en ligne peut-être réfléchi, car la méthode n'est pas imposée). Dans le guide de l'enseignant du manuel scolaire (Ministère de l'Éducation nationale du Maroc, 2020a), les concepteurs du manuel donnent la consigne suivante : « pour calculer ce produit, il est nécessaire d'exécuter l'opération de façon habituelle » (p. 102). La demande des concepteurs se dirige vers l'exploitation d'un calcul posé. En effet, les concepteurs défavorisent le recours à une technique algébrique, ils encouragent l'usage d'une technique arithmétique ce qui nous amène à accorder un potentiel nul à cette tâche.

Observer l'exemple suivant et effectuer les calculs :

15/ Observer l'exemple suivant :

En suite effectuer :

15 أَلَا حِظُّ أَلْمِثَالِ أَلْتَالِي :

مِثَال : $376 \times 145 = (376 \times 100) + (376 \times 40) + (376 \times 5)$
 $= (37\ 600) + (15\ 040) + (1\ 880)$
 $= 54\ 520$

تَمَّ أَنْجِزْ مَا يَلِي :

$762 \times 125 \ ; \ 928 \times 375 \ ; \ 329 \times 36$
 $452 \times 411 \ ; \ 674 \times 101 \ ; \ 109 \times 49$

Figure 6. Calcul réfléchi et reconnaissance de règles. Extrait du manuel scolaire (Ministère de l'Éducation nationale du Maroc, 2020a, p. 15)

Dans le manuel scolaire, cette tâche est qualifiée des activités d'entraînements relevant du domaine nombres et calcul. Elle consiste à trouver la valeur d'une expression numérique en utilisant un calcul réfléchi.

Cette activité vise une routine sur le calcul en ligne, ce calcul s'appuie sur l'égalité comme relation d'équivalence et la propriété de distributivité simple, la décomposition canonique d'un facteur (distributivité) traduite par calcul en ligne, ce qui se rapproche de son usage en algèbre. Ceci nous amène à accorder un potentiel fort à cette tâche. Cependant, dans le guide, cette activité vise à faire prendre conscience à l'apprenant de l'importance de la propriété de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans le calcul de la multiplication de deux nombres, par une décomposition des nombres en écrivant une association dans le système de numérotation décimale, puis en faisant le calcul, comme illustré par l'exemple : $762 \times 125 = 762 \times (100 + 20 + 5) = (762 \times 100) + (762 \times 20) + (762 \times 5) = 76\,200 + 15\,240 + 3\,810 = 95\,250$.

Le calcul réfléchi est amorcé dans ce manuel à travers l'usage de décomposition de nombres. Toutefois, quelques exercices portent sur le groupement de termes d'une somme écrite en ligne pour faciliter les calculs. Ce guide de l'enseignant propose une correction de l'activité sans éléments sur la mise en œuvre de cette décomposition. En effet, le manuel est accompagné par un guide de l'enseignant, et il est important de voir si des consignes orientent la gestion de l'enseignant vers une technique algébrique.

5.2.3 Cas de la Tunisie

Dans le corpus des tâches retenues dans l'unique manuel officiel de 6^e année du primaire, intitulé « Mathématiques pour les élèves de 6^{ème} année de l'enseignement de base » (Ministère de l'Éducation nationale de Tunisie, 2020b), nous avons identifié 316 tâches qui renvoient à des activités et des exercices qui sont proposés en rapport avec le domaine de l'arithmétique, celui des grandeurs et la géométrie. Ces tâches sont classées selon les trois praxéologies mathématiques régionales retenues dans le MERPA. L'analyse a priori a permis de caractériser le degré du potentiel algébrique associé à ces tâches que nous résumons dans le tableau suivant.

Tableau 3 : Totaux des tâches selon leurs genres et le degré du potentiel algébrique

Praxéologies régionales	Généralisation	Modélisation	Calcul	Total
Effectif	17	203	96	316
Fréquences	5,38 %	64,24 %	30,38 %	100 %
A (potentiel nul)	4 (1,26 %)	16 (5,06 %)	47 (14,88 %)	67 (21,20 %)
B (potentiel faible)	8 (2,53 %)	39 (12,34 %)	13(4,11 %)	60 (19 %)
C (potentiel fort)	5 (1,58 %)	148 (46,83 %)	36 (11,4 %)	189 (59,8 %)

Les analyses des activités proposées font apparaître le pourcentage important des problèmes de modélisation (64,24 %). La praxéologie régionale « modélisation » apparaît comme un enjeu d'enseignement explicite qui répond aux choix institutionnels selon lesquels les situations problèmes et les problèmes de modélisation sont au cœur des mathématiques et la résolution des situations problèmes constitue la compétence principale de l'enseignement des mathématiques au niveau de de l'enseignement primaire. Les résultats obtenus renforcent la perspective des programmes officiels que la modélisation peut constituer une niche pour l'initiation des élèves à la pensée algébrique vu l'importance du nombre des activités de modélisation ayant un potentiel algébrique fort. En fait, 148 parmi les 203 activités classées dans la catégorie de genre de tâche « modélisation » et cela constitue 46,83 % de l'ensemble des activités étudiées dans le manuel. Cependant les situations proposées renvoient souvent à une pseudo-modélisation dans la mesure où le modèle en question est souvent préétabli. Le contexte de la situation apparaît plus comme un habillage du problème qu'un moyen de développer un processus de modélisation. La répartition de ces activités selon les types de tâches proposés dans le MPRPA fait apparaître l'importance des activités du type « Résoudre une situation extra-mathématique se modélisant par une expression numérique ». Cela peut s'expliquer en partie par l'absence de la notion d'équation et des aspects fonctionnels pour ce niveau scolaire.

5.2.3.1 Exemple de tâche relevant de la PMR « Généraliser »

Les activités proposées dans ce manuel visent à identifier ou à décrire des régularités telles que la suite des multiples d'un entier donné ou encore à énoncer une règle générale (activité : la somme de deux multiples d'un entier est un multiple de cet entier). Dans cet exemple, il s'agit plus précisément du type de tâche : Justifier/prouver une régularité dans une suite numérique ou non numérique à motif répété.

(5) أبحث عن المضاعفات الخمسة الأولى لعدد أختاره.

أ- أثبت أن مجموع مضاعفين من هذه المضاعفات هو مضاعف للعدد الذي اخترته.

ب- أثبت أن الفرق بين مضاعفين من هذه المضاعفات هو مضاعف للعدد الذي اخترته.

5) Je cherche les cinq premiers multiples d'un nombre que je choisis.

a. Prouver que la somme de deux de ces multiples est un multiple du nombre choisi.

b. Prouver que la différence entre deux de ces multiples est un multiple du nombre choisi

Figure 7. Généralisation. Extrait de Mathématiques pour les élèves de 6^e année de l'enseignement de base (Ministère de l'Éducation nationale de Tunisie, 2020b, p. 36)

Il ne s'agit pas ici de réaliser une preuve mathématique, mais plutôt d'une validation pragmatique d'une règle à travers l'utilisation des termes de la suite des

multiples du nombre choisi. Aucune précision n'est donnée, donc l'élève peut vérifier la règle sur la base d'exemples, donc par essai-erreurs, mais la tâche permet de développer la pensée algébrique chez l'élève. De ce fait, nous considérons le potentiel algébrique de l'activité comme fort dans la mesure où l'on opère sur un nombre généralisé qui peut prendre n'importe quelle valeur dans l'ensemble des entiers naturels non nuls.

5.2.3.2 Exemple de tâche relevant de la PMR « Modéliser »

L'activité suivante proposée dans le manuel officiel renvoie au type de tâches : Déterminer et représenter une expression numérique modélisant une situation extra-mathématique donnée).


<p>1. غرست عائلتنا في حديقة المنزل 8 شجيرات تفاح و6 شجيرات برتقال و7 شجيرات خوخ و3 شجيرات كروم.</p> <p>■ أكتب الأعداد الكسرية المثلثة لكل نوع من الشجيرات المفروسة بالنسبة إلى عدد الأشجار المفروسة.</p> <p>■ أكتب الأعداد الكسرية المكونة والقرينة.</p> <p>■ أرّب سلسلة الأعداد الكسرية المكونة تصاعدياً.</p> <p>■ أوجد لكل عدد كسري كونه 3 كتابات كسرية أخرى.</p> <p>■ أكتب كل عدد كسري كونه إلى مجموع عددين كسريين أو أكثر.</p> 	<p>Notre famille a planté 8 pommiers, 6 orangers, 7 pêchers et 3 vignes dans le jardin.</p> <ul style="list-style-type: none"> Donner les nombres rationnels représentant chaque type d'arbustes plantés par rapport au nombre d'arbres plantés Ecrire et lire ces nombres rationnels Ranger la série de nombres rationnels formés dans l'ordre croissant Trouver pour chacun de ces nombres rationnels trois autres écritures Décomposer chacun de ces nombres rationnels en somme de deux nombres rationnels ou plus
---	---

Figure 8. Modélisation. Extrait de Mathématiques pour les élèves de 6^e année de l'enseignement de base (Ministère de l'Éducation nationale de Tunisie, 2020b, p. 117)

Il s'agit de trouver les nombres rationnels modélisant les situations associées (le nombre d'arbustes de chaque type par rapport au nombre total d'arbres plantés) puis d'ordonner ces nombres et de les représenter par différentes écritures. La dernière question convoque les opérations à effectuer entre ces nombres par le biais d'une décomposition en somme. Cette tâche, même si elle est dans un contexte numérico-arithmétique, possède un potentiel algébrique plutôt fort puisqu'elle permet d'initier les élèves à l'idée d'équivalence entre différentes représentations d'un nombre en dépassant la conception du signe « = » comme l'annonce d'un résultat.

5.2.3.3 Exemple de tâche relevant de la PMR « Calculer »

Par ailleurs, la praxéologie mathématique régionale « Calcul » occupe une place importante après celle de « Modélisation ». La présence des nombres décimaux et des nombres rationnels comme un objet explicite d'enseignement à ce niveau peut expliquer l'importance accordée à ces activités. L'extrait suivant illustre l'exemple

d'une tâche dont l'objectif est d'amener les élèves à manipuler les opérations entre les nombres à travers les différentes écritures d'un nombre rationnel.

Figure 9. Calcul et différentes écritures d'un nombre rationnel.
Extrait de Mathématiques pour les élèves de 6^e année de l'enseignement de base
(Ministère de l'Éducation nationale de Tunisie, 2020b, p. 57)

Dans cette activité, les élèves sont amenés à transformer un nombre rationnel en une somme de deux nombres rationnels ayant le même dénominateur dans le cas d'un nombre rationnel inférieur à 1 ou en la somme d'un nombre rationnel et d'un entier naturel dans le cas où le nombre rationnel donné est supérieur à 1. La technique permettant d'accomplir cette tâche peut renvoyer à la résolution d'une équation (opération à trous) et permet de motiver des stratégies de nature algébrique par la détermination des valeurs « inconnues ». Cependant, les variables didactiques relatives au choix des nombres proposés peuvent détourner cet objectif et conduire les élèves à des techniques de nature arithmétiques qui se basent essentiellement sur les opérations inverses de l'addition ou des essais erreurs conduisant à la réponse attendue. De ce fait, nous considérons cette tâche comme ayant un potentiel algébrique faible.

Par ailleurs, l'activité suivante renvoie au type de tâche : Repérer une règle, une loi, un algorithme) et convoque l'identification d'une règle relative à la multiplication de deux nombres décimaux en précisant le nombre de chiffres après la virgule du produit.

Figure 10. Reconnaître un produit sans calcul, avec justification.
Extrait de Mathématiques pour les élèves de 6^e année de l'enseignement de base
(Ministère de l'Éducation nationale de Tunisie, 2020b, p. 36)

Dans cette activité, sans à avoir à calculer explicitement le produit, il s'agit de justifier la démarche adoptée pour reconnaître la valeur du produit correspondant à la multiplication des décimaux. Cependant la technique qui peut être mobilisée par les élèves peut être purement intuitive en raison des choix des valeurs attribuées (variables didactiques). Par exemple, les élèves peuvent remarquer que les deux nombres dépassent 15 et 10 et donc leur produit dépasse forcément 150 et ne peut jamais atteindre mille. Par conséquent, la première et la dernière proposition sont à rejeter. Il déduit alors la réponse valide sans avoir nécessairement recours à une justification (rationalité algébrique). De ce fait, nous considérons le degré du potentiel algébrique de cette activité comme nul puisque les techniques de nature algébrique sont loin d'être attendues.

5.3 Bilan des analyses pour les trois pays

Les analyses des manuels réalisées dans ces trois pays conduisent à des constats intéressants pour la poursuite de ce travail.

Le premier constat concerne la représentativité des trois praxéologies mathématiques locales, G; M et C mises en avant dans le MPRPA dans ces trois pays, ce qui constitue un indicateur de la perspective curriculaire commune de l'enseignement des mathématiques du primaire à prendre en compte les aspects relatifs au développement de la pensée algébrique.

Le deuxième constat est relatif à l'importance accordée aux PMR « Calculer » et « Modéliser » et la faible représentation de la PMR « Généraliser ». Même si dans le contexte tunisien la PMR « modélisation » vient en première position par rapport à celle du Calcul dominant dans les contextes béninois et marocains, cette modélisation renvoie plus à une résolution de problèmes contextualisés qui est l'approche d'enseignement des mathématiques privilégiée dans le système d'enseignement. De plus, les problèmes posés au primaire ne requièrent pas de démarches de nature algébrique et sont souvent de nature connectée, leur potentiel algébrique est nul ou faible.

Le troisième constat est en rapport avec la PMR « Calculer »; les types de tâches proposés dans les manuels des trois pays sont quasiment similaires. Cela s'explique en partie par la voie d'entrée à l'algèbre choisie dans des contextes variés qui se base sur le calcul sur les nombres et le travail sur les changements conceptuels en rapport avec le statut des lettres sans qu'elles soient symbolisées et celui de l'égalité. Les variations de points de vue liées à un concept se trouvent ainsi dans la variété des situations. Cela rejoint l'idée des chercheurs (Kaput, 2008. Squalli et al., 2011) à développer une pensée algébrique dès l'école primaire – puisque cette pensée peut s'affranchir des notations formelles – dont l'objectif n'est pas d'introduire précocement l'algèbre, mais d'approfondir dès l'école

primaire la compréhension de concepts mathématiques fondamentaux comme le sens des opérations ou de l'égalité, eux-mêmes liés au développement de la pensée algébrique.

