Modélisation et praxéologies (de type) algébriques : une étude de cas

Floriane WOZNIAK
Université Toulouse 2 Jean Jaurès, EFTS
floriane.wozniak@univ-tlse2.fr
Marie-Odile CATTOËN
Université de Montpelier
Marie-Odile.Cattoen@ac-montpellier.fr

Résumé : Cet article vise à étudier les conditions d'une entrée dans l'algèbre par les problèmes de modélisation en France. Nous analysons comment trois professeures abordent avec leurs élèves un même problème avant et après l'enseignement de l'algèbre. Deux facteurs susceptibles d'influencer leurs praxéologies sont considérés : leurs connaissances mathématiques et didactiques et le curriculum. Confirmant des travaux antérieurs (Wozniak, 2012), nous constatons que le processus de modélisation n'est pas considéré comme un objet de savoir à enseigner. En dépit de discours conformes aux programmes d'enseignement, l'enjeu algébrique n'est présent dans aucune des classes observées, comme masqué par la dimension expérimentale de la situation. Nous faisons l'hypothèse que le besoin de connaissances mathématiques et didactiques sur la modélisation et son enseignement est un déterminant plus important que les curricula eux-mêmes sur les pratiques des professeurs.

Mots-clés : Modélisation, praxéologie de type algébrique, praxéologie algébrique, travail épistémologique du professeur

Algebra as a modelling tool: a comparative study in cycles 3 and 4 in France

Abstract: This article aims to study the conditions for teaching algebra based on modelling problems in France. We analyze how three teachers approach the same modelling problem with their students before and after teaching algebra. Two factors likely to influence their praxeologies are considered: on the one hand their mathematical and didactic knowledge and on the other hand the curriculum. Confirming previous research (Wozniak, 2012), we find that the modelling process is not considered as an object of knowledge to be taught. Despite discourses in accordance with the curricula, the algebraic issue appears to be absent from any of the classes observed, perhaps obscured by the

Revue québécoise de didactique des mathématiques, 2022, *Numéro thématique 2* (Tome 1), p. 96-130.

experimental dimension of the situation. We hypothesize that the need for mathematical and didactic knowledge about modelling and its teaching is a more significant determinant of teachers' practices than the curricula themselves.

Keywords: Modelling, algebraic type praxeology, algebraic praxeology, teachers' epistemological work

Introduction

La nécessité d'introduire progressivement un enseignement de l'algèbre, comme l'intérêt d'une approche qui ne soit pas limitée à une arithmétique généralisée fait aujourd'hui consensus dans la communauté internationale (Kieran et al., 2016). En France[1], bien que les programmes ne fassent pas référence aux travaux de l'*Early Algebra*, certains éléments des praxéologies algébriques sont présents dès le cycle 3. Ainsi, un document d'accompagnement (Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, 2016) rappelle l'intérêt didactique des calculs en ligne pour une « compréhension progressive des propriétés des opérations en favorisant leur utilisation » (p. 3). Il est d'ailleurs attendu des élèves « qu'ils manipulent ces propriétés en situation et qu'ils les explicitent avec leurs mots » (p. 3). Pour la distributivité de la multiplication sur l'addition, une formulation est même suggérée : « quand on multiplie une somme de deux nombres, cela revient à multiplier chacun des termes » (p. 4). Au-delà des propriétés des opérations, les calculs en ligne doivent amener progressivement à appréhender le signe « = » comme une équivalence et non seulement comme le moyen de donner le résultat d'un calcul. Par ailleurs, ce travail de calculs en ligne « prépare les attendus du cycle 4 liés à la production d'expressions littérales et à la mise en équation de problèmes » (p. 5). C'est au cycle 4 que :

> les élèves abordent les bases du calcul littéral, qu'ils mettent en œuvre pour modéliser une situation, démontrer une propriété générale et résoudre des problèmes se ramenant à des équations du premier degré. Les élèves sont progressivement familiarisés aux différents statuts de la lettre (indéterminée, variable, inconnue, paramètre) et du signe égal (pour fournir le résultat d'une opération, pour traduire l'égalité de deux représentations d'un même nombre, dans une équation, dans une identité). (Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, 2018, annexe 3, p. 34)

1 Le cycle 1 concerne l'école maternelle (élèves de 3 à 6 ans), le cycle 2 est formé des classes de CP, CE1, CE2 (élèves de 6 à 9 ans), le cycle 3 est formé des classes de CM1 et CM2 (élèves de 9 à 11 ans) à l'école primaire et de la classe de 6^{e} (élèves de 11 à 12 ans) au collège. Le cycle 4 est formé des classes de 5^{e}, 4^{e}, 3^{e} au collège (élèves de 12 à 15 ans).

En particulier, à la fin de la classe de 5e, l'élève

> produit une expression littérale pour élaborer une formule ou traduire un programme de calcul; […] substitue une valeur numérique à une lettre pour calculer la valeur d'une expression littérale, tester, à la main ou de façon instrumentée, si une égalité où figurent une ou deux indéterminées est vraie quand on leur attribue des valeurs numériques; contrôler son résultat. (Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, 2019a, p. 4).

En fin de 4e, il « introduit une lettre pour désigner une valeur inconnue et met un problème en équation; il teste si un nombre est solution d'une équation; il résout algébriquement une équation du premier degré » (Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, 2019b, p. 4). Et en fin de 3e, un élève « résout algébriquement différents types d'équations […]; il résout des problèmes s'y ramenant, qui peuvent être internes aux mathématiques ou en lien avec d'autres disciplines » (Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, 2019c, p. 3).

Si Matheron (2018) propose un parcours d'étude et de recherche « permettant une entrée dans l'algèbre reprise en plusieurs fois, s'appuyant sur la nécessité de modéliser des programmes de calcul » (p. 70), d'autres approches sont envisageables (Bednarz et al., 1996) comme l'approche fonctionnelle ou la modélisation de situations extra-mathématiques (Squalli, 2016).

La résolution de problèmes et la démarche d'investigation sont devenues des éléments structurants des programmes scolaires sous l'impulsion des évaluations internationales comme Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) ou Programme for International Student Assessment (PISA) (Barquero et al., 2018). La modélisation y apparaît comme objet et processus d'enseignement : il ne s'agit pas seulement d'un ensemble de savoirs mathématiques à connaître pour résoudre certains types de problèmes, c'est aussi une démarche où les étapes à suivre sont aussi importantes que le résultat final à obtenir (Wozniak, 2019a). L'enseignement des mathématiques est alors abordé à travers la résolution de problèmes où la recherche d'un modèle adapté à la question posée conduit à découvrir la raison d'être des savoirs. Dans ce texte, nous considérons que toute activité conduisant à la conception d'un modèle est une activité de modélisation. Et en nous appuyant sur Chevallard (1989), nous appréhendons un modèle mathématique comme un ensemble de relations qui représentent et facilitent l'étude d'une situation grâce aux outils et aux techniques mathématiques.

En France, depuis 2015, les programmes d'enseignement des mathématiques du cycle 2 au cycle 4 déclarent contribuer au « développement de six compétences majeures : chercher, modéliser, représenter, calculer, raisonner et communiquer » (Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, 2015, p. 45). Concernant la modélisation, la progression au fil des cycles se réalise par le recours à de nouveaux outils mathématiques et une meilleure identification du processus de modélisation, de ses différentes composantes et de ses enjeux. Or, l'introduction de la modélisation à l'école peut conduire à poser la question d'une introduction progressive de l'algèbre : « Si la modélisation algébrique relève avant tout du cycle 4 et du lycée, la résolution de problèmes permet déjà de montrer comment des notions mathématiques peuvent être des outils pertinents pour résoudre certaines situations » (Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, 2015, p. 197).

Dans le cadre des travaux de l'Observatoire international de la pensée algébrique (OIPA), nous avons montré (Wozniak, 2020) que les problèmes de généralisation pouvaient contribuer en France à une entrée progressive vers l'algèbre dès l'école primaire. Ces problèmes, déjà présents dans le curriculum de l'enseignement secondaire, s'inscrivent bien dans une continuité entre arithmétique et algèbre et semblent faciliter la transition entre praxéologies numériques et praxéologies algébriques. Dans cet article, nous poursuivons notre étude des conditions d'une entrée progressive vers l'algèbre à travers la résolution de problèmes de modélisation où l'algèbre n'apparaît pas comme une arithmétique généralisée.

En particulier, nous cherchons à déterminer :

1) Quels sont les besoins de connaissances mathématiques, didactiques et épistémologiques des professeurs dans ce type de problèmes?
2) Comment le curriculum influence-t-il les choix du professeur pour diriger l'étude de ce type de problèmes?

Notre objectif étant d'identifier comment s'opère la transition des praxéologies numériques vers les praxéologies algébriques, nous nous inscrivons dans le programme de recherches de l'*Early Algebra* (Kieran et al., 2016) en considérant l'évolution de la résolution d'un même problème de modélisation avant et après l'entrée de l'algèbre dans les programmes d'enseignement.

Dans une première partie, nous présentons notre cadre d'analyse des problèmes de modélisation. En nous appuyant sur la théorie anthropologique du didactique, nous définissons le « travail épistémologique du professeur » et proposons une caractérisation des praxéologies de type algébrique. La méthodologie est exposée dans la deuxième partie où l'analyse a priori du problème étudié montre son potentiel pour introduire l'algèbre comme outil de modélisation. La troisième partie présente les résultats de nos observations dans quatre classes de niveaux d'enseignement distincts. Nous y documentons les praxéologies des élèves afin de nourrir notre réflexion sur ce qui fonde le travail épistémologique des professeures tel qu'il apparaît à travers leurs entretiens. La conclusion revient sur les besoins de connaissances mathématiques et didactiques des professeures observées qui se révèlent à travers les praxéologies des élèves et aborde la pertinence, dans le contexte français, d'une introduction de l'algèbre par l'étude de problèmes de modélisation.

1. Le cadre d'analyse

Nos recherches s'adossent à la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999) qui postule que toute activité humaine peut être modélisée par des praxéologies faites de types de tâches, de techniques pour accomplir ces types de tâches, de discours technologiques permettant de décrire, justifier, développer ces techniques et d'une théorie qui justifie, explique et produit les technologies. L'analyse praxéologique consiste alors à expliciter les praxéologies qui vivent dans les systèmes étudiés.

Le programme de recherches (Wozniak, 2019b) que nous suivons vise à identifier les déterminismes didactiques, c'est-à-dire pourquoi les professeurs font ce qu'ils font ou plutôt pourquoi ils sont amenés à faire ce qu'ils font. Nous étudions les conditions et les contraintes qui influent sur leurs praxéologies indépendamment de leur situation individuelle afin d'identifier les éléments exogènes à la classe qui pèsent sur les savoirs enseignés. Ce n'est pas ce qui distingue les professeurs qui est envisagé, mais ce qui les unit dans leur condition de professeurs de mathématiques, faisant nôtre le point de vue du sociologue des professions : « même si leur maîtrise se développe au fil d'histoires personnelles différentes, les savoirs et savoir-faire utilisés par les membres d'une même profession comportent une part commune bien supérieure à ce qui les différencie» (Champy, 2012, p. 76).

Notre but est d'identifier ce qui fonde le *travail épistémologique du professeur*, c'est-à-dire

> l'ensemble des praxéologies qui contiennent, y compris de façon naïve ou spontanée, une part d'étude des processus de production, de formation, de développement, de transformation, d'organisation et de transmission des objets mathématiques ou une part de caractérisation de la nature de l'activité mathématique elle-même et de ses objets. (Wozniak, 2019b, p. 25)

Le travail épistémologique du professeur met en œuvre des praxéologies mathématiques et didactiques articulées par l'épistémologie du professeur (voir figure 1) qui est « une théorie – implicite ou explicite – des savoirs et connaissances à enseigner et une théorie de l'apprentissage de ces savoirs et connaissances au sein d'une institution donnée, à une époque donnée » (Wozniak, 2019b, p. 16).

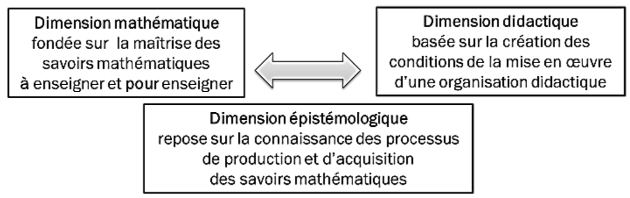


Figure 1. Les trois dimensions du travail épistémologique du professeur (Wozniak, 2019b, p. 23)

Dans cet article, la question Q1 vise à identifier les besoins associés à chacune des trois dimensions du travail épistémologique du professeur, tandis que la question Q2 porte sur les conditions de réalisation de ce travail, en particulier l'influence du curriculum, selon le niveau d'enseignement. C'est ainsi que nous avons proposé à trois professeures de niveaux d'enseignement différents un même problème de modélisation. L'observation naturaliste – c'est-à-dire sans intervention ni indication sur la façon de conduire l'étude – a été complétée par des entretiens avant et après les séances d'enseignement de façon à recueillir le discours des professeures sur ce qui fonde leur travail épistémologique. S'agissant d'une étude portant sur la résolution d'un problème où l'algèbre peut être un outil de modélisation, nous sommes amenées à expliciter notre modèle du processus de modélisation et à définir les praxéologies algébriques comme critères d'analyse.