Le quatrième constat renvoie à la classification des tâches proposées dans les manuels des trois pays et leur potentiel algébrique. Les analyses montrent la faible proportion des activités relatives à la généralisation. Cela renforce l'idée que l'école primaire ne prépare pas suffisamment les élèves à développer le processus de généralisation algébrique. L'analyse fait apparaître que les procédures de résolution visées font appel à des généralisations empiriques basées sur quelques exemples numériques.

Conclusions et discussions

L'analyse réalisée, dans le cadre de cette étude, sur les manuels de 6^e année, primaire pour les trois contextes institutionnels (Bénin, Maroc, Tunisie) a permis d'explorer les approches d'enseignement adoptées dans chaque contexte pour favoriser le développement de la pensée algébrique chez les élèves, à la transition au cycle collégial. Cette étude se prolonge en première année du collège en vue d'analyser l'évolution des pratiques algébriques en référence au MPRPA. Il en ressort que les trois praxéologies régionales et locales de ce modèle sont représentées dans ces manuels même si certains genres de tâches n'y figurent pas. Cela témoigne d'une prise en compte, pour ces trois institutions, de la diversité d'entrées possibles dans la pensée algébrique et des éléments constitutifs de ce mode de pensée. Cependant, les situations d'apprentissages proposées ne permettent pas toujours de rompre avec les techniques de nature arithmétique pour amorcer un raisonnement de nature algébrique, même si les activités analysées fournissent des contextes qui permettent de donner du sens aux trois praxéologies mathématiques régionales (calcul, modélisation et généralisation) définies dans ce modèle. Bien que nous ayons identifié un nombre non négligeable de tâches pouvant être résolues selon un raisonnement algébrique, les données (valeurs des nombres) proposées font souvent obstacle à l'émergence de raisonnement analytique. Ainsi, le choix des variables didactiques dans la plupart des situations d'apprentissages proposées à ce niveau scolaire impacte les techniques à mobiliser et est susceptible d'engendrer des pratiques détournées par rapport aux pratiques institutionnelles attendues. C'est le cas, par exemple, de la PMR « Généraliser », les tâches proposées nous semblent fort intéressantes à exploiter à condition de convoquer au niveau des praxéologies installées un degré d'analyticité plus important. Il s'agit de générer chez les élèves un processus de généralisation en dépassant le repérage de régularités ou la représentation du modèle dans un ensemble d'entiers dénombrable ou assez petit. Souvent, les situations posées ne permettent pas de dépasser la technique arithmétique de

comptage et d'aller vers la création du modèle de généralisation approprié ou à sa justification par des techniques guidées. Il semble que l'instauration plus fréquente de cette praxéologie permettrait de donner plus de sens aux formules et aux propriétés introduites en première année de collège par le biais d'exemples numériques. De même, pour la PMR « modélisation », même si certaines tâches renvoient à une résolution de problèmes contextualisés se ramenant le plus souvent à des expressions numériques, celles-ci peuvent être réinvesties de manière à rompre avec une perspective d'arithmétique généralisée et de promouvoir la découverte par les élèves du modèle approprié pour sa résolution. Il est possible également pour la PMR « calcul » de dépasser le réductionnisme d'une simple exécution d'un programme de calcul pour aller vers une généralisation de propriétés sans attendre l'avènement du formalisme algébrique en première année de collège, comme le souligne Squalli (2015) « voir une expression numérique comme un objet en soi et non uniquement comme une chaîne de calcul et des manières d'opérer sur ces représentations » (p. 349). Ainsi une préparation préalable au processus d'algébrisation par le biais des activités préalgébriques comme le calcul réfléchi, le calcul en ligne, l'équivalence entre expressions numériques est susceptible, selon nous, de développer un potentiel algébrique plus important que ceux relevés dans les situations d'apprentissages proposées pour ces trois contextes institutionnels.

Références

- Adihou, A., Larguier, M. et Bronner, A. (2020). Raisonnements lors de la résolution de problèmes déconnectés : exemples prototypiques et analyse de productions d'élèves. Dans H. Squalli, I. Oliveira, A. Bronner et M. Larguier (dir.), *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires* (p. 133-161). Livres en ligne du CRIRES. <https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches>
- Bednarz, N. et Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. Dans N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (p. 115-136). Kluwer Academic Publishers.
- Bednarz, N., Kieran, C. et Lee, L. (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*. Kluwer Academic Publishers.
- Ben Nejma, S. (2004). *La mise en équations en première année de l'enseignement secondaire tunisien : transition collège/lycée* [mémoire de DEA inédit]. Université de Tunis.

Ben Nejma, S. (2009). *D'une réforme à ses effets sur les pratiques enseignantes. Une étude de cas : l'enseignement de l'algèbre dans le système scolaire tunisien* [thèse de doctorat, Université Paris VII et Université de Tunis]. TEL. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01267461>

Ben Nejma, S. (2012). Pratiques enseignantes et changements curriculaires : une étude de cas en algèbre élémentaire. Dans J.-L. Dorier et S. Coutat (dir.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^e siècle. Actes du colloque EMF2012* (p. 1133-1142). Université de Genève.

Ben Nejma, S. (2020). Exploitation de l'histoire dans une analyse didactique du développement de la pensée fonctionnelle au début de l'enseignement secondaire tunisien. *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, 1, 38-69.

Ben Nejma, S. (2021). La place de la modélisation dans l'enseignement de l'algèbre élémentaire : Pratiques institutionnelles et pratiques enseignantes dans le système éducatif tunisien. *ITM Web of Conferences*, 39, 01004. <https://doi.org/10.1051/itmconf/20213901009>

Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 77-124.

Bronner, A. et Larguier, M., (2018). Éléments d'analyse du curriculum officiel à propos de la pensée algébrique. Dans M. Abboud (dir.), *Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines. Actes du colloque EMF2018* (p. 236-245). Université de Paris.

Carraher, D. W. et Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. Dans F. Lester (dir.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 669-705). Information Age Publishing.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, 19, 43-75.

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie. Voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x*, 23, 5-38.

Chevallard, Y. (1994) Nouveaux objets, nouveaux problèmes en didactique des mathématiques. Dans M. Artigue, R. Gras, C. Laborde et P. Tavinot (dir.) *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (p. 313-320). Éditions la Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1997). Familiale et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques*, 17(3), 17-54.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude 3. Écologie & régulation. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot et R. Floris (dir.), *Actes de la 11^e école d'été de didactique des mathématiques* (p. 41-46). Éditions la Pensée sauvage.

Coulange, L., Ben Nejma, S., Constantin, C. et Lenfant-Corbin, A. (2012). Des pratiques enseignantes aux apprentissages des élèves en algèbre. Dans L. Coulange, P. Drouhard, J.-L. Dorier et A. Robert (dir.), *Enseignement de l'algèbre, Bilan et perspectives, RDM- Recherches en didactique des mathématiques-H-S* (p. 57-79). Éditions La Pensée Sauvage.

Fillooy, E. et Rojano, T. (1989). Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9, 19-25.

Gascón, J. (1995). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée ». *Petit x*, 37, 43-63.

Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, 17(2), 167-210.

Kaput, J. (1998). Representations, inscriptions, descriptions, and learning: A kaleidoscope of windows. *The journal of mathematical behavior*, 17(2), 265-281.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? Dans J. J. Kaput, D. W. Carraher et M. L. Blanton (dir.), *Algebra in the early grades* (p. 5-17). Routledge.

Kieran, C. (2007) Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: building meaning for symbols and their manipulation. Dans F. K. Lester (dir.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. (p. 707-762). Information Age.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. et Ng, S. F. (2016). Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching. Dans G. Kaiser (dir.), *ICME-13 Topical surveys*. Springer Open.

Lins, R. C. et Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. Dans H. Chick, K. Stacey et J. Vincent (dir.), *The future of the teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (p. 47-70). The University of Melbourne.

Najar, R., Squalli, H., Adihou, A. et Abouhanifa, S. (2021). Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie : Pour un état des lieux, comparaison et perspectives de l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre. *ITM Web of Conferences*, 39, 01004. <http://dx.doi.org/10.1051/itmconf/20213901004>

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards*. NCTM.

Pilet, J. et Grugeon-Allys, B., (2020) Quelles potentialités du calcul en ligne dans l'enseignement primaire en France pour favoriser une entrée précoce dans l'algèbre? Dans H. Squalli, I. Oliveira, A. Bronner et M. Larguier (dir.), *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires*. Livres en ligne du CRIRES. <https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches>

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1-19. <https://doi.org/10.1080/14794800903569741>

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26(2), 257-277. <https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2>

Radford, L. (2015). La pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation. *Actes du colloque EMF2015. Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* (p. 334-345). Université d'Alger.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. Dans C. Kieran (dir.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds. The global evolution of an emerging field of research and practice* (p. 3-26). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_1

Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque EMF2015* (p. 346-356). Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene.

Squalli, H., Mary, C. et Marchand, P. (2011). Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre : cas du Québec et de l'Ontario. Dans J. Lebeaume, A. Hasni et I. Harlé (dir.), *Recherches et expertises pour l'enseignement scientifique* (p. 65-78). De Boeck.

Squalli, H., Jeannotte, D., Koudogbo, J. et Robert, V. (2019, juillet). *Analyse du potentiel du développement de la pensée algébrique dans le programme de formation de l'école québécoise* [communication]. CIEAEM 71. Connections and understanding in mathematics education: making sense of a complex world, University of Minho, Braga, Portugal.

Squalli, H., Larguier, M., Bronner, A. et Adihou, A. (2020). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 22(1), 36-62. <https://doi.org/10.7202/1070024ar>

Vergnaud, G. (1986). A tentative conclusion. Dans C. Janvier (dir.), *Problems of representation in teaching and learning mathematics* (p. 227-232). Lawrence Erlbaum Associates.

Vergnaud, G., Cortes, A. et Favre-Artigue, P. (1988). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. Dans G. Vergnaud, G. Brousseau et M. Hulin (dir.), *Didactique et acquisition des concepts scientifiques. Actes du Colloque de Sèvres* (p. 259-279). Éditions la Pensée sauvage.

Verschaffel, L. et De Corte, E. (1996). Number and Arithmetic. Dans A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick et C. Laborde (dir.), *International Handbook of Mathematics Education* (p. 99-137). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_4

Documents officiels selon les pays

Bénin

Ministère des enseignements maternel et primaire du Bénin. (2004a). *La Mathématique au Cours Moyen Deuxième Année*. Nouvelle Presse Publications.

Ministère des enseignements maternel et primaire du Bénin. (2004b). *Programmes d'études de mathématiques au Cours Moyen Deuxième Année*. Direction de l'Enseignement Primaire.

Maroc

Ministère de l'Éducation nationale du Maroc. (2020a). *Manuel scolaire de mathématiques de Al Jaid Fi Arriyadiat, 6^e primaire*. Edition Librairie nationale.

Ministère de l'Éducation nationale du Maroc. (2020b). *Manuel scolaire de mathématiques d'Al Moufid, 1^e année du secondaire collégial*. Edition Librairie nationale

Ministère de l'Éducation nationale du Maroc. (1991). *Programmes et orientations pédagogiques de l'enseignement des mathématiques au premier et deuxième cycle de l'enseignement fondamental*. Direction de l'enseignement secondaire.

Ministère de l'Éducation nationale du Maroc. (2009). *Orientations pédagogiques du secondaire collégial*.

Ministère de l'Éducation nationale du Maroc. (2011). *Curriculum de l'enseignement primaire*.

Ministère de l'Éducation nationale du Maroc. (2020). *Curriculum de l'enseignement primaire*.

Tunisie

Ministère de l'Éducation nationale de Tunisie. (2020a). *Programmes officiels de l'enseignement primaire 2020* <http://www.education.gov.tn/?p=500&lang=fr>

Ministère de l'Éducation nationale de Tunisie. (2020b). *Mathématiques pour les élèves de 6^e année de l'enseignement de base*. Centre National Pédagogique. <http://cnp.com.tn/arabic/PDF/102609P00.pdf>

Annexe 1

Niveaux scolaires concernés par l'étude et Répartition des tranches d'âges selon les systèmes scolaires (France, Québec, Maroc, Bénin et Tunisie)

		Année terminale du primaire	Début du collège
Canada	Niveaux	6 ^e	1 ^{re} secondaire
	Âge des élèves	11-12 ans	12-13 ans
France	Niveaux	CM2	6 ^e collège
	Âge des élèves	11-12 ans	11-12 ans
Maroc	Niveaux	6 ^e	1 ^{re} secondaire collégial
	Âge des élèves	11-12 ans	12-13 ans
Bénin	Niveaux	CM2	6 ^e secondaire
	Âge des élèves	9 -11 ans	10-12 ans
Tunisie	Niveaux	6 ^e année de base	7 ^e année de base (1 ^{re} année de collège)
	Âge des élèves	11-12 ans	12-13 ans



Modélisation et praxéologies (de type) algébriques : une étude de cas

Floriane WOZNIAK

Université Toulouse 2 Jean Jaurès, EFTS

floriane.wozniak@univ-tlse2.fr

Marie-Odile CATTOËN

Université de Montpellier

Marie-Odile.Cattoen@ac-montpellier.fr

Résumé : Cet article vise à étudier les conditions d'une entrée dans l'algèbre par les problèmes de modélisation en France. Nous analysons comment trois professeurs abordent avec leurs élèves un même problème avant et après l'enseignement de l'algèbre. Deux facteurs susceptibles d'influencer leurs praxéologies sont considérés : leurs connaissances mathématiques et didactiques et le curriculum. Confirmant des travaux antérieurs (Wozniak, 2012), nous constatons que le processus de modélisation n'est pas considéré comme un objet de savoir à enseigner. En dépit de discours conformes aux programmes d'enseignement, l'enjeu algébrique n'est présent dans aucune des classes observées, comme masqué par la dimension expérimentale de la situation. Nous faisons l'hypothèse que le besoin de connaissances mathématiques et didactiques sur la modélisation et son enseignement est un déterminant plus important que les curricula eux-mêmes sur les pratiques des professeurs.