1.1. Caractériser le processus de modélisation

L'explicitation de la compétence « *modéliser* » dans les programmes actuels en France fait référence aux problèmes issus de « situations de la vie quotidienne », c'est-à-dire aux problèmes avec énoncé où la situation évoquée est extra-mathématique. L'enseignement de ces types de problèmes fait l'objet de multiples recherches sur le plan international (Blum et al., 2007). Le plus souvent, le processus de modélisation est représenté sous la forme d'une schématisation cyclique (Perrenet et Zwaneveld, 2012), par exemple dans la figure 2 avec le schéma proposé par Blum et Borromeo Ferri (2009) couramment utilisé par les concepteurs des évaluations internationales PISA (Programme for International Student Assessment, 2006).

Pour illustrer ce processus, les auteurs proposent plusieurs exemples, dont celui du phare « Roter Sand » à Bremen qui mesure 30,7 m de haut et dont la balise avertit les navires approchant de la côte. Il s'agit de déterminer la distance approximative de la côte à laquelle se trouve un navire lorsqu'il voit la lumière du phare pour la première fois.

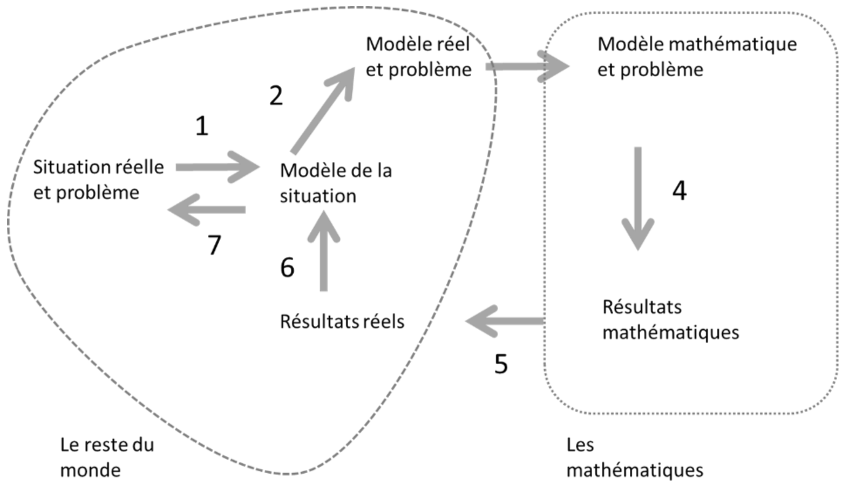


Figure 2. Cycle de modélisation d'après Blum et Borromeo Ferri (2009, p. 46).

La première étape du cycle de modélisation (1) passe par une représentation de la situation : la mer à la surface de la Terre, la lumière du phare, le bateau. Le tri fait dans les informations – les noms du phare et du lieu où il se trouve n'ont pas d'effet sur la distance à la côte – permet une simplification du modèle de la situation (2) : la Terre est une sphère, le navire est un point, la lumière du phare sur le navire forme une tangente à la sphère Terre. La mathématisation conduit alors à un modèle mathématique (3) qui n'est autre qu'un triangle rectangle TPN rectangle en N où T est le centre de la Terre, P le sommet du phare et N le navire. Le travail mathématique (4) intègre la hauteur du phare $H \approx 30{,}7$ m, le rayon de la Terre estimé par $R \approx 6\,370$ km et s'appuie sur l'utilisation du théorème de Pythagore[2]. Il permet de déterminer une distance approchée de 20 km. L'interprétation de ce résultat mathématique (5) fournit une réponse au problème initial qui doit maintenant être validée (6) en posant des questions sur le résultat lui-même ou ses conditions d'obtention : Est-ce un résultat cohérent? Les hypothèses sont-elles correctement fondées? Les réponses à ces questions pourraient conduire éventuellement à entreprendre un nouveau cycle en modifiant une ou plusieurs étapes pour se conclure par la donnée de la solution au problème (7).

Les problèmes associés à une situation réelle ne sont pas les seuls types de problèmes qui requièrent une activité de modélisation. Ainsi, une équation algébrique est un modèle mathématique d'une courbe tracée sur le papier, de sorte que pour déterminer si deux courbes sont sécantes, il suffit de chercher les racines communes aux équations associées. C'est pour cette raison que Chevallard (1989)

---

[2] On a : $CP = R + H$, $CN = R$ et $CP^2 = CN^2 + NP^2$. La valeur cherchée étant NP, la distance de N à P.

propose de décrire le processus de modélisation sans le restreindre aux cas où une situation extra-mathématique est à l'origine du processus. Sa description du processus de modélisation est plus synthétique que celle de Blum et Borromeo Ferri (2009). C'est celle que nous adopterons ici dans la mesure où notre accent est mis sur les praxéologies algébriques plutôt que sur les praxéologies de modélisation. Pour Chevallard, la première étape est la définition du système étudié qui peut être une situation extra-mathématique ou mathématique. Elle passe par la détermination des éléments pertinents pour l'étude et correspond aux étapes 1 et 2 de la figure 2. La deuxième étape est la construction du modèle pour étudier le système, c'est-à-dire la mise en relation des différentes variables identifiées à l'étape précédente (étape 3, figure 2). La troisième étape est celle du travail mathématique dans le modèle (étape 4, figure 2). Ces trois étapes sont évidemment en interaction. Un travail mathématique dans le modèle peut conduire à réévaluer la pertinence des éléments choisis et ainsi à modifier le système étudié puis le modèle initial. Le cycle se termine lorsque la solution mathématique construite est validée comme réponse au problème posé (étapes 5, 6, 7, figure 2).

Des mots, des notations, des ostensifs sont requis pour qu'une classe se dise à elle-même les savoirs qu'elle vient de construire collectivement et qui intègreront une culture partagée via le processus d'institutionnalisation. C'est pourquoi, nous caractériserons les praxéologies de modélisation selon l'existence ou la nature du discours technologique développé[3] autour du processus de modélisation : elles seront considérées comme muettes lorsque la définition du système est absente et où seul le travail sur un modèle sera visible; nous parlerons de praxéologies faibles lorsque la construction du modèle sera décrite à partir de l'identification du système modélisé, mais non justifiée, et de praxéologies fortes lorsque les trois étapes du processus de modélisation identifiées par Chevallard seront clairement explicitées.