Mots-clés : Modélisation, praxéologie de type algébrique, praxéologie algébrique, travail épistémologique du professeur

Algebra as a modelling tool: a comparative study in cycles 3 and 4 in France

Abstract: This article aims to study the conditions for teaching algebra based on modelling problems in France. We analyze how three teachers approach the same modelling problem with their students before and after teaching algebra. Two factors likely to influence their praxeologies are considered: on the one hand their mathematical and didactic knowledge and on the other hand the curriculum. Confirming previous research (Wozniak, 2012), we find that the modelling process is not considered as an object of knowledge to be taught. Despite discourses in accordance with the curricula, the algebraic issue appears to be absent from any of the classes observed, perhaps obscured by the

experimental dimension of the situation. We hypothesize that the need for mathematical and didactic knowledge about modelling and its teaching is a more significant determinant of teachers' practices than the curricula themselves.

Keywords: Modelling, algebraic type praxeology, algebraic praxeology, teachers' epistemological work

Introduction

La nécessité d'introduire progressivement un enseignement de l'algèbre, comme l'intérêt d'une approche qui ne soit pas limitée à une arithmétique généralisée fait aujourd'hui consensus dans la communauté internationale (Kieran et al., 2016). En France¹, bien que les programmes ne fassent pas référence aux travaux de l'*Early Algebra*, certains éléments des praxéologies algébriques sont présents dès le cycle 3. Ainsi, un document d'accompagnement (Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, 2016) rappelle l'intérêt didactique des calculs en ligne pour une « compréhension progressive des propriétés des opérations en favorisant leur utilisation » (p. 3). Il est d'ailleurs attendu des élèves « qu'ils manipulent ces propriétés en situation et qu'ils les explicitent avec leurs mots » (p. 3). Pour la distributivité de la multiplication sur l'addition, une formulation est même suggérée : « quand on multiplie une somme de deux nombres, cela revient à multiplier chacun des termes » (p. 4). Au-delà des propriétés des opérations, les calculs en ligne doivent amener progressivement à appréhender le signe « = » comme une équivalence et non seulement comme le moyen de donner le résultat d'un calcul. Par ailleurs, ce travail de calculs en ligne « prépare les attendus du cycle 4 liés à la production d'expressions littérales et à la mise en équation de problèmes » (p. 5). C'est au cycle 4 que :

les élèves abordent les bases du calcul littéral, qu'ils mettent en œuvre pour modéliser une situation, démontrer une propriété générale et résoudre des problèmes se ramenant à des équations du premier degré. Les élèves sont progressivement familiarisés aux différents statuts de la lettre (indéterminée, variable, inconnue, paramètre) et du signe égal (pour fournir le résultat d'une opération, pour traduire l'égalité de deux représentations d'un même nombre, dans une équation, dans une identité). (Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, 2018, annexe 3, p. 34)

¹ Le cycle 1 concerne l'école maternelle (élèves de 3 à 6 ans), le cycle 2 est formé des classes de CP, CE1, CE2 (élèves de 6 à 9 ans), le cycle 3 est formé des classes de CM1 et CM2 (élèves de 9 à 11 ans) à l'école primaire et de la classe de 6^e (élèves de 11 à 12 ans) au collège. Le cycle 4 est formé des classes de 5^e, 4^e, 3^e au collège (élèves de 12 à 15 ans).

En particulier, à la fin de la classe de 5^e, l'élève

produit une expression littérale pour élaborer une formule ou traduire un programme de calcul; [...] substitue une valeur numérique à une lettre pour calculer la valeur d'une expression littérale, tester, à la main ou de façon instrumentée, si une égalité où figurent une ou deux indéterminées est vraie quand on leur attribue des valeurs numériques; contrôler son résultat. (Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, 2019a, p. 4).

En fin de 4^e, il « introduit une lettre pour désigner une valeur inconnue et met un problème en équation; il teste si un nombre est solution d'une équation; il résout algébriquement une équation du premier degré » (Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, 2019b, p. 4). Et en fin de 3^e, un élève « résout algébriquement différents types d'équations [...]; il résout des problèmes s'y ramenant, qui peuvent être internes aux mathématiques ou en lien avec d'autres disciplines » (Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, 2019c, p. 3).

Si Matheron (2018) propose un parcours d'étude et de recherche « permettant une entrée dans l'algèbre reprise en plusieurs fois, s'appuyant sur la nécessité de modéliser des programmes de calcul » (p. 70), d'autres approches sont envisageables (Bednarz et al., 1996) comme l'approche fonctionnelle ou la modélisation de situations extra-mathématiques (Squalli, 2016).

La résolution de problèmes et la démarche d'investigation sont devenues des éléments structurants des programmes scolaires sous l'impulsion des évaluations internationales comme Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) ou Programme for International Student Assessment (PISA) (Barquero et al., 2018). La modélisation y apparaît comme objet et processus d'enseignement : il ne s'agit pas seulement d'un ensemble de savoirs mathématiques à connaître pour résoudre certains types de problèmes, c'est aussi une démarche où les étapes à suivre sont aussi importantes que le résultat final à obtenir (Wozniak, 2019a). L'enseignement des mathématiques est alors abordé à travers la résolution de problèmes où la recherche d'un modèle adapté à la question posée conduit à découvrir la raison d'être des savoirs. Dans ce texte, nous considérons que toute activité conduisant à la conception d'un modèle est une activité de modélisation. Et en nous appuyant sur Chevallard (1989), nous appréhendons un modèle mathématique comme un ensemble de relations qui représentent et facilitent l'étude d'une situation grâce aux outils et aux techniques mathématiques.

En France, depuis 2015, les programmes d'enseignement des mathématiques du cycle 2 au cycle 4 déclarent contribuer au « développement de six compétences

majeures : chercher, modéliser, représenter, calculer, raisonner et communiquer » (Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, 2015, p. 45). Concernant la modélisation, la progression au fil des cycles se réalise par le recours à de nouveaux outils mathématiques et une meilleure identification du processus de modélisation, de ses différentes composantes et de ses enjeux. Or, l'introduction de la modélisation à l'école peut conduire à poser la question d'une introduction progressive de l'algèbre : « Si la modélisation algébrique relève avant tout du cycle 4 et du lycée, la résolution de problèmes permet déjà de montrer comment des notions mathématiques peuvent être des outils pertinents pour résoudre certaines situations » (Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, 2015, p. 197).

Dans le cadre des travaux de l'Observatoire international de la pensée algébrique (OIPA), nous avons montré (Wozniak, 2020) que les problèmes de généralisation pouvaient contribuer en France à une entrée progressive vers l'algèbre dès l'école primaire. Ces problèmes, déjà présents dans le curriculum de l'enseignement secondaire, s'inscrivent bien dans une continuité entre arithmétique et algèbre et semblent faciliter la transition entre praxéologies numériques et praxéologies algébriques. Dans cet article, nous poursuivons notre étude des conditions d'une entrée progressive vers l'algèbre à travers la résolution de problèmes de modélisation où l'algèbre n'apparaît pas comme une arithmétique généralisée.

En particulier, nous cherchons à déterminer :

- 1) Quels sont les besoins de connaissances mathématiques, didactiques et épistémologiques des professeurs dans ce type de problèmes?
- 2) Comment le curriculum influence-t-il les choix du professeur pour diriger l'étude de ce type de problèmes?

Notre objectif étant d'identifier comment s'opère la transition des praxéologies numériques vers les praxéologies algébriques, nous nous inscrivons dans le programme de recherches de l'*Early Algebra* (Kieran et al., 2016) en considérant l'évolution de la résolution d'un même problème de modélisation avant et après l'entrée de l'algèbre dans les programmes d'enseignement.

Dans une première partie, nous présentons notre cadre d'analyse des problèmes de modélisation. En nous appuyant sur la théorie anthropologique du didactique, nous définissons le « travail épistémologique du professeur » et proposons une caractérisation des praxéologies de type algébrique. La méthodologie est exposée dans la deuxième partie où l'analyse a priori du problème étudié montre son potentiel pour introduire l'algèbre comme outil de modélisation. La troisième partie présente les résultats de nos observations dans quatre classes de niveaux d'enseignement distincts. Nous y documentons les praxéologies des élèves afin de

nourrir notre réflexion sur ce qui fonde le travail épistémologique des professeures tel qu'il apparaît à travers leurs entretiens. La conclusion revient sur les besoins de connaissances mathématiques et didactiques des professeures observées qui se révèlent à travers les praxéologies des élèves et aborde la pertinence, dans le contexte français, d'une introduction de l'algèbre par l'étude de problèmes de modélisation.

1. Le cadre d'analyse

Nos recherches s'adossent à la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999) qui postule que toute activité humaine peut être modélisée par des praxéologies faites de types de tâches, de techniques pour accomplir ces types de tâches, de discours technologiques permettant de décrire, justifier, développer ces techniques et d'une théorie qui justifie, explique et produit les technologies. L'analyse praxéologique consiste alors à expliciter les praxéologies qui vivent dans les systèmes étudiés.

Le programme de recherches (Wozniak, 2019b) que nous suivons vise à identifier les déterminismes didactiques, c'est-à-dire pourquoi les professeurs font ce qu'ils font ou plutôt pourquoi ils sont amenés à faire ce qu'ils font. Nous étudions les conditions et les contraintes qui influent sur leurs praxéologies indépendamment de leur situation individuelle afin d'identifier les éléments exogènes à la classe qui pèsent sur les savoirs enseignés. Ce n'est pas ce qui distingue les professeurs qui est envisagé, mais ce qui les unit dans leur condition de professeurs de mathématiques, faisant nôtre le point de vue du sociologue des professions : « même si leur maîtrise se développe au fil d'histoires personnelles différentes, les savoirs et savoir-faire utilisés par les membres d'une même profession comportent une part commune bien supérieure à ce qui les différencie » (Champy, 2012, p. 76).

Notre but est d'identifier ce qui fonde le *travail épistémologique du professeur*, c'est-à-dire

l'ensemble des praxéologies qui contiennent, y compris de façon naïve ou spontanée, une part d'étude des processus de production, de formation, de développement, de transformation, d'organisation et de transmission des objets mathématiques ou une part de caractérisation de la nature de l'activité mathématique elle-même et de ses objets. (Wozniak, 2019b, p. 25)

Le travail épistémologique du professeur met en œuvre des praxéologies mathématiques et didactiques articulées par l'épistémologie du professeur (voir figure 1) qui est « une théorie – implicite ou explicite – des savoirs et connaissances à enseigner et une théorie de l'apprentissage de ces savoirs et connaissances au sein d'une institution donnée, à une époque donnée » (Wozniak, 2019b, p. 16).

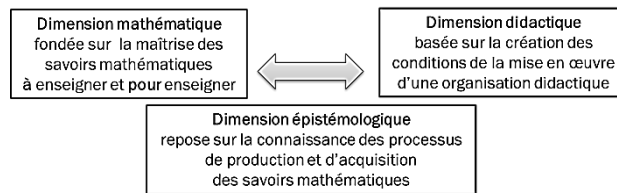


Figure 1. Les trois dimensions du travail épistémologique du professeur (Wozniak, 2019b, p. 23)

Dans cet article, la question Q1 vise à identifier les besoins associés à chacune des trois dimensions du travail épistémologique du professeur, tandis que la question Q2 porte sur les conditions de réalisation de ce travail, en particulier l'influence du curriculum, selon le niveau d'enseignement. C'est ainsi que nous avons proposé à trois professeures de niveaux d'enseignement différents un même problème de modélisation. L'observation naturaliste – c'est-à-dire sans intervention ni indication sur la façon de conduire l'étude – a été complétée par des entretiens avant et après les séances d'enseignement de façon à recueillir le discours des professeures sur ce qui fonde leur travail épistémologique. S'agissant d'une étude portant sur la résolution d'un problème où l'algèbre peut être un outil de modélisation, nous sommes amenées à expliciter notre modèle du processus de modélisation et à définir les praxéologies algébriques comme critères d'analyse.

1.1. Caractériser le processus de modélisation

L'explicitation de la compétence « *modéliser* » dans les programmes actuels en France fait référence aux problèmes issus de « situations de la vie quotidienne », c'est-à-dire aux problèmes avec énoncé où la situation évoquée est extra-mathématique. L'enseignement de ces types de problèmes fait l'objet de multiples recherches sur le plan international (Blum et al., 2007). Le plus souvent, le processus de modélisation est représenté sous la forme d'une schématisation cyclique (Perrenet et Zwaneveld, 2012), par exemple dans la figure 2 avec le schéma proposé par Blum et Borromeo Ferri (2009) couramment utilisé par les concepteurs des évaluations internationales PISA (Programme for International Student Assessment, 2006).

Pour illustrer ce processus, les auteurs proposent plusieurs exemples, dont celui du phare « Roter Sand » à Bremen qui mesure 30,7 m de haut et dont la balise avertit les navires approchant de la côte. Il s'agit de déterminer la distance approximative de la côte à laquelle se trouve un navire lorsqu'il voit la lumière du phare pour la première fois.