Considérant un problème où l'algèbre peut être un outil de modélisation, il nous faut caractériser les praxéologies mises en œuvre en référence au recours aux techniques ou aux technologiques algébriques.

---

[3] « Nous considérons qu'une praxéologie est muette lorsqu'elle se donne à voir uniquement au travers de sa composante praxis; seule la technique mise en œuvre dans un rapport d'action est perceptible alors que la composante logos n'est pas audible, à moins qu'elle ne soit simplement tue. Une praxéologie faible laisse entrevoir la composante logos au travers des ostensifs associés à la technique mise en œuvre; le discours technologique reste implicite ou limité à la seule description de la technique dans un rapport de formulation non encore abouti. Enfin, une praxéologie forte met en œuvre dialectiquement les deux composantes praxis et logos dans des rapports d'action, de formulation et de validation » (Wozniak, 2012, p. 38-39).

1.2. Des praxéologies numériques aux praxéologies (de type) algébriques

Les praxéologies numériques sont mises en œuvre dans les problèmes arithmétiques. Les calculs sont réalisés avec des nombres connus, il n'y a pas de recherche d'une généralisation. Les praxéologies algébriques sont mises en œuvre dans des problèmes avec inconnue(s) ou qui nécessitent une généralisation, par exemple à travers l'élaboration d'un programme de calcul, l'établissement d'une formule ou l'identification d'une relation fonctionnelle. Nous faisons l'hypothèse d'un continuum entre praxéologies numériques et algébriques. L'objet de cette section est de caractériser ce que nous appelons des praxéologies de *type* algébrique.

Une synthèse des travaux issus du programme de recherches *Early Algebra* rend compte de la diversité des points de vue quant aux éléments caractérisant les praxéologies algébriques :

> Blanton et al. (2011) soutiennent que la structure mathématique et les relations sont au cœur de la pratique de l'early algebra. Pour Britt et Irwin (2011), les débuts de la pensée algébrique impliquent d'utiliser des nombres et des mots pour exprimer des transformations arithmétiques en termes généraux. Carraher et Schliemann (2015) caractérisent l'early algebra en termes de formes de raisonnement de base qui expriment des relations entre nombres ou quantités, en particulier des relations fonctionnelles. Dans ces études et d'autres, les relations mathématiques, les modèles et les structures arithmétiques sont considérés comme étant au cœur de la pensée algébrique primitive. (Kieran et al., 2016, p. 10, traduction libre[4])

Pour définir les critères épistémologiques qui fondent des praxéologies algébriques, nous nous appuyons sur Radford (2014) qui identifie trois conditions permettant de reconnaître l'expression d'une « pensée algébrique » :

- Le traitement d'une ou de plusieurs valeurs inconnues (critère d'indétermination);
- La production d'ostensifs (des gestes, mots, schémas, symboles, etc.) associés aux valeurs indéterminées (critère de dénotation);
- Le traitement des valeurs indéterminées comme si elles étaient des valeurs connues (critère d'analycité).

---

[4] Blanton et al. (2011) argue that mathematical structure and relationships are central to the practice of early algebra. For Britt and Irwin (2011), early algebraic thinking involves coming to use numbers and words to express arithmetic transformations in general terms. Carraher and Schliemann (2015) characterize early algebraic thinking in terms of basic forms of reasoning that express relations among number or quantities, in particular, functional relations. In these studies and others, mathematical relations, patterns, and arithmetical structures are deemed to be at the heart of early algebraic thinking.

À l'instar de Squalli et al. (2020) qui s'appuient sur le développement historique de l'algèbre, nous faisons du critère d'analycité le marqueur des praxéologies de nature algébrique : « Le développement du raisonnement analytique est donc au cœur du développement de la pensée algébrique dans le contexte de la résolution de problèmes se ramenant à la recherche de valeurs d'inconnues » (p. 39). Ces auteurs proposent une grille d'analyse fondée sur le degré d'analycité (raisonnement analytique, à tendance analytique et non analytique) et le registre de représentation sémiotique des inconnues, des relations et des équations (numérique, intermédiaire, algébrique conventionnel) pour les problèmes de partage inéquitable. Nous ne reprenons pas cette grille qu'il faudrait adapter à la spécificité du problème considéré ici, notre ambition étant de caractériser les praxéologies de type algébrique indépendamment du type de problèmes concerné.

Les problèmes de généralisation de suites figurées sont un autre type de problème de modélisation. Abordant « la généralisation mathématique comme [un] processus sémiotique » Radford (2004) étudie les « moyens sémiotiques d'objectivation » (p. 21) – c'est-à-dire la valence sémiotique des ostensifs au sens de Bosch et Chevallard (1999) – afin de caractériser les praxéologies de généralisation. Il identifie trois niveaux de généralisation : factuelle, le schème opérationnel de la généralisation reste confiné au niveau numérique, les moyens sémiotiques d'objectivation sont constitués de déictiques spatiaux, de gestes, de rythme et de mouvement; contextuelle, le schème de l'objet général est constitué d'arguments langagiers qui portent en eux les caractéristiques conceptuelles de la situation spatio-temporelle dont ils ont issus; algébrique, l'objet général est exprimé sous forme symbolique, il est une contraction sémiotique forçant le détachement de l'activité passée et la perte de l'origo mieux exprimé par les moyens sémiotiques des précédents niveaux.

Pour Squalli (2016), ces trois niveaux de généralisation témoignent d'une « pensée algébrique ». De notre côté, nous avons observé dans Wozniak (2020) que des élèves peuvent généraliser un processus en utilisant le même programme de calcul quelles que soient les valeurs numériques données sans produire d'ostensifs associés aux valeurs indéterminées. Il s'agit d'un exemple de généralisation factuelle puisqu'elle « consiste en une généralisation des actions numériques sous la forme d'un schème numérique » (Radford, 2003, p. 65, traduction libre[5]). Or, le recours aux nombres ne signe pas, *ex nihilo*, l'entrée dans un processus de

[5] « consists of a generalization of numerical actions in the form of a numerical scheme » (Radford, 2003, p. 65).

généralisation. Avec Squalli (2020), nous considérons que le caractère algébrique des praxéologies mathématiques

> ne réside pas dans la nature des ostensifs, au sens de Bosch et Chevallard (1999), soit dans la présence de signes alphanumériques. Il réside plutôt dans la nature des non ostensifs, soit dans les significations des concepts ainsi que dans la nature des raisonnements impliqués. (p. 11)