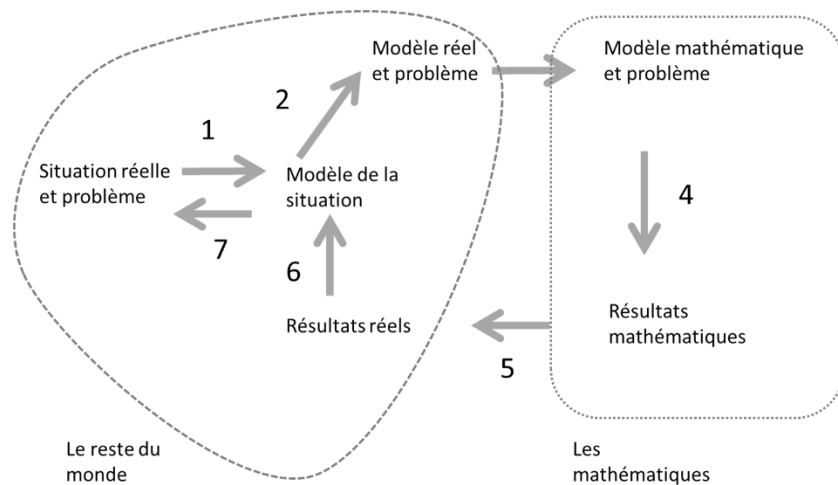


Figure 2. Cycle de modélisation d'après Blum et Borromeo Ferri (2009, p. 46).

La première étape du cycle de modélisation (1) passe par une représentation de la situation : la mer à la surface de la Terre, la lumière du phare, le bateau. Le tri fait dans les informations – les noms du phare et du lieu où il se trouve n'ont pas d'effet sur la distance à la côte – permet une simplification du modèle de la situation (2) : la Terre est une sphère, le navire est un point, la lumière du phare sur le navire forme une tangente à la sphère Terre. La mathématisation conduit alors à un modèle mathématique (3) qui n'est autre qu'un triangle rectangle TPN rectangle en N où T est le centre de la Terre, P le sommet du phare et N le navire. Le travail mathématique (4) intègre la hauteur du phare $H \approx 30,7$ m, le rayon de la Terre estimé par $R \approx 6\,370$ km et s'appuie sur l'utilisation du théorème de Pythagore². Il permet de déterminer une distance approchée de 20 km. L'interprétation de ce résultat mathématique (5) fournit une réponse au problème initial qui doit maintenant être validée (6) en posant des questions sur le résultat lui-même ou ses conditions d'obtention : Est-ce un résultat cohérent? Les hypothèses sont-elles correctement fondées? Les réponses à ces questions pourraient conduire éventuellement à entreprendre un nouveau cycle en modifiant une ou plusieurs étapes pour se conclure par la donnée de la solution au problème (7).

Les problèmes associés à une situation réelle ne sont pas les seuls types de problèmes qui requièrent une activité de modélisation. Ainsi, une équation algébrique est un modèle mathématique d'une courbe tracée sur le papier, de sorte que pour déterminer si deux courbes sont sécantes, il suffit de chercher les racines communes aux équations associées. C'est pour cette raison que Chevallard (1989)

² On a : $CP = R + H$, $CN = R$ et $CP^2 = CN^2 + NP^2$. La valeur cherchée étant NP, la distance de N à P.

propose de décrire le processus de modélisation sans le restreindre aux cas où une situation extra-mathématique est à l'origine du processus. Sa description du processus de modélisation est plus synthétique que celle de Blum et Borromeo Ferri (2009). C'est celle que nous adopterons ici dans la mesure où notre accent est mis sur les praxéologies algébriques plutôt que sur les praxéologies de modélisation. Pour Chevallard, la première étape est la définition du système étudié qui peut être une situation extra-mathématique ou mathématique. Elle passe par la détermination des éléments pertinents pour l'étude et correspond aux étapes 1 et 2 de la figure 2. La deuxième étape est la construction du modèle pour étudier le système, c'est-à-dire la mise en relation des différentes variables identifiées à l'étape précédente (étape 3, figure 2). La troisième étape est celle du travail mathématique dans le modèle (étape 4, figure 2). Ces trois étapes sont évidemment en interaction. Un travail mathématique dans le modèle peut conduire à réévaluer la pertinence des éléments choisis et ainsi à modifier le système étudié puis le modèle initial. Le cycle se termine lorsque la solution mathématique construite est validée comme réponse au problème posé (étapes 5, 6, 7, figure 2).

Des mots, des notations, des ostensifs sont requis pour qu'une classe se dise à elle-même les savoirs qu'elle vient de construire collectivement et qui intégreront une culture partagée via le processus d'institutionnalisation. C'est pourquoi, nous caractériserons les praxéologies de modélisation selon l'existence ou la nature du discours technologique développé³ autour du processus de modélisation : elles seront considérées comme muettes lorsque la définition du système est absente et où seul le travail sur un modèle sera visible; nous parlerons de praxéologies faibles lorsque la construction du modèle sera décrite à partir de l'identification du système modélisé, mais non justifiée, et de praxéologies fortes lorsque les trois étapes du processus de modélisation identifiées par Chevallard seront clairement explicitées.

Considérant un problème où l'algèbre peut être un outil de modélisation, il nous faut caractériser les praxéologies mises en œuvre en référence au recours aux techniques ou aux technologiques algébriques.

³ « Nous considérons qu'une praxéologie est muette lorsqu'elle se donne à voir uniquement au travers de sa composante praxis; seule la technique mise en œuvre dans un rapport d'action est perceptible alors que la composante logos n'est pas audible, à moins qu'elle ne soit simplement tue. Une praxéologie faible laisse entrevoir la composante logos au travers des ostensifs associés à la technique mise en œuvre; le discours technologique reste implicite ou limité à la seule description de la technique dans un rapport de formulation non encore abouti. Enfin, une praxéologie forte met en œuvre dialectiquement les deux composantes praxis et logos dans des rapports d'action, de formulation et de validation » (Wozniak, 2012, p. 38-39).

1.2. Des praxéologies numériques aux praxéologies (de type) algébriques

Les praxéologies numériques sont mises en œuvre dans les problèmes arithmétiques. Les calculs sont réalisés avec des nombres connus, il n'y a pas de recherche d'une généralisation. Les praxéologies algébriques sont mises en œuvre dans des problèmes avec inconnue(s) ou qui nécessitent une généralisation, par exemple à travers l'élaboration d'un programme de calcul, l'établissement d'une formule ou l'identification d'une relation fonctionnelle. Nous faisons l'hypothèse d'un continuum entre praxéologies numériques et algébriques. L'objet de cette section est de caractériser ce que nous appelons des praxéologies de *type* algébrique.

Une synthèse des travaux issus du programme de recherches *Early Algebra* rend compte de la diversité des points de vue quant aux éléments caractérisant les praxéologies algébriques :

Blanton et al. (2011) soutiennent que la structure mathématique et les relations sont au cœur de la pratique de l'early algebra. Pour Britt et Irwin (2011), les débuts de la pensée algébrique impliquent d'utiliser des nombres et des mots pour exprimer des transformations arithmétiques en termes généraux. Carraher et Schliemann (2015) caractérisent l'early algebra en termes de formes de raisonnement de base qui expriment des relations entre nombres ou quantités, en particulier des relations fonctionnelles. Dans ces études et d'autres, les relations mathématiques, les modèles et les structures arithmétiques sont considérés comme étant au cœur de la pensée algébrique primitive. (Kieran et al., 2016, p. 10, traduction libre⁴)

Pour définir les critères épistémologiques qui fondent des praxéologies algébriques, nous nous appuyons sur Radford (2014) qui identifie trois conditions permettant de reconnaître l'expression d'une « pensée algébrique » :

- Le traitement d'une ou de plusieurs valeurs inconnues (critère d'indétermination);
- La production d'ostensifs (des gestes, mots, schémas, symboles, etc.) associés aux valeurs indéterminées (critère de dénotation);
- Le traitement des valeurs indéterminées comme si elles étaient des valeurs connues (critère d'analyticité).

⁴ Blanton et al. (2011) argue that mathematical structure and relationships are central to the practice of early algebra. For Britt and Irwin (2011), early algebraic thinking involves coming to use numbers and words to express arithmetic transformations in general terms. Carraher and Schliemann (2015) characterize early algebraic thinking in terms of basic forms of reasoning that express relations among number or quantities, in particular, functional relations. In these studies and others, mathematical relations, patterns, and arithmetical structures are deemed to be at the heart of early algebraic thinking.

À l’instar de Squalli et al. (2020) qui s’appuient sur le développement historique de l’algèbre, nous faisons du critère d’analyticité le marqueur des praxéologies de nature algébrique : « Le développement du raisonnement analytique est donc au cœur du développement de la pensée algébrique dans le contexte de la résolution de problèmes se ramenant à la recherche de valeurs d’inconnues » (p. 39). Ces auteurs proposent une grille d’analyse fondée sur le degré d’analyticité (raisonnement analytique, à tendance analytique et non analytique) et le registre de représentation sémiotique des inconnues, des relations et des équations (numérique, intermédiaire, algébrique conventionnel) pour les problèmes de partage inéquitable. Nous ne reprenons pas cette grille qu’il faudrait adapter à la spécificité du problème considéré ici, notre ambition étant de caractériser les praxéologies de type algébrique indépendamment du type de problèmes concerné.

Les problèmes de généralisation de suites figurées sont un autre type de problème de modélisation. Abordant « la généralisation mathématique comme [un] processus sémiotique » Radford (2004) étudie les « moyens sémiotiques d’objectivation » (p. 21) – c’est-à-dire la valence sémiotique des ostensifs au sens de Bosch et Chevillard (1999) – afin de caractériser les praxéologies de généralisation. Il identifie trois niveaux de généralisation : factuelle, le schème opérationnel de la généralisation reste confiné au niveau numérique, les moyens sémiotiques d’objectivation sont constitués de déictiques spatiaux, de gestes, de rythme et de mouvement; contextuelle, le schème de l’objet général est constitué d’arguments langagiers qui portent en eux les caractéristiques conceptuelles de la situation spatio-temporelle dont ils ont issus; algébrique, l’objet général est exprimé sous forme symbolique, il est une contraction sémiotique forçant le détachement de l’activité passée et la perte de l’origo mieux exprimé par les moyens sémiotiques des précédents niveaux.

Pour Squalli (2016), ces trois niveaux de généralisation témoignent d’une « pensée algébrique ». De notre côté, nous avons observé dans Wozniak (2020) que des élèves peuvent généraliser un processus en utilisant le même programme de calcul quelles que soient les valeurs numériques données sans produire d’ostensifs associés aux valeurs indéterminées. Il s’agit d’un exemple de généralisation factuelle puisqu’elle « consiste en une généralisation des actions numériques sous la forme d’un schème numérique » (Radford, 2003, p. 65, traduction libre⁵). Or, le recours aux nombres ne signe pas, *ex nihilo*, l’entrée dans un processus de

⁵ « consists of a generalization of numerical actions in the form of a numerical scheme » (Radford, 2003, p. 65).

généralisation. Avec Squalli (2020), nous considérons que le caractère algébrique des praxéologies mathématiques

ne réside pas dans la nature des ostensifs, au sens de Bosch et Chevallard (1999), soit dans la présence de signes alphanumériques. Il réside plutôt dans la nature des non ostensifs, soit dans les significations des concepts ainsi que dans la nature des raisonnements impliqués. (p. 11)

Nous tirons de ces travaux qui portent sur des problèmes de types différents, les éléments qui caractérisent les praxéologies de type algébrique : les techniques sont numériques, mais les technologies qui les justifient relèvent de l'algèbre. Les cas particuliers ne sont plus envisagés comme des singularités mais comme des cas génériques qui permettent d'envisager d'autres possibles. Ainsi, les praxéologies de type algébrique remplissent les critères d'indétermination et d'analyticité, mais pas nécessairement de dénotation, c'est-à-dire qu'il n'existe pas nécessairement d'ostensif qui représente l'indéterminée (comme dans l'exemple évoqué ci-dessus dans Wozniak, 2020). Si les praxéologies de type algébrique relèvent d'une algèbre avant la lettre, elles peuvent aussi exister après l'introduction de l'algèbre, comme nous le verrons plus loin dans ce texte. Les généralisations factuelles et contextuelles au sens de Radford (2003) mettent en œuvre des praxéologies de type algébrique, tandis qu'une généralisation symbolique relève de praxéologies algébriques.

Les critères d'indétermination, de dénotation et d'analyticité ainsi que les types de généralisation, lorsqu'ils sont pertinents en fonction du problème étudié, constituent ainsi nos points d'appui pour caractériser les praxéologies selon un continuum : numérique (où indéterminée et généralisation sont absentes), de type algébrique, algébrique.

Les questions auxquelles nous cherchons à répondre sont : Quelles seront effectivement les praxéologies développées pour résoudre un problème de modélisation? Quels sont les effets du curriculum sur ces praxéologies? Quels sont les choix des professeurs concernant l'opportunité d'une généralisation et l'accompagnement vers des praxéologies de types algébriques ou algébriques?

2. Méthodologie

Lorsqu'on considère simultanément les connaissances disciplinaires, didactiques ou épistémologiques relatives à l'enseignement d'un objet de savoir (*Os*) des professeurs et sa place dans le curriculum, quatre cas de figures peuvent se produire (voir tableau 1).

Tableau 1 : cas d'enseignement d'un objet de savoir.

	Connaissances relatives à l'enseignement d'un Os non actives	Connaissances relatives à l'enseignement d'un Os actives
Os hors du curriculum	(1)	(2)
Os dans le curriculum	(4)	(3)

En prenant l'algèbre pour exemple, nous pouvons illustrer ces différents cas :

- 1) enseignement dans une classe de CM2 – dernière année d'école primaire où l'algèbre n'est pas au programme – par un professeur non spécialiste des mathématiques dont les connaissances en algèbre peuvent ne pas être actives car par exemple, trop anciennes;
- 2) enseignement dans une classe de 6^e ou 5^e – premières années du collège où l'algèbre n'est pas au programme – par un professeur de mathématiques qui peut avoir à l'enseigner dans les niveaux supérieurs et dont les connaissances en algèbre sont actives;
- 3) enseignement en 4^e ou en 3^e – dernières années du collège où l'algèbre est au programme – par un professeur de mathématiques dont les connaissances relatives à l'enseignement de l'algèbre sont actives;
- 4) ce cas ne devrait pas exister dans les conditions normales de l'enseignement de l'algèbre. Il se produit lorsqu'un nouvel objet de savoir est introduit dans le curriculum et que les professeurs ne l'ont pas étudié dans leur propre cursus, comme récemment en France avec le langage Python.