Nous tirons de ces travaux qui portent sur des problèmes de types différents, les éléments qui caractérisent les praxéologies de type algébrique : les techniques sont numériques, mais les technologies qui les justifient relèvent de l'algèbre. Les cas particuliers ne sont plus envisagés comme des singularités mais comme des cas génériques qui permettent d'envisager d'autres possibles. Ainsi, les praxéologies de type algébrique remplissent les critères d'indétermination et d'analycité, mais pas nécessairement de dénotation, c'est-à-dire qu'il n'existe pas nécessairement d'ostensif qui représente l'indéterminée (comme dans l'exemple évoqué ci-dessus dans Wozniak, 2020). Si les praxéologies de type algébrique relèvent d'une algèbre avant la lettre, elles peuvent aussi exister après l'introduction de l'algèbre, comme nous le verrons plus loin dans ce texte. Les généralisations factuelles et contextuelles au sens de Radford (2003) mettent en œuvre des praxéologies de type algébrique, tandis qu'une généralisation symbolique relève de praxéologies algébriques.

Les critères d'indétermination, de dénotation et d'analycité ainsi que les types de généralisation, lorsqu'ils sont pertinents en fonction du problème étudié, constituent ainsi nos points d'appui pour caractériser les praxéologies selon un continuum : numérique (où indéterminée et généralisation sont absentes), de type algébrique, algébrique.

Les questions auxquelles nous cherchons à répondre sont : Quelles seront effectivement les praxéologies développées pour résoudre un problème de modélisation? Quels sont les effets du curriculum sur ces praxéologies? Quels sont les choix des professeurs concernant l'opportunité d'une généralisation et l'accompagnement vers des praxéologies de types algébriques ou algébriques?

2. Méthodologie

Lorsqu'on considère simultanément les connaissances disciplinaires, didactiques ou épistémologiques relatives à l'enseignement d'un objet de savoir (*Os*) des professeurs et sa place dans le curriculum, quatre cas de figures peuvent se produire (voir tableau 1).

Tableau 1 : cas d'enseignement d'un objet de savoir.

	Connaissances relatives à l'enseignement d'un *Os* non actives	Connaissances relatives à l'enseignement d'un *Os* actives
Os hors du curriculum	(1)	(2)
Os dans le curriculum	(4)	(3)

En prenant l'algèbre pour exemple, nous pouvons illustrer ces différents cas :

1) enseignement dans une classe de CM2 – dernière année d'école primaire où l'algèbre n'est pas au programme – par un professeur non spécialiste des mathématiques dont les connaissances en algèbre peuvent ne pas être actives car par exemple, trop anciennes;
2) enseignement dans une classe de 6^{e} ou 5^{e} – premières années du collège où l'algèbre n'est pas au programme – par un professeur de mathématiques qui peut avoir à l'enseigner dans les niveaux supérieurs et dont les connaissances en algèbre sont actives;
3) enseignement en 4^{e} ou en 3^{e} – dernières années du collège où l'algèbre est au programme – par un professeur de mathématiques dont les connaissances relatives à l'enseignement de l'algèbre sont actives;
4) ce cas ne devrait pas exister dans les conditions normales de l'enseignement de l'algèbre. Il se produit lorsqu'un nouvel objet de savoir est introduit dans le curriculum et que les professeurs ne l'ont pas étudié dans leur propre cursus, comme récemment en France avec le langage Python.

Pour déterminer l'influence éventuelle du curriculum sur les praxéologies des professeurs, nous avons considéré la façon dont un même problème est étudié avant et après l'entrée de l'algèbre dans les programmes d'enseignement en choisissant trois professeures correspondant à chacun des cas (1), (2), (3). Pour que des comparaisons soient possibles, il fallait trouver un problème pouvant être étudié aussi bien aux cycles 3 et 4. Nous présentons maintenant l'analyse a priori de ce problème.

2.1. Analyse a priori du problème de modélisation

Nous avons proposé aux professeurs la construction de boîtes par pliage pour trois raisons. D'abord, il s'agit d'une situation ayant été expérimentée en fin d'école primaire (Chappaz et Michon, 2003) qui repose sur l'étude des relations entre les dimensions d'une feuille et celles de la boîte obtenue par pliage. Ensuite, le recours au calcul algébrique n'est pas indispensable, car les questions sont posées pour des valeurs particulières. Des considérations géométriques et des techniques numériques suffisent. Cette situation peut donc être abordée dès l'école primaire et permet d'observer dans quelle mesure les professeurs saisissent l'opportunité de l'étude de ce problème pour se donner un enjeu de généralisation, voire recourir à l'algèbre. Enfin, cette situation est utilisée en formation de professeurs (Barquero et al., 2019) et le choix des valeurs des variables didactiques a ainsi été plusieurs fois éprouvé. Nous avons repris les différentes questions de la situation initiale, mais modifié la notice d'instructions afin de limiter les informations apportées (voir annexe 1). Nous l'avons renommée « Mission construction » pour le cas où les professeurs feraient des recherches sur Internet.

2.1.1. Les relations entre les dimensions de la feuille et de la boîte

En suivant les instructions de pliage, il est possible de construire deux boîtes. La figure 3 illustre à partir d'une feuille A4 le pliage *Pla* où les plis sont parallèles à la largeur (comme dans la notice) et le pliage *PLo* où les plis sont parallèles à la longueur de la feuille.

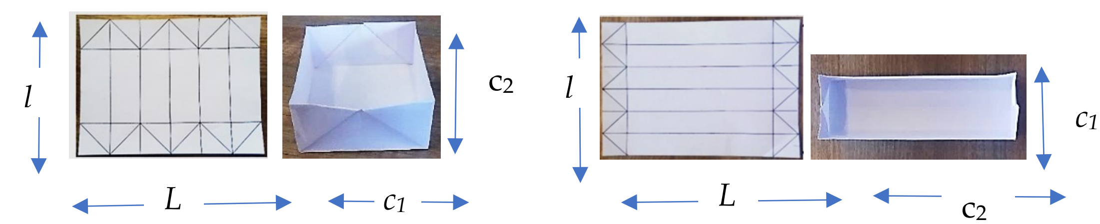


Figure 3. Pliages *Pla* (à gauche) et *PLo* (à droite) d'une feuille A4

Les relations qui lient les dimensions de la feuille initiale (notées l et L) et les dimensions du fond de la boîte (notées c_1 et c_2) sont :

Pour le pliage *Pla*, $c_1 + c_2 = l$ avec $c_1 = \frac{L}{3}$ et $c_2 = l - \frac{L}{3}$.

Pour le pliage *PLo*, $c_1 + c_2 = L$ avec $c_1 = \frac{l}{3}$ et $c_2 = L - \frac{l}{3}$.

Dans le cas d'une feuille carrée ($l = L$), les pliages *Pla* et *PLo* se confondent et on obtient une seule boîte : $c_1 = \frac{L}{3} = \frac{l}{3}$ et $c_2 = \frac{2L}{3} = \frac{2l}{3}$.

Contrairement à la figure 3, les longueurs des côtés l et L ne sont pas toujours, respectivement, la largeur et la longueur de la feuille. Par exemple, pour construire une boîte à fond rectangulaire 8 cm × 5 cm, le pliage *Pla* donne l = 5 cm + 8 cm = 13 cm et L = 3 × 8 cm = 24 cm tandis que le pliage *PLo* donne L = 5 cm + 8 cm = 13 cm et l = 3 × 5 cm = 15 cm.

2.1.2. La dynamique des questions

L'étude dans Chappaz et Michon (2003) est réalisée autour de cinq grandes questions que nous reprenons ici en explicitant leur fonction didactique.

La première question – construire une boîte à partir de la notice fournie – permet de comprendre le pliage et le processus de construction. À ce stade, les élèves ne se posent pas de questions sur les liens entre les dimensions de la feuille de départ et celles de la boîte obtenue. Aucune contrainte n'étant imposée, le type de pliage (*Pla* ou *PLo*) fournit potentiellement deux boîtes de formes différentes, mais suivant la conduite de la séance, les élèves peuvent ne pas le percevoir.

La deuxième question – construire une boîte à fond carré de dimensions données – permet la dévolution du problème en perturbant le modèle spontané des élèves qui lient les formes de la feuille et de la boîte. Constatant qu'une feuille carrée ne produit pas une boîte à fond carré, ceux-ci analysent alors les plis pour déterminer le lien entre les dimensions de la feuille et de la boîte. Le fait qu'il n'y ait qu'une solution (3c, 2c) facilite l'entrée dans le problème.

La troisième question – construire une boîte à fond rectangulaire de dimensions données – a deux solutions (voir plus haut) et conduit vers la conception d'un modèle liant les dimensions feuille/boîte rectangulaire.

La quatrième question – prévoir les dimensions des boîtes connaissant les dimensions de la feuille – permet d'éprouver la fiabilité du modèle élaboré précédemment. Le pliage à ce moment-là change de statut. Il n'est plus l'objet d'expérimentations par les élèves pour concevoir le modèle, il sert à valider les réponses anticipées à partir du modèle.

La dernière question – *déterminer la possibilité de construire des boîtes de dimensions données* – permet d'enrichir le modèle en intégrant la dimension de la hauteur de la boîte. L'argumentation attendue conduit à expliciter le modèle et appelle une généralisation.

Une analyse du processus de modélisation selon le modèle de Chevallard (1989) permet d'identifier que le modèle mathématique conçu pour répondre à une question devient un élément du système de la question suivante de sorte que les modèles successivement construits complètent les précédents. Pour répondre à la deuxième question (boîte à fond carré), un modèle mathématique est élaboré qui lie les dimensions d'une feuille et les dimensions d'une boîte à fond carrée à partir d'un système fait des feuilles de papier fournies, de la technique de pliage et des boîtes fabriquées. Ce premier modèle – qui pourrait être assez peu mathématisé – sera intégré de facto au système à étudier pour répondre à la troisième question (boîte à fond rectangulaire). Un nouveau modèle est alors conçu sur la base de ce nouveau système, modèle qui viendra enrichir le système associé à la quatrième question, etc.

2.1.3. Les techniques de résolution

Deux types de tâches sont ainsi travaillés (T1 et T2) pour lesquels nous envisageons à présent les techniques τ qui permettent de les accomplir ainsi que les modèles de la situation θ qui les justifient.

Pour accomplir le type de tâches T1 – Déterminer les dimensions de la feuille pour construire une boîte de dimensions données – quatre techniques valides sont envisageables. Elles sont présentées dans le tableau 2 avec les discours technologiques qui les justifient et décrites en détail dans l'annexe 2.

Tableau 2 : techniques valides pour accomplir T1.

$\tau_{\text{ajustement}}$: Ajuster les dimensions de la feuille (par découpage) jusqu'à obtention par pliage des dimensions de la boîte demandées.	$\theta_{\text{dimensions liées}}$: Les dimensions de la feuille et de la boîte sont liées : diminuer une dimension de la feuille, c'est diminuer une dimension de la boîte.
τ_{mesure} : Mesurer les dimensions de la feuille après avoir dessiné le fond de la boîte aux dimensions voulues puis les plis associés à sa construction.	θ_{plis} : la reproduction des plis permet la reproduction de la boîte. Pour τ_{mesure} il y a mesure sur un dessin.
τ_{calcul} : Calculer les dimensions de la feuille à partir du repérage du lien entre les plis de construction et les dimensions de la boîte.	Pour τ_{calcul} un schéma des plis peut servir d'appui pour représenter la relation entre dimensions : les plis sont toujours disposés de la même façon. Ils forment 6 bandes dont les 2 du milieu constituent le fond de la boîte et il y a une bande au-dessus et au-dessous du fond de la boîte qui représente les bords de la boîte (voir figure 3).
τ_{relation} : Établir les relations entre les dimensions du fond de la boîte et les dimensions de la feuille	Pour τ_{relation} il n'est plus nécessaire de coder les mesures de longueur sur un schéma pour effectuer les calculs : une dimension de la feuille est le triple d'une dimension du fond de boîte, l'autre dimension de la feuille est la somme des dimensions du fond de la boîte.

Les techniques $\tau_{\text{ajustement}}$ et τ_{mesure} relèvent d'une théorie empiriste où le problème étant un objet à fabriquer, la solution passe par la manipulation ou la mesure de celui-ci. La généralisation est absente. La technique τ_{calcul} relève d'une théorie arithmético-géométrique portée par une lecture des plis sur la feuille dépliée ou un schéma et validée par les propriétés géométriques. Elle repose donc sur une généralisation des relations entre les plis et signe une praxéologie de type algébrique. La technique τ_{relation} relève d'une théorie algébrico-géométrique fondée sur la généralisation des relations explicitement établies entre les dimensions validées par les propriétés géométriques. Si les dimensions sont dénotées en lien avec les grandeurs de la feuille ou de la boîte, nous classons cette technique parmi les praxéologies de type algébrique. En revanche, si les dénotations se détachent des grandeurs et du contexte, nous considérerons qu'elle relève de praxéologies algébriques.