Pour déterminer l'influence éventuelle du curriculum sur les praxéologies des professeurs, nous avons considéré la façon dont un même problème est étudié avant et après l'entrée de l'algèbre dans les programmes d'enseignement en choisissant trois professeurs correspondant à chacun des cas (1), (2), (3). Pour que des comparaisons soient possibles, il fallait trouver un problème pouvant être étudié aussi bien aux cycles 3 et 4. Nous présentons maintenant l'analyse a priori de ce problème.

2.1. Analyse a priori du problème de modélisation

Nous avons proposé aux professeurs la construction de boîtes par pliage pour trois raisons. D'abord, il s'agit d'une situation ayant été expérimentée en fin d'école primaire (Chappaz et Michon, 2003) qui repose sur l'étude des relations entre les dimensions d'une feuille et celles de la boîte obtenue par pliage. Ensuite, le recours au calcul algébrique n'est pas indispensable, car les questions sont posées pour des valeurs particulières. Des considérations géométriques et des techniques

numériques suffisent. Cette situation peut donc être abordée dès l'école primaire et permet d'observer dans quelle mesure les professeurs saisissent l'opportunité de l'étude de ce problème pour se donner un enjeu de généralisation, voire recourir à l'algèbre. Enfin, cette situation est utilisée en formation de professeurs (Barquero et al., 2019) et le choix des valeurs des variables didactiques a ainsi été plusieurs fois éprouvé. Nous avons repris les différentes questions de la situation initiale, mais modifié la notice d'instructions afin de limiter les informations apportées (voir annexe 1). Nous l'avons renommée « Mission construction » pour le cas où les professeurs feraient des recherches sur Internet.

2.1.1. Les relations entre les dimensions de la feuille et de la boîte

En suivant les instructions de pliage, il est possible de construire deux boîtes. La figure 3 illustre à partir d'une feuille A4 le pliage *Pla* où les plis sont parallèles à la largeur (comme dans la notice) et le pliage *PLo* où les plis sont parallèles à la longueur de la feuille.

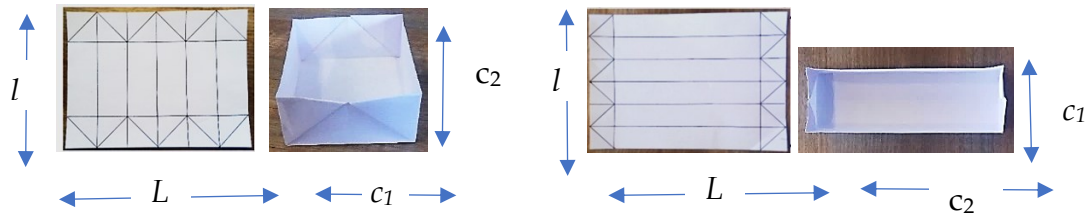


Figure 3. Pliages *Pla* (à gauche) et *PLo* (à droite) d'une feuille A4

Les relations qui lient les dimensions de la feuille initiale (notées l et L) et les dimensions du fond de la boîte (notées c_1 et c_2) sont :

Pour le pliage *Pla*, $c_1 + c_2 = l$ avec $c_1 = \frac{L}{3}$ et $c_2 = l - \frac{L}{3}$.

Pour le pliage *PLo*, $c_1 + c_2 = L$ avec $c_1 = \frac{l}{3}$ et $c_2 = L - \frac{l}{3}$.

Dans le cas d'une feuille carrée ($l = L$), les pliages *Pla* et *PLo* se confondent et on obtient une seule boîte : $c_1 = \frac{L}{3} = \frac{l}{3}$ et $c_2 = \frac{2L}{3} = \frac{2l}{3}$.

Contrairement à la figure 3, les longueurs des côtés l et L ne sont pas toujours, respectivement, la largeur et la longueur de la feuille. Par exemple, pour construire une boîte à fond rectangulaire $8 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$, le pliage *Pla* donne $l = 5 \text{ cm} + 8 \text{ cm} = 13 \text{ cm}$ et $L = 3 \times 8 \text{ cm} = 24 \text{ cm}$ tandis que le pliage *PLo* donne $L = 5 \text{ cm} + 8 \text{ cm} = 13 \text{ cm}$ et $l = 3 \times 5 \text{ cm} = 15 \text{ cm}$.

2.1.2. La dynamique des questions

L'étude dans Chappaz et Michon (2003) est réalisée autour de cinq grandes questions que nous reprenons ici en explicitant leur fonction didactique.

La première question – construire une boîte à partir de la notice fournie – permet de comprendre le pliage et le processus de construction. À ce stade, les élèves ne se posent pas de questions sur les liens entre les dimensions de la feuille de départ et celles de la boîte obtenue. Aucune contrainte n'étant imposée, le type de pliage (*Pla* ou *PLo*) fournit potentiellement deux boîtes de formes différentes, mais suivant la conduite de la séance, les élèves peuvent ne pas le percevoir.

La deuxième question – construire une boîte à fond carré de dimensions données – permet la dévolution du problème en perturbant le modèle spontané des élèves qui lie les formes de la feuille et de la boîte. Constatant qu'une feuille carrée ne produit pas une boîte à fond carré, ceux-ci analysent alors les plis pour déterminer le lien entre les dimensions de la feuille et de la boîte. Le fait qu'il n'y ait qu'une solution (3c, 2c) facilite l'entrée dans le problème.

La troisième question – construire une boîte à fond rectangulaire de dimensions données – a deux solutions (voir plus haut) et conduit vers la conception d'un modèle liant les dimensions feuille/boîte rectangulaire.

La quatrième question – prévoir les dimensions des boîtes connaissant les dimensions de la feuille – permet d'éprouver la fiabilité du modèle élaboré précédemment. Le pliage à ce moment-là change de statut. Il n'est plus l'objet d'expérimentations par les élèves pour concevoir le modèle, il sert à valider les réponses anticipées à partir du modèle.

La dernière question – *déterminer la possibilité de construire des boîtes de dimensions données* – permet d'enrichir le modèle en intégrant la dimension de la hauteur de la boîte. L'argumentation attendue conduit à expliciter le modèle et appelle une généralisation.

Une analyse du processus de modélisation selon le modèle de Chevallard (1989) permet d'identifier que le modèle mathématique conçu pour répondre à une question devient un élément du système de la question suivante de sorte que les modèles successivement construits complètent les précédents. Pour répondre à la deuxième question (boîte à fond carré), un modèle mathématique est élaboré qui lie les dimensions d'une feuille et les dimensions d'une boîte à fond carrée à partir d'un système fait des feuilles de papier fournies, de la technique de pliage et des boîtes fabriquées. Ce premier modèle – qui pourrait être assez peu mathématisé – sera intégré de facto au système à étudier pour répondre à la troisième question (boîte à fond rectangulaire). Un nouveau modèle est alors conçu sur la base de ce nouveau système, modèle qui viendra enrichir le système associé à la quatrième question, etc.

2.1.3. Les techniques de résolution

Deux types de tâches sont ainsi travaillés (T1 et T2) pour lesquels nous envisageons à présent les techniques τ qui permettent de les accomplir ainsi que les modèles de la situation θ qui les justifient.

Pour accomplir le type de tâches T1 – Déterminer les dimensions de la feuille pour construire une boîte de dimensions données – quatre techniques valides sont envisageables. Elles sont présentées dans le tableau 2 avec les discours technologiques qui les justifient et décrites en détail dans l'annexe 2.

Tableau 2 : techniques valides pour accomplir T1.

$\tau_{\text{ajustement}}$: Ajuster les dimensions de la feuille (par découpage) jusqu'à obtention par pliage des dimensions de la boîte demandées.	$\theta_{\text{dimensions liées}}$: Les dimensions de la feuille et de la boîte sont liées : diminuer une dimension de la feuille, c'est diminuer une dimension de la boîte.
τ_{mesure} : Mesurer les dimensions de la feuille après avoir dessiné le fond de la boîte aux dimensions voulues puis les plis associés à sa construction.	θ_{plis} : la reproduction des plis permet la reproduction de la boîte. Pour τ_{mesure} il y a mesure sur un dessin.
τ_{calcul} : Calculer les dimensions de la feuille à partir du repérage du lien entre les plis de construction et les dimensions de la boîte.	Pour τ_{calcul} un schéma des plis peut servir d'appui pour représenter la relation entre dimensions : les plis sont toujours disposés de la même façon. Ils forment 6 bandes dont les 2 du milieu constituent le fond de la boîte et il y a une bande au-dessus et au-dessous du fond de la boîte qui représente les bords de la boîte (voir figure 3).
τ_{relation} : Établir les relations entre les dimensions du fond de la boîte et les dimensions de la feuille	Pour τ_{relation} il n'est plus nécessaire de coder les mesures de longueur sur un schéma pour effectuer les calculs : une dimension de la feuille est le triple d'une dimension du fond de boîte, l'autre dimension de la feuille est la somme des dimensions du fond de la boîte.

Les techniques $\tau_{\text{ajustement}}$ et τ_{mesure} relèvent d'une théorie empiriste où le problème étant un objet à fabriquer, la solution passe par la manipulation ou la mesure de celui-ci. La généralisation est absente. La technique τ_{calcul} relève d'une théorie arithmético-géométrique portée par une lecture des plis sur la feuille dépliée ou un schéma et validée par les propriétés géométriques. Elle repose donc sur une généralisation des relations entre les plis et signe une praxéologie de type algébrique. La technique τ_{relation} relève d'une théorie algébrique-géométrique fondée sur la généralisation des relations explicitement établies entre les dimensions

validées par les propriétés géométriques. Si les dimensions sont dénotées en lien avec les grandeurs de la feuille ou de la boîte, nous classons cette technique parmi les praxéologies de type algébrique. En revanche, si les dénominations se détachent des grandeurs et du contexte, nous considérerons qu'elle relève de praxéologies algébriques.

Trois techniques non valides sont aussi envisageables. Deux d'entre elles se fondent sur l'idée que les formes de la feuille et du fond de la boîte sont identiques. La technique $\tau_{\text{carré}}$ consiste à tenter de construire une boîte à fond carré à partir d'une feuille carrée. Avec une feuille A4 et le pliage de type *Pla*, une des dimensions du fond de boîte mesure 10 cm environ, la technique $\tau_{\text{demi-feuille}}$ utilise une feuille A5 (demi-feuille A4) pour obtenir une boîte dont une des dimensions du fond est 5 cm. La troisième technique erronée $\tau_{\text{découpage-écart}}$ se fonde sur l'idée que les dimensions de la feuille et de la boîte évoluent avec un même écart. Une boîte étant construite, la feuille est découpée de l'écart calculé entre les dimensions de la boîte construite et les dimensions à obtenir⁶. Une fois constaté que la technique est erronée, elle peut évoluer vers la technique $\tau_{\text{ajustement}}$ à laquelle elle est apparentée.

Pour accomplir le type de tâches T2 – Déterminer, sans la construire, les dimensions du fond des boîtes obtenues à partir d'une feuille de dimensions données – quatre techniques valides sont envisageables (voir tableau 3) qui sont des adaptations de techniques utilisées pour accomplir le type de tâches T1.

Tableau 3. Techniques valides pour accomplir T2.

τ_{mesure^*} : Mesurer les dimensions du fond de la boîte en dessinant les plis sur la feuille de dimensions données.	θ_{plis} : la reproduction des plis permet la reproduction de la boîte
τ_{calcul^*} : Calculer les dimensions de la boîte à partir du schéma d'une boîte dépliée.	Les plis sont toujours disposés de la même façon. Ils forment 6 bandes dont les 2 du milieu constituent le fond de la boîte et il y a une bande au-dessus et au-dessous du fond de la boîte (voir figure 3).
τ_{relation^*} : Établir les relations entre les dimensions de la feuille et les dimensions du fond de la boîte.	
$\tau_{\text{relation-inverse}^*}$: Reprendre les relations obtenues avec la technique τ_{relation} et les « retourner ».	

⁶ Cette technique peut permettre de trouver approximativement les dimensions requises pour construire une boîte à fond carré de 10 cm de longueur de côté. En effet, une feuille A4 (dimensions 21 cm par 29,7 cm) permet de construire une boîte à fond rectangulaire de dimensions 10 cm par 11 cm environ. En réduisant de 1 cm la largeur de la feuille, on obtient une feuille mesurant environ 30 cm par 20 cm et une boîte apparemment à fond carré.

Nous classons les techniques τ_{mesure^*} , τ_{calcul^*} , τ_{relation^*} comme les techniques τ_{mesure} , τ_{calcul} et τ_{relation} auxquelles elles sont associées : τ_{mesure^*} relève d'une praxéologie numérique, τ_{calcul^*} d'une praxéologie de type algébrique et τ_{relation^*} d'une praxéologie de type algébrique ou algébrique selon la dénotation des dimensions. Enfin, la technique $\tau_{\text{relation-inverse}^*}$ s'inscrit dans une praxéologie algébrique.

2.2. Les observations

Les observations (Cattoën, 2020) se sont déroulées dans une école et un collège de la même ville de 6 500 habitants située en contexte plutôt rural. Les trois professeures sont nommées P1, P2 et P3 dans la suite et correspondent respectivement aux cas 1, 2 et 3 du tableau 1. Ces professeures ont été choisies par opportunité afin que les trois cas précédents soient représentés : P2 et P3 sont dans le même établissement que l'une d'entre nous et P1 est dans une école à côté et nous nous sommes assurées qu'elle n'avait pas fait un cursus universitaire scientifique.

P1 intervient en CM2, enseigne depuis deux ans au moment des observations et a fait des études en sciences humaines⁷ (Terminale littéraire, licence d'histoire et master d'enseignement). P2 enseigne en classe de 6^e, a 20 ans d'ancienneté et détient une licence de mathématiques⁸. P3 qui est chargée des classes de 4^e et 3^e a 10 ans d'ancienneté, une licence de mathématiques-informatique et une première année de master en ingénierie mathématique⁹.

Une fois obtenu l'accord des trois professeures, les documents en annexe 1 ont été adressés par messagerie en précisant :

La situation que nous vous proposons de mettre en place avec vos élèves peut être organisée comme vous le souhaitez :

- aucune contrainte d'organisation de la classe (en groupe, en binôme ou individuel);
- aucune contrainte d'organisation de l'étude (étude en une séance ou plusieurs, d'une durée libre);
- aucune contrainte quant à l'utilisation de matériel autre que des feuilles pour construire les boîtes.

Vous avez une complète liberté d'adapter cette situation en fonction de vos élèves. Les élèves sont des ingénieurs d'une usine qui fabrique des boîtes selon un procédé par pliage décrit dans la notice ci-jointe. Le but de l'activité est d'étudier comment construire des boîtes en respectant différentes contraintes.

⁷ Au Québec, cela correspondrait à un diplôme d'études collégiales avec une valence littéraire, un baccalauréat en histoire et une maîtrise d'enseignement pour l'école primaire.

⁸ Au Québec, cela correspondrait à un baccalauréat en mathématiques.

⁹ Au Québec, cela correspondrait à un baccalauréat en mathématiques et une première année de maîtrise en ingénierie mathématique.

Les moments d'observation, choisis par les professeures, ont été complétés par des entretiens.

2.3. Les entretiens

Nous avons conduit des entretiens semi-dirigés avant et après les séances d'enseignement de façon à faire expliciter par les professeures les savoirs en jeu.

L'entretien avant l'observation a pour objectif de faire exprimer aux professeures les enjeux qu'elles identifient et la façon dont elles s'approprient le problème. L'entretien après l'observation vise à faire expliciter leur rapport personnel à l'algèbre ou à la modélisation et, notamment, pour les professeures du secondaire, le lien qu'elles perçoivent entre le problème et une introduction potentielle à l'enseignement de l'algèbre. Au cours de ces entretiens, elles ont évalué de 0 à 3 le niveau de travail des six compétences structurant le programme de mathématiques : chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer, ceci afin que les professeures situent ce problème dans les attentes institutionnelles et qu'on puisse objectiver une éventuelle évolution de leurs rapports personnels à ces compétences du fait de l'expérimentation.

Les observations et entretiens ont été réalisés entre avril et juin 2019. Le corpus est constitué de trois types de données : les films des séances selon un point fixe au fond de la classe, caméra dirigée vers le tableau lors des temps collectifs ou vers certains élèves durant les phases de recherche; les enregistrements sonores de la professeure qui portait sur elle un microphore; des photos de productions d'élèves.

3. Résultats

La place nous manque pour présenter dans le détail les séances observées du point de vue des élèves et des professeures. Aussi, dans un premier temps, nous présentons le contenu des séances observées et les techniques mises en œuvre par les élèves en les considérant comme l'effet des pratiques de ces professeures. Dans un second temps, nous évoquerons les entretiens qui explicitent leur rapport à la modélisation et à l'algèbre. La confrontation des praxéologies des élèves avec les discours des professeurs permet de comprendre comment les praxéologies des élèves sont révélatrices des fondements du travail épistémologique des professeures.

3.1. Les séances observées

Le tableau 4 présente l'objectif déclaré des professeures, la durée d'étude et les questions travaillées parmi les suivantes :

Q1. Construire une boîte à partir de la notice fournie.

- Q2. a) Construire une boîte à fond carré.
 b) Quelles doivent être les dimensions de la feuille pour obtenir une boîte avec un fond carré de côté 7 cm?
 [réponse : $l = 14$ cm, $L = 21$ cm]
- Q3. a) Construire une boîte à fond rectangulaire.
 b) Quelles doivent être les dimensions de la feuille pour obtenir une boîte avec un fond rectangulaire de 5 cm par 8 cm?
 [réponse : $l = 13$ cm et $L = 15$ cm ou $l = 13$ cm et $L = 24$ cm]
- Q4. Sans les construire, prévoir les dimensions des boîtes obtenues avec des feuilles rectangulaires de 18 cm par 24 cm.
 [réponse : boîte 8 cm par 10 cm avec *Pla* et boîte 6 cm par 18 cm avec *PLo*].

Tableau 4. Les séances observées et les questions traitées.

	P1 - CM2	P2 - 6 ^e	P3 - 4 ^e	P3 - 3 ^e
	26 élèves	25 élèves	25 élèves	10 élèves ¹⁰
Objectif déclaré	Attitude de recherche	Réinvestir les connaissances géométriques	Trouver les relations entre les dimensions (sans formalisme algébrique)	
Durée des séances	1 séance de 2 h 45 en classe entière : les élèves ont travaillé durant toute une matinée sur ce problème	1 séance de 1 h 50 min en classe entière + 1 séance de 55 min en demi-classe	1 séance en classe entière de 55 min	1 séance de 55 min avec tous les élèves
Ordre des questions traitées	Q1 - Q3b - Q2b	Q1 - Q2a et Q2b - Q3b	Q1 - Q2b - Q3b (un groupe)	Q1- Q2b - Q3b (un groupe) - Q4 (un groupe)

Dans toutes les classes, seules des feuilles de format A4 ont été distribuées et il n'y a pas eu de production d'une trace écrite collective. P1, dans la classe de CM2, a choisi d'inverser les questions Q2 et Q3 en considérant que la relation (2c, 3c) dans le cas d'une boîte à fond carré pouvait inciter les élèves à la réinvestir avec une boîte à fond rectangulaire et les mettre en difficultés. Pour étudier les questions, Q1, Q2 et Q3, les classes de CM2 et 6^e ont travaillé durant 165 min et les classes de 4^e et 3^e durant 55 min. Un groupe d'élèves de la classe de 3^e a aussi eu le temps d'aborder la quatrième question. Dans les classes de 4^e et 3^e observées, il a fallu trois fois moins de temps pour travailler les trois questions. Ceci peut s'expliquer par la différence de posture de P1 et P2 qui ont laissé beaucoup de temps aux

¹⁰ Les autres élèves de la classe étaient en voyage pédagogique.

élèves pour comprendre la notice : 60 min en CM2 et 45 min en 6^e alors que P3 a guidé les élèves pour ne pas s’y attarder.

Le tableau 5 présente les techniques mises en œuvre par au moins un élève à chacune des questions.

Tableau 5 – synthèse des techniques utilisées

	CM2	6 ^e	4 ^e	3 ^e
$\tau_{\text{carré}}$ (erronée)	Q3b - Q2b	Q2b	Q2b	Q2b
$\tau_{\text{demi-feuille}}$ (erronée)	Q3b			
$\tau_{\text{découpage-écart}}$ (erronée)		Q2b		
$\tau_{\text{ajustement}}$	Q3b	Q2b- Q3b	Q2b	Q2b
τ_{mesure}	Q3b (amorcée et abandonnée par un binôme)			Q2b (proposée par un élève dans un groupe mais non retenue)
τ_{calcul}	Q3b- Q2b	Q2b- Q3b	Q2b	Q2b
τ_{relation}		Q2b (travail à la maison avec aide extérieure)	Q2b (un élève), Q3b (un élève, application relation boîte carrée)	Q2b (un groupe), Q3b (un groupe)
τ_{relation} *				Q4 (un groupe)

Trois techniques apparaissent dans toutes les classes : $\tau_{\text{carré}}$, $\tau_{\text{ajustement}}$, τ_{calcul} . La technique erronée $\tau_{\text{carré}}$ comme réponse aux questions Q2 avec une boîte à fond carré témoigne du modèle spontané des élèves qui lie la forme de la feuille et la forme du fond de boîte. Cela atteste que durant la phase d’appropriation de la technique de pliage (Q1), ceux-ci sont focalisés sur la compréhension des différentes étapes de la notice et ne se posent pas de question sur cette relation. Or avec une feuille A4, le fond de boîte est un rectangle de 9,9 cm × 11,1 cm (pliage *Pla*) ou un rectangle de 7 cm × 22,7 cm (pliage *PLo*). Le pliage *Pla* fournit donc une boîte dont le fond peut paraître carré du fait des approximations de pliage. Dans la classe de P1, la question Q3b qui porte sur une boîte rectangulaire est posée avant la question Q2b où la boîte doit avoir un fond carré. Pourtant, dès Q3b, quelques élèves utilisent cette technique. Cela s’explique par l’usage de l’expression « boîte bien carrée » par la professeure pour exprimer que les

hauteurs de la boîte devaient être perpendiculaires au fond de la boîte. Le malentendu levé à ce moment-là et la validation de la technique τ_{calcul} au moment de la mise en commun n'empêchera pas un binôme à envisager cette technique pour répondre à la question Q2b montrant ainsi que ces élèves n'avaient pas perçu le potentiel générique de la technique τ_{calcul} . La technique $\tau_{ajustement}$ est mise en œuvre soit d'emblée, soit à l'issue du constat d'échec de la technique $\tau_{carré}$. Elle repose sur le constat des dimensions des boîtes déjà construites et ne relève pas d'une recherche de généralisation. La technique τ_{calcul} n'est pas la première technique à laquelle pensent les élèves, et ceci, quel que soit le niveau d'enseignement. Elle arrive après que d'autres techniques, certaines erronées, aient été mises en œuvre et sous l'impulsion de la professeure au moment d'une mise en commun en s'appuyant sur la production de quelques élèves (P1, CM2), ou pendant l'activité (P2, P3). Ainsi, par exemple, P1 fait observer aux élèves les « bandes » formées par les plis :

P1 : Le fond, il est constitué de quoi?

Élèves : Deux plis

P1 : Et les côtés, qu'est-ce que c'est, les côtés?

E1 : Les hauteurs

P1 : Elles sont composées de quoi, les hauteurs

E2 : De papier

P1 : Toute la boîte est en papier... de bandes aussi, [elle montre chaque côté vertical de la boîte en annonçant « une bandelette »] quand vous devez faire votre fond, votre feuille, il faut qu'elle soit constituée déjà de deux bandelettes.

Et poursuit après quelques sollicitations en faisant un schéma au tableau (figure 4) accompagné d'un discours qui induit la technique τ_{calcul} :

Si, ici, vous avez 8, vous savez que vos bandelettes quand vous allez plier, elles vont mesurer combien? 4 cm, donc pour trouver la bonne dimension vous devez vous dire que quand vous allez plier votre feuille en six, les barres elles vont être à 4 cm [...] ça va déjà vous donner une partie de la mesure.

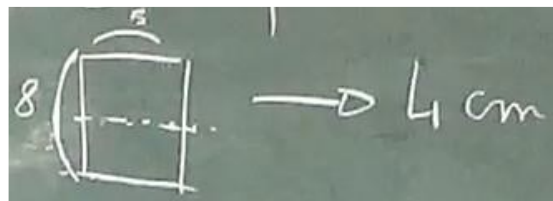


Figure 4. Schéma réalisé par P1 lors d'une mise en commun

C'est aussi la seule technique mise en valeur lors des mises en commun dans les quatre classes, sans qu'une comparaison avec les autres techniques soit faite, ce qui aurait révélé son pouvoir généralisateur. Une fois validée, sans doute par effet de contrat didactique, cette technique est majoritairement reprise par les élèves (voir figure 5) avec plus ou moins de succès pour répondre aux questions suivantes. Comme indiqué dans notre analyse a priori, nous considérons que cette technique τ_{calcul} relève des praxéologies de type algébrique qui se sont donc développées dans toutes les classes.

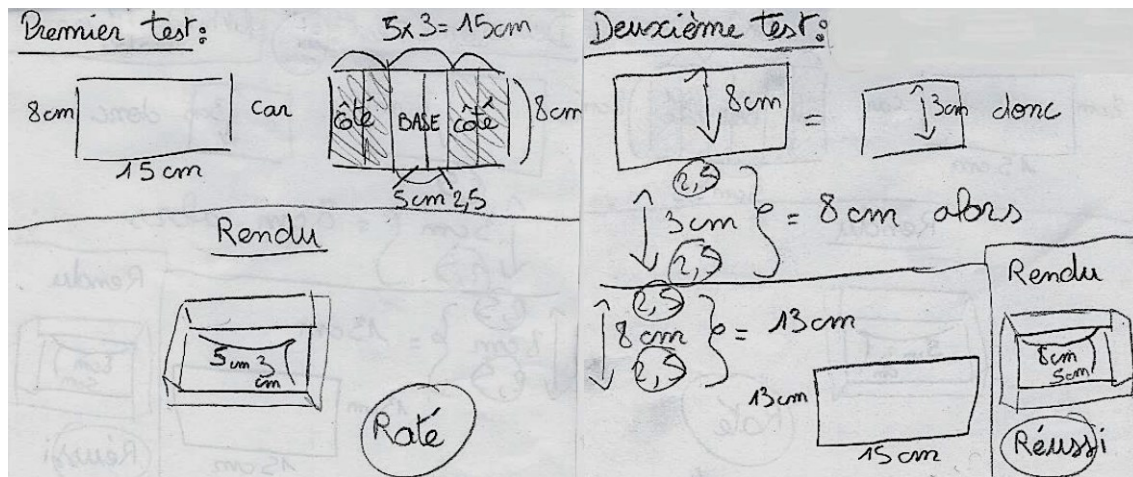


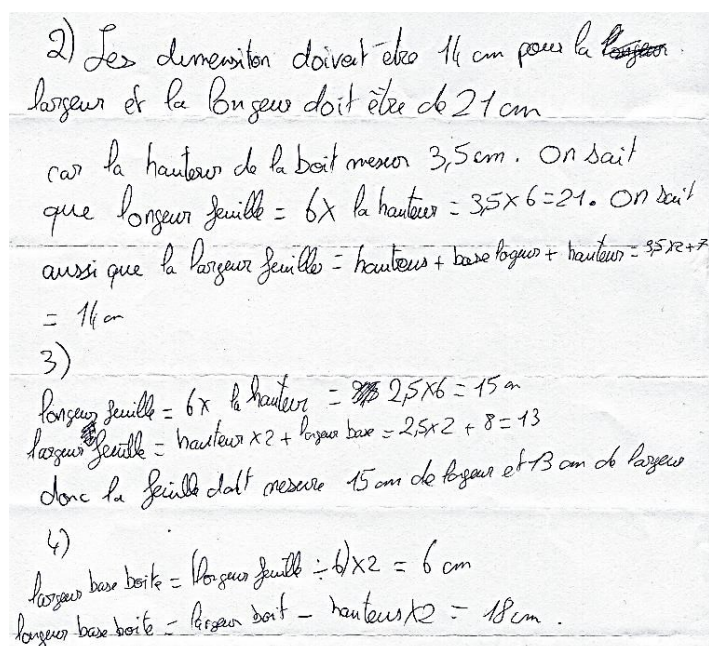
Figure 5. Trace écrite d'un groupe en classe de 6^e.