Trois techniques non valides sont aussi envisageables. Deux d'entre elles se fondent sur l'idée que les formes de la feuille et du fond de la boîte sont identiques. La technique $\tau_{carré}$ consiste à tenter de construire une boîte à fond carré à partir d'une feuille carrée. Avec une feuille A4 et le pliage de type *Pla*, une des dimensions du fond de boîte mesure 10 cm environ, la technique $\tau_{demi\text{-}feuille}$ utilise une feuille A5 (demi-feuille A4) pour obtenir une boîte dont une des dimensions du fond est 5 cm. La troisième technique erronée $\tau_{découpage\text{-}écart}$ se fonde sur l'idée que les dimensions de la feuille et de la boîte évoluent avec un même écart. Une boîte étant construite, la feuille est découpée de l'écart calculé entre les dimensions de la boîte construite et les dimensions à obtenir[6]. Une fois constaté que la technique est erronée, elle peut évoluer vers la technique $\tau_{ajustement}$ à laquelle elle est apparentée.

Pour accomplir le type de tâches T2 – Déterminer, sans la construire, les dimensions du fond des boîtes obtenues à partir d'une feuille de dimensions données – quatre techniques valides sont envisageables (voir tableau 3) qui sont des adaptations de techniques utilisées pour accomplir le type de tâches T1.

Tableau 3. Techniques valides pour accomplir T2.

τ_{mesure^*} : Mesurer les dimensions du fond de la boîte en dessinant les plis sur la feuille de dimensions données.	θ_{plis} : la reproduction des plis permet la reproduction de la boîte
τ_{calcul^*} : Calculer les dimensions de la boîte à partir du schéma d'une boîte dépliée.	Les plis sont toujours disposés de la même façon. Ils forment 6 bandes dont les 2 du milieu constituent le fond de la boîte et il y a une bande au-dessus et au-dessous du fond de la boîte (voir figure 3).
$\tau_{relation^*}$: Établir les relations entre les dimensions de la feuille et les dimensions du fond de la boîte.	
$\tau_{relation\text{-}inverse^*}$: Reprendre les relations obtenues avec la technique $\tau_{relation}$ et les « retourner ».	

[6] Cette technique peut permettre de trouver approximativement les dimensions requises pour construire une boîte à fond carré de 10 cm de longueur de côté. En effet, une feuille A4 (dimensions 21 cm par 29,7 cm) permet de construire une boîte à fond rectangulaire de dimensions 10 cm par 11 cm environ. En réduisant de 1 cm la largeur de la feuille, on obtient une feuille mesurant environ 30 cm par 20 cm et une boîte apparemment à fond carré.

Nous classons les techniques $\tau_{mesure*}$, $\tau_{calcul*}$, $\tau_{relation*}$ comme les techniques τ_{mesure}, τ_{calcul} et $\tau_{relation}$ auxquelles elles sont associées : $\tau_{mesure*}$ relève d'une praxéologie numérique, $\tau_{calcul*}$ d'une praxéologie de type algébrique et $\tau_{relation*}$ d'une praxéologie de type algébrique ou algébrique selon la dénotation des dimensions. Enfin, la technique $\tau_{relation\text{-}inverse*}$ s'inscrit dans une praxéologie algébrique.

2.2. Les observations

Les observations (Cattoën, 2020) se sont déroulées dans une école et un collège de la même ville de 6 500 habitants située en contexte plutôt rural. Les trois professeures sont nommées P1, P2 et P3 dans la suite et correspondent respectivement aux cas 1, 2 et 3 du tableau 1. Ces professeures ont été choisies par opportunité afin que les trois cas précédents soient représentés : P2 et P3 sont dans le même établissement que l'une d'entre nous et P1 est dans une école à côté et nous nous sommes assurées qu'elle n'avait pas fait un cursus universitaire scientifique.

P1 intervient en CM2, enseigne depuis deux ans au moment des observations et a fait des études en sciences humaines[7] (Terminale littéraire, licence d'histoire et master d'enseignement). P2 enseigne en classe de 6e, a 20 ans d'ancienneté et détient une licence de mathématiques[8]. P3 qui est chargée des classes de 4e et 3e a 10 ans d'ancienneté, une licence de mathématiques-informatique et une première année de master en ingénierie mathématique[9].

Une fois obtenu l'accord des trois professeures, les documents en annexe 1 ont été adressés par messagerie en précisant :

> La situation que nous vous proposons de mettre en place avec vos élèves peut être organisée comme vous le souhaitez :
> - aucune contrainte d'organisation de la classe (en groupe, en binôme ou individuel);
> - aucune contrainte d'organisation de l'étude (étude en une séance ou plusieurs, d'une durée libre);
> - aucune contrainte quant à l'utilisation de matériel autre que des feuilles pour construire les boîtes.
>
> Vous avez une complète liberté d'adapter cette situation en fonction de vos élèves. Les élèves sont des ingénieurs d'une usine qui fabrique des boîtes selon un procédé par pliage décrit dans la notice ci-jointe. Le but de l'activité est d'étudier comment construire des boîtes en respectant différentes contraintes.

---

7 Au Québec, cela correspondrait à un diplôme d'études collégiales avec une valence littéraire, un baccalauréat en histoire et une maîtrise d'enseignement pour l'école primaire.

8 Au Québec, cela correspondrait à un baccalauréat en mathématiques.

9 Au Québec, cela correspondrait à un baccalauréat en mathématiques et une première année de maîtrise en ingénierie mathématique.

Les moments d'observation, choisis par les professeures, ont été complétés par des entretiens.

2.3. Les entretiens

Nous avons conduit des entretiens semi-dirigés avant et après les séances d'enseignement de façon à faire expliciter par les professeures les savoirs en jeu.

L'entretien avant l'observation a pour objectif de faire exprimer aux professeures les enjeux qu'elles identifient et la façon dont elles s'approprient le problème. L'entretien après l'observation vise à faire expliciter leur rapport personnel à l'algèbre ou à la modélisation et, notamment, pour les professeures du secondaire, le lien qu'elles perçoivent entre le problème et une introduction potentielle à l'enseignement de l'algèbre. Au cours de ces entretiens, elles ont évalué de 0 à 3 le niveau de travail des six compétences structurant le programme de mathématiques : chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer, ceci afin que les professeures situent ce problème dans les attentes institutionnelles et qu'on puisse objectiver une éventuelle évolution de leurs rapports personnels à ces compétences du fait de l'expérimentation.