Notons que la technique $\tau_{relation}$ a été mise en œuvre par un élève en classe de 4^e et un trinôme en classe de 3^e (voir figure 6) sans que ce soit repris par la professeure P3 lors d'une mise en commun¹¹.

Dans les quatre classes, la place de la manipulation a été importante et il n'y a pas eu de construction d'une trace écrite collective. Seule la technique τ_{calcul} a été validée et des praxéologies de type algébriques ont été mises en œuvre. En revanche, aucun travail de comparaison entre les techniques n'a été réalisé et aucune référence n'a été faite à la modélisation. Enfin, le recours à des praxéologies algébriques n'a pas été un enjeu au cycle 4 où l'algèbre est pourtant enseignée¹².

¹¹ En classe de 3^e, P3 n'a pas fait de mise en commun mais a accompagné et validé le travail réalisé dans chaque groupe.

¹² Rappelons que les notions de variable et d'indéterminée, de la factorisation et du développement d'expressions littérales comme la résolution d'équation du premier degré sont enseignées en classe de 4^e.

Figure 6. Trace écrite d'un groupe de la classe de 3^e.

3.2. Discours des professeures et travail épistémologique

Au cours des entretiens, les trois professeures ont exprimé leurs difficultés à expliciter ce que recouvre la compétence « modéliser » et à la relier à l'activité proposée. Ainsi, P1 confond modélisation et modélisme : « je l'aurais plutôt entendu, euh, comme un loisir au départ, comme, voilà, des personnes qui vont essayer de faire des choses, euh, de modéliser, c'est-à-dire reproduire quelque chose en échelle plus petite ». P2 indique que « c'est super flou pour moi et j'essaie de me dépatouiller avec ça et essayer de faire un lien entre ce que tu fais là concrètement et les outils mathématiques et les opérations et tout ça, pour moi, ça serait la modélisation de... mais j'arrive pas à faire un lien vraiment ». Quant à P3 avoue « J'ai toujours eu du mal, justement », avant de la définir comme une activité permettant de « retranscrire le problème dans une situation... dans une situation qu'on peut expliquer plus facilement. Avec un schéma, une construction, etc... »

Le manque de connaissances mathématiques et didactiques sur le processus de modélisation et son enseignement conduit à une direction de l'étude de la situation comme une situation de recherche en autonomie didactique décroissante selon les niveaux d'enseignement. Il pourrait expliquer aussi qu'aucune professeure n'a anticipé la possibilité d'avoir des solutions différentes en fonction du type de pliage (Pla et PLo). Ceci a eu deux conséquences. D'une part, dans chaque classe, les deux types de pliage sont présents, générant confusion et incompréhension sans que les professeures puissent identifier leur origine. D'autre part, le manque

d'analyse du type de pliage avec les élèves court-circuite le nécessaire travail de définition du système dans le processus de modélisation. Ce travail était pourtant envisageable avec les élèves en fournissant des feuilles de différents formats lors de la première question. Aucune des professeures ne l'a envisagé.

Concernant la caractérisation des praxéologies de modélisation, ce sont bien des praxéologies muettes qui sont à l'œuvre puisque la modélisation n'est jamais un enjeu. Le processus de modélisation n'est jamais explicité, de sorte qu'on n'observe pas de praxéologies de modélisation au sens où nous les avons définies : il manque un travail de la classe qui explicite le système (qui aurait permis d'identifier les deux sens de pliage, par exemple) ou *a minima* un travail de comparaison des techniques qui valide les modèles construits. Seul le travail mathématique dans un modèle est présent. Nous retrouvons ce que nous avons observé (Wozniak, 2012) où une relation de proportionnalité pouvait servir de modèle : les besoins de connaissances mathématiques et didactiques sur la modélisation conduisent les professeures à enseigner les solutions plutôt qu'à faire étudier les problèmes.

Concernant la dimension algébrique de la situation, P3 a d'emblée énoncé un enjeu de généralisation au premier entretien. Elle souhaite voir les élèves « réussir à trouver les dimensions pour une boîte quelconque, de la feuille de départ » sans faire référence à l'algèbre qui est pourtant au programme des classes de 4^e et 3^e. D'ailleurs, la résolution d'équation très présente dans ces programmes n'est pas même mentionnée. De leur côté, c'est a posteriori que P1 et P2 reconnaissent cette dimension. Pour P1 : « c'est aussi ça, l'algèbre, c'est, voilà, c'est les relations entre des mesures, des quantités et qu'on peut en les liant d'une certaine façon trouver autre chose, donc pour moi oui c'était on va dire officieux » tandis que pour P2 « c'est les prémices, c'était intéressant de le voir comme ça aussi et d'avoir un pied déjà sans le formaliser ». Enfin, les deux professeures en collège (P2 et P3) considèrent qu'il manque une question qui demande la généralisation des liens entre les dimensions de la feuille et de la boîte et P3 suggère l'ajout de la question : « émettre une conjecture, quelle est la relation entre les dimensions de la feuille et les dimensions de la boîte? » Cette proposition de la part des deux professeures révèle en creux un rapport à l'enseignement des mathématiques : il n'est pas envisagé l'intérêt de faire percevoir par les élèves la raison d'être des savoirs à travers leur émergence en cours de résolution de problèmes. L'algèbre comme outil de modélisation par généralisation des cas étudiés ne peut pas être perçu par lui-même, il faut qu'il soit explicitement demandé.

4. Discussion et conclusion

Cet article se focalise sur la direction de l'étude d'un problème de modélisation avant et après l'introduction de l'algèbre. Il aborde ainsi une problématique

complémentaire à celle de Oliveira et al. (2017) qui s'intéressent aux praxéologies des élèves avant et après l'enseignement de l'algèbre dans la résolution de problèmes inévitables. Nous retenons de leurs travaux que, comme dans l'étude de problèmes de généralisation (Wozniak, 2020), les élèves peuvent résoudre de tels problèmes avant l'apprentissage formel de l'algèbre élémentaire. Nous retenons aussi le peu de différences entre les résultats des élèves au secondaire 1 par rapport aux élèves au secondaire 2 et le fait que plus la structure du problème de partage inévitable est complexe, plus les élèves recourent aux essais numériques :

Il est possible que lorsque la structure du problème est plus complexe, les élèves cherchent des procédures avec lesquelles ils se sentent plus confortables. Ainsi, la procédure algébrique étant récente pour eux, ils la laisseraient de côté pour privilégier une procédure qu'ils maîtrisent mieux afin de se centrer sur les relations plus complexes. (Oliveira et al., 2017, p. 177)

Nous avons observé un phénomène semblable : les mêmes techniques sont spontanément utilisées dans les différentes classes, même s'il y a eu développement de praxéologies de type algébrique pour un nombre croissant d'élèves avec l'avancée dans le curriculum.

Nous considérons qu'il y a trois dimensions dans le travail épistémologique du professeur. La non-identification de deux solutions suivant le type de pliage relève de la dimension mathématique de ce travail et a une incidence sur sa dimension didactique en ne permettant pas d'anticiper d'éventuelles difficultés ou incompréhensions et en ne favorisant pas le travail de définition du système dans le processus de modélisation. Quant à la dimension épistémologique, elle se révèle dans le discours de P2 et P3 qui considèrent que le travail en algèbre commence avec la demande explicite d'une généralisation. Elle se révèle aussi par un rapport à la modélisation et à l'activité mathématique scolaire à travers les discours et les pratiques observées. Comme dans Wozniak (2012), les professeures enseignent les solutions plutôt que les moyens de les construire et développent des praxéologies de modélisation muettes. Ici, le résultat est une boîte qui sert à valider le travail mathématique à réaliser. Ceci peut expliquer le temps long réservé à l'appropriation du procédé de fabrication dans les classes de P1 et P2. Nous faisons une autre hypothèse : le rapport à la manipulation et à l'expérimental écraserait le travail mathématique lui-même alors même que P3 mentionne ce risque : « Est-ce qu'ils vont chercher le côté mathématique ou est-ce qu'ils vont juste chercher à construire sans chercher une méthode pour que ça marche tout le temps ». Un élément semble corroborer cette hypothèse : aucune des professeures n'a exploité le potentiel de la schématisation des plis (par exemple dans la figure 3) base de développement des techniques de types algébriques ou algébriques. C'est

en dépliant et repliant les boîtes que les professeurs ont accompagné les élèves dans la construction de la technique τ_{calcul} ou l'ont explicitée. Lors d'une mise en commun, P1 réalise un schéma qui ne reprend pas les plis et P2 s'appuie sur une photo de la notice vidéo projetée (voir figure 5).

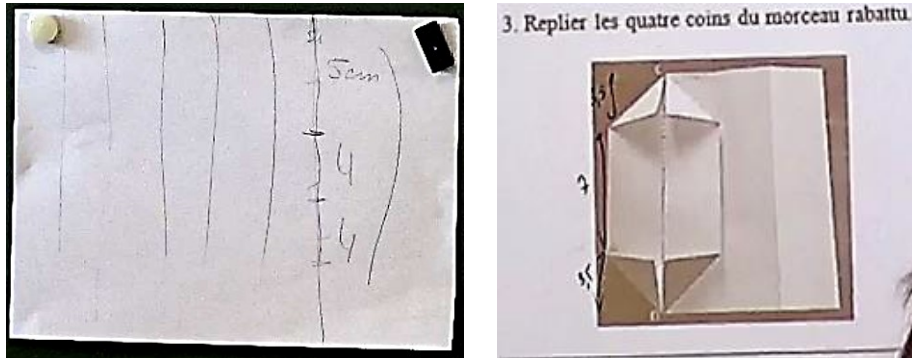


Figure 7. Schémas réalisés par P1 (à gauche) et P2 à partir d'une photo vidéo projetée (à droite).

Cette absence de schématisation peut expliquer qu'alors que les trois professeurs ont incité les élèves à diviser la longueur par 6 pour réaliser les pliages, la technique τ_{mesure} (il s'agit de compléter le dessin du fond de boîte par les plis associés puis mesurer les dimensions) n'a pas été utilisée par les élèves. Un binôme en CM2 a commencé à faire un dessin mais, interrompu par la récréation, n'a pas poursuivi dans cette direction.

Si le critère d'analyticité permet de distinguer arithmétique et algèbre, il ne suffit pas à rendre compte de l'évolution praxéologique. Notre étude est aussi l'occasion d'expliciter ce continuum (tableau 6) : praxéologies numériques où généralisation et indéterminée sont absentes, praxéologies de type algébrique où les techniques sont numériques, mais les technologies qui les justifient relèvent de l'algèbre et enfin les praxéologies algébriques.

Tableau 6. Le continuum praxéologique

Praxéologies	numérique	type algébrique	algébrique
Techniques	arithmétique	arithmétique	algèbre
Technologies	arithmétique	algèbre	algèbre
Caractérisations	Indéterminée et généralisation sont absentes	Indéterminée, analyticité; généralisation factuelle ou contextuelle	Indéterminée, dénotation, analyticité; généralisation symbolique

Pour conclure, nous revenons sur les deux questions que nous avons posées en introduction. La première question portait sur les besoins de connaissances mathématiques, didactiques et épistémologiques des professeures dans ce type de situations. Nous faisons l'hypothèse que le manque de familiarité avec le processus de modélisation vient gêner, dans l'étude de ce problème, le développement de praxéologies algébriques. Il y a un changement de paradigme scolaire qui fait de la modélisation autant un objet d'enseignement qu'un processus d'enseignement (Wozniak, 2019a) et qui n'est pas spécifique à la France (Barquero et al., 2018). La modélisation doit permettre l'émergence de nouveaux savoirs, faciliter leur étude et en faire percevoir la raison d'être. Ces observations en confirment d'autres (Wozniak, 2012, 2020), les professeurs français ne semblent pas prêts.

La seconde question visait à identifier comment le curriculum influence les choix du professeur pour diriger l'étude de ce type de problèmes. Même si les professeures développent des discours propres au programme d'enseignement du niveau où elles interviennent, ce sont des pratiques communes qui s'observent : une même technique τ_{calcul} valorisée, un rôle prépondérant à la manipulation et, corrélativement, une absence de schématisation des plis. L'enjeu algébrique, pourtant permis par l'activité proposée et conforme au programme scolaire de deux classes, ni la modélisation comme objet de savoir à enseigner ne sont présents dans aucun de nos cas d'étude. Nous faisons l'hypothèse que le manque de connaissances mathématiques et didactiques sur le processus de la modélisation est un déterminant didactique plus important que celui des curricula.

Dans cet article, nous avons considéré la résolution d'un problème de modélisation de situations extra-mathématiques. Ce que nous avons observé confirme de premières observations (Wozniak, 2012) concernant les besoins de connaissances mathématiques et didactiques des professeurs sur la modélisation. Si le problème considéré est porteur de praxéologies de types algébriques dès le cycle 3 qui pourraient évoluer vers des praxéologies algébriques au cycle 4, nous faisons le constat que, dans le contexte de formation actuel des professeurs en France, ce n'est peut-être pas le type le plus approprié. Il resterait à identifier quel type de problème de modélisation serait davantage porteur. Pour l'heure, comme nous l'avons montré dans Wozniak (2020), les problèmes de généralisation semblent être des types de problèmes de modélisation mieux adaptés, ce qui plaiderait pour leur introduction dans le curriculum dès le cycle 3 en France, comme c'est le cas, par exemple, en Belgique (Demonty et Vlassis, 2018).