Les observations et entretiens ont été réalisés entre avril et juin 2019. Le corpus est constitué de trois types de données : les films des séances selon un point fixe au fond de la classe, caméra dirigée vers le tableau lors des temps collectifs ou vers certains élèves durant les phases de recherche; les enregistrements sonores de la professeure qui portait sur elle un microphone; des photos de productions d'élèves.

3. Résultats

La place nous manque pour présenter dans le détail les séances observées du point de vue des élèves et des professeures. Aussi, dans un premier temps, nous présentons le contenu des séances observées et les techniques mises en œuvre par les élèves en les considérant comme l'effet des pratiques de ces professeures. Dans un second temps, nous évoquerons les entretiens qui explicitent leur rapport à la modélisation et à l'algèbre. La confrontation des praxéologies des élèves avec les discours des professeurs permet de comprendre comment les praxéologies des élèves sont révélatrices des fondements du travail épistémologique des professeures.

3.1. Les séances observées

Le tableau 4 présente l'objectif déclaré des professeures, la durée d'étude et les questions travaillées parmi les suivantes :

Q1. Construire une boîte à partir de la notice fournie.

Q2. a) Construire une boîte à fond carré.
b) Quelles doivent être les dimensions de la feuille pour obtenir une boîte avec un fond carré de côté 7 cm?
[réponse : l = 14 cm, L = 21 cm]

Q3. a) Construire une boîte à fond rectangulaire.
b) Quelles doivent être les dimensions de la feuille pour obtenir une boîte avec un fond rectangulaire de 5 cm par 8 cm?
[réponse : l = 13 cm et L = 15 cm ou l = 13 cm et L = 24 cm]

Q4. Sans les construire, prévoir les dimensions des boîtes obtenues avec des feuilles rectangulaires de 18 cm par 24 cm.
[réponse : boîte 8 cm par 10 cm avec *Pla* et boîte 6 cm par 18 cm avec *PLo*].

Tableau 4. Les séances observées et les questions traitées.

	P1 – CM2 26 élèves	P2 – 6e 25 élèves	P3 – 4e 25 élèves	P3 – 3e 10 élèves[10]
Objectif déclaré	Attitude de recherche	Réinvestir les connaissances géométriques	Trouver les relations entre les dimensions (sans formalisme algébrique)	
Durée des séances	1 séance de 2 h 45 en classe entière : les élèves ont travaillé durant toute une matinée sur ce problème	1 séance de 1 h 50 min en classe entière + 1 séance de 55 min en demi-classe	1 séance en classe entière de 55 min	1 séance de 55 min avec tous les élèves
Ordre des questions traitées	Q1 – Q3b – Q2b	Q1 – Q2a et Q2b – Q3b	Q1 – Q2b – Q3b (un groupe)	Q1- Q2b – Q3b (un groupe) – Q4 (un groupe)

Dans toutes les classes, seules des feuilles de format A4 ont été distribuées et il n'y a pas eu de production d'une trace écrite collective. P1, dans la classe de CM2, a choisi d'inverser les questions Q2 et Q3 en considérant que la relation (2c, 3c) dans le cas d'une boîte à fond carré pouvait inciter les élèves à la réinvestir avec une boîte à fond rectangulaire et les mettre en difficultés. Pour étudier les questions, Q1, Q2 et Q3, les classes de CM2 et 6e ont travaillé durant 165 min et les classes de 4e et 3e durant 55 min. Un groupe d'élèves de la classe de 3e a aussi eu le temps d'aborder la quatrième question. Dans les classes de 4e et 3e observées, il a fallu trois fois moins de temps pour travailler les trois questions. Ceci peut s'expliquer par la différence de posture de P1 et P2 qui ont laissé beaucoup de temps aux

[10] Les autres élèves de la classe étaient en voyage pédagogique.

élèves pour comprendre la notice : 60 min en CM2 et 45 min en 6e alors que P3 a guidé les élèves pour ne pas s'y attarder.

Le tableau 5 présente les techniques mises en œuvre par au moins un élève à chacune des questions.

Tableau 5 – synthèse des techniques utilisées

	CM2	6e	4e	3e
$\tau_{carré\ (erronée)}$	Q3b – Q2b	Q2b	Q2b	Q2b
$\tau_{demi\text{-}feuille(\ erronée)}$	Q3b			
$\tau_{découpage\text{-}écart\ (erronée)}$		Q2b		
$\tau_{ajustement}$	Q3b	Q2b- Q3b	Q2b	Q2b
τ_{mesure}	Q3b (amorcée et abandonnée par un binôme)			Q2b (proposée par un élève dans un groupe mais non retenue)
τ_{calcul}	Q3b- Q2b	Q2b- Q3b	Q2b	Q2b
$\tau_{relation}$		Q2b (travail à la maison avec aide extérieure)	Q2b (un élève), Q3b (un élève, application relation boîte carrée)	Q2b (un groupe), Q3b (un groupe)
$\tau_{relation\ *}$				Q4 (un groupe)

Trois techniques apparaissent dans toutes les classes : $\tau_{carré}$, $\tau_{ajustement}$, τ_{calcul}. La technique erronée $\tau_{carré}$ comme réponse aux questions Q2 avec une boîte à fond carré témoigne du modèle spontané des élèves qui lie la forme de la feuille et la forme du fond de boîte. Cela atteste que durant la phase d'appropriation de la technique de pliage (Q1), ceux-ci sont focalisés sur la compréhension des différentes étapes de la notice et ne se posent pas de question sur cette relation. Or avec une feuille A4, le fond de boîte est un rectangle de 9,9 cm × 11,1 cm (pliage *Pla*) ou un rectangle de 7 cm × 22,7 cm (pliage *PLo*). Le pliage *Pla* fournit donc une boîte dont le fond peut paraître carré du fait des approximations de pliage. Dans la classe de P1, la question Q3b qui porte sur une boîte rectangulaire est posée avant la question Q2b où la boîte doit avoir un fond carré. Pourtant, dès Q3b, quelques élèves utilisent cette technique. Cela s'explique par l'usage de l'expression « boîte bien carrée » par la professeure pour exprimer que les hauteurs de la boîte devaient être perpendiculaires au fond de la boîte. Le malentendu levé à ce moment-là et la validation de la technique τ_{calcul} au moment de la mise en commun n'empêchera pas un binôme à envisager cette technique pour répondre à la question Q2b montrant ainsi que ces élèves n'avaient pas perçu le potentiel générique de la technique τ_{calcul}. La technique $\tau_{ajustement}$ est mise en œuvre soit d'emblée, soit à l'issue du constat d'échec de la technique $\tau_{carré}$. Elle