Références

- Barquero, B., Florensa, I., Jessen, B., Lucas, C. et Wozniak, F. (2018). The external transposition of inquiry in mathematics education: impact on curriculum in different countries. Dans Y. Shimizu et R. Vithal (dir.), *School Mathematics Curriculum Reforms: Challenges, Changes and Opportunities. Actes de colloque du International Commission on Mathematical Instruction* (p. 189-197). University of Tsukuba.
- Barquero, B., Bosch, M. et Wozniak, F. (2019). Modelling praxeologies in teacher education: the cake box. Dans U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen et M. Veldhuis (dir.), *Proceedings of the 11th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, (p. 1144-1151). Utrecht University.
- Bednarz, N., Kieran, C. et Lee, L. (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*. Kluwer Academic Publishers.
- Blum, W. H.-J. et Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58.
- Blum, W. H.-J., Galbraith, P., Henn, H-W. et Niss, M. (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study*. Springer.
- Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 77-124.
- Cattoën, M.-O. (2020). *Étude des besoins de connaissances des enseignants pour accompagner vers le développement de praxéologies algébriques à partir d'une situation de modélisation*. [Mémoire de maîtrise inédit]. Université de Montpellier.
- Champy, F. (2012). *La sociologie des professions (2^e éd.)*. Presses universitaires de France
- Chappaz, J. et Michon, F. (2003). La boîte du pâtissier. *Grand N*, 72, 19-32.
- Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, 19, 43-75.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Demonty, I. et Vlassis, J. (2018). *Développer l'articulation arithmétique-algèbre*. De Boeck.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. et Ng, S. F. (2016). *Early algebra ICME-13 topical surveys*. Springer Open.

Matheron, Y. (2018). Éléments d'un parcours d'étude et de recherche pour enseigner l'algèbre au cycle 4. *Petit x*, 108, 67-86

Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche (2015). *Programme d'enseignement de l'école élémentaire et du collège*. Bulletin officiel spécial n°11 du 26 novembre 2015.

Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche (2016). *Le calcul en ligne au cycle 3*. Éduscol.

Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports (2018). *Programmes d'enseignement. Cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), cycle de consolidation (cycle 3) et cycle des approfondissements (cycle 4) : modification*. Bulletin officiel de l'éducation nationale n°30 du 26 juillet 2018.

Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports (2019a). *Attendus de fin d'année Mathématiques 5^e*. Éduscol.

Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports (2019b). *Attendus de fin d'année Mathématiques 4^e*. Éduscol.

Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports (2019c). *Attendus de fin d'année Mathématiques 3^e*. Éduscol.

Oliveira, I., Rhéaume, S. et Geerts, F. (2017). Apprentissage de l'algèbre : procédures et difficultés rencontrées lors de la résolution de problèmes. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 20 (3), 156-180. <https://doi.org/10.7202/1055732ar>

Perrenet, J. et Zwaneveld, B. (2012). The many faces of the mathematical modeling cycle. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(6), 3-21.

Programme for International Student Assessment. (2006). *Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A Framework for PISA*. Organisation de coopération et de développement économiques.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.

Radford, L. (2004). La généralisation mathématique comme processus sémiotique. Dans G. Arrigo (dir.), *Atti del Convegno di didattica della matematica 2004* (p. 1-27). Divisione della Scuola.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26(2), 257-277. <https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2>

Squalli, H. (2016). Évolution des travaux de recherche en didactique de l'algèbre : de la transition arithmétique-algèbre au courant Early Algebra. *Cours de la 2^e École de didactique des mathématiques EDM 2016*.

Squalli, H. (2020). Early algebra : genèse d'un domaine de recherche, évolution et perspectives. Dans H. Squalli, I. Oliveira, A. Bronner et M. Languier (dir.), *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires* (p. 5-21). Livres en ligne du CRIRES. <https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches>

Squalli, H., Languier, M., Bronner, A. et Adihou, A. (2020). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 22(1), 36-62. <https://doi.org/10.7202/1070024ar>

Wozniak, F. (2012). Des professeurs des écoles face à un problème de modélisation : une question d'équipement praxéologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 32(1), 7-55.

Wozniak, F. (2019a). Enseigner les mathématiques au début du XXI^e siècle. *Didactiques en pratique*, 5, 27-36.

Wozniak, F. (2019b). Fondements du travail épistémologique du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques*, 39(1), 15-50.

Wozniak, F. (2020). Les problèmes de généralisation au cœur de la transition arithmétique-algèbre. Une étude française. Dans H. Squalli, I. Oliveira, A. Bronner et M. Languier (dir.), *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherche et perspectives curriculaires* (p. 44-70). Livres en ligne du CRIRES. <https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches>

Annexe 1 : Les deux documents envoyés aux professeurs.**MISSION CONSTRUCTION**

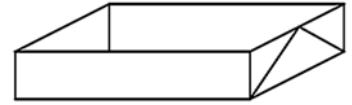
Les élèves sont des ingénieurs d'une usine qui fabrique des boîtes selon un procédé par pliage décrit dans la notice ci-jointe.

Le but de l'activité est d'étudier comment construire des boîtes en respectant différentes contraintes.

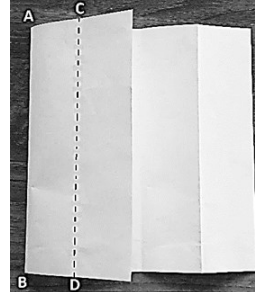
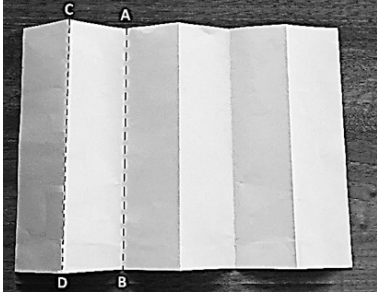
1. Construire une boîte à partir de la notice fournie.
2.
 - a) Construire une boîte à fond carré.
 - b) Quelles doivent être les dimensions de la feuille pour obtenir une boîte avec un fond carré de côté 7 cm?
3.
 - a) Construire une boîte à fond rectangulaire.
 - b) Quelles doivent être les dimensions de la feuille pour obtenir une boîte avec un fond rectangulaire de 5 cm par 8 cm?
4. Sans les construire, prévoir les dimensions des boîtes obtenues avec des feuilles rectangulaires de 18 cm par 24 cm.
5. Vrai ou faux?
 - a) Il n'est pas possible de construire une boîte à fond carré à partir d'une feuille rectangulaire de 12 cm par 24 cm.
 - b) Il est possible de fabriquer une boîte avec un fond rectangulaire de 8 cm par 4 cm et une hauteur de 4 cm.
 - c) Il n'est pas possible de fabriquer une boîte avec un fond rectangulaire de 8 cm par 6 cm et une hauteur de 2 cm.

NOTICE DE FABRICATION DE LA BOÎTE

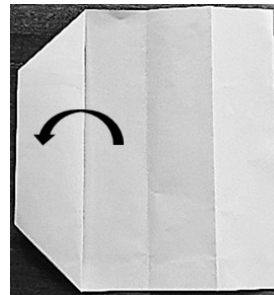
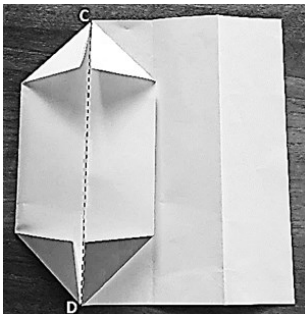
La notice suivante décrit les étapes permettant de construire une boîte.



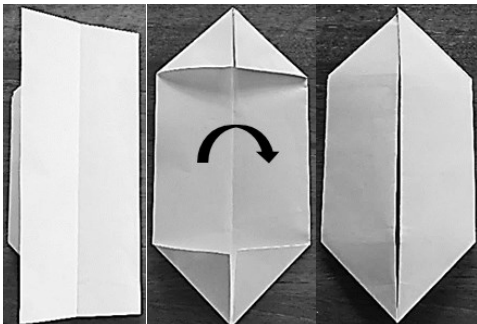
1. Partager la feuille en six bandes égales par un pliage en accordéon.
2. Rabattre vers l'intérieur la partie gauche de la feuille suivant (AB).



3. Replier les quatre coins du morceau rabattu.
4. Rabattre vers l'extérieur suivant (CD).



5. Faire la même chose avec le côté droit de la feuille.
6. Ouvrir par le milieu et marquer les plis du fond de la boîte et de sa hauteur.



Annexe 2. : Description des techniques valides et des théories Θ qui les fondent, associées aux deux types de tâches T1 et T2

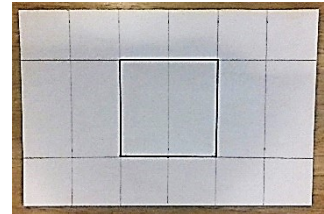
T1 : Déterminer les dimensions de la feuille pour construire une boîte de dimensions données

$\tau_{\text{ajustement}}$: Ajuster les dimensions de la feuille (par découpage) jusqu'à obtention par pliage des dimensions de la boîte demandées.

1. Construire une boîte.
2. Mesurer les dimensions du fond de la boîte.
3. Découper l'une et/ou l'autre dimension de la feuille pour réduire l'une et/ou l'autre dimension du fond de la boîte qui sera ensuite construite.
4. Renouveler les opérations 1, 2, 3 jusqu'à obtention des dimensions recherchées de la boîte.

τ_{mesure} : Mesurer les dimensions de la feuille après avoir dessiné le fond de la boîte aux dimensions voulues, puis les plis associés à sa construction.

1. Déplier une boîte déjà construite pour identifier les différents plis.
2. Tracer le fond de la boîte aux dimensions recherchées, au centre d'une feuille.
3. Compléter le dessin de sorte que les segments dessinés représentent les plis de la feuille.
4. Découper le surplus de feuille.
5. Construire la boîte.



τ_{calcul} : Calculer les dimensions de la feuille à partir du repérage du lien entre les plis de construction et les dimensions de la boîte.

1. Déplier (au moins en partie) une boîte déjà construite pour identifier les différents plis.
2. Schématiser les différents plis, puis identifier sur ce schéma les plis correspondant au fond de la boîte.
3. Identifier ou coder les reports de longueur.
4. Additionner les longueurs ainsi déterminées pour obtenir les dimensions de la feuille correspondante.

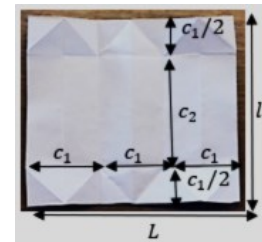
τ_{relation} : Etablir les relations entre les dimensions du fond de la boîte et les dimensions de la feuille

1. Déplier (au moins en partie) une boîte déjà construite pour identifier les différents plis.
2. Repérer les plis qui forment le fond de la boîte.
3. Déterminer les relations entre les dimensions de ce fond de boîte et celles de la feuille. Ce qui amène à :

$L = 3c$ et $l = 2c$ dans le cas d'une boîte carrée

$L = 3c_1$ et $l = c_1 + c_2$ dans le cas d'une boîte rectangulaire construite à partir du pliage de type *Pla*

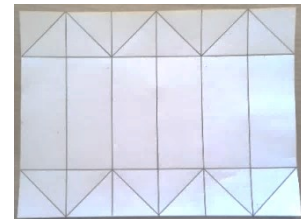
$L = 3c_2$ et $l = c_1 + c_2$ dans le cas d'une boîte rectangulaire construite à partir du pliage *PLo*.



T2 : Déterminer, sans la construire, les dimensions du fond des boîtes obtenues à partir de feuilles de dimensions données.

τ_{mesure^*} : Mesurer les dimensions du fond de la boîte en dessinant les plis sur la feuille de dimension données.

1. Déplier une boîte déjà construite pour identifier les différents plis.
2. Sur la feuille de dimensions données, reproduire en les traçant, ces plis.
3. Mesurer le rectangle représentant le fond de la boîte qu'on obtiendrait en effectuant le pliage.

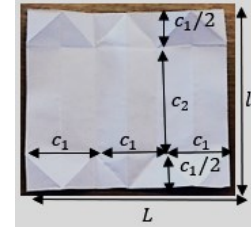


τ_{calcul^*} : Calculer les dimensions de la boîte à partir du schéma d'une boîte dépliée.

1. Déplier une boîte déjà construite pour identifier les différents plis.
2. Schématiser les différents plis, puis représenter sur ce schéma les dimensions de la feuille, données par l'énoncé.
3. Identifier ou coder les reports de longueur.
4. Calculer le tiers d'une dimension de la feuille pour obtenir la première dimension du fond de la boîte, puis enlever à la deuxième dimension de la feuille ce nombre pour calculer la deuxième dimension du fond de la boîte.

τ_{relation^*} : Etablir les relations entre les dimensions de la feuille et les dimensions du fond de la boîte.

1. Déplier (au moins en partie) une boîte déjà construite.
2. Repérer les plis qui forment le fond de la boîte.
3. Déterminer les relations entre les dimensions de la feuille et celles du fond de la boîte. Ce qui amène à :



$c_1 = \frac{l}{3}$ et $c_2 = l - c_1$ dans le cas d'une boîte rectangulaire construite à partir du pliage *Pla*

$c_1 = \frac{l}{3}$ et $c_2 = L - c_1$ dans le cas d'une boîte rectangulaire construite à partir du pliage *PLo*.

$\tau_{\text{relation-inverse}^*}$: Reprendre les relations obtenues avec la technique τ_{relation} et les « retourner ».

1. Reprendre les relations $L = 3c_1$ et $l = c_1 + c_2$ dans le cas d'une boîte rectangulaire construite à partir du pliage *Pla* et $l = 3c_1$ et $L = c_1 + c_2$ dans le cas d'une boîte rectangulaire construite à partir du pliage *PLo*.
2. Dédire de ces relations les expressions de c_1 et c_2 . Ce qui amène à :

$c_1 = \frac{l}{3}$ et $c_2 = l - c_1$ avec le pliage *Pla*

$c_1 = \frac{l}{3}$ et $c_2 = L - c_1$ avec le pliage *PLo*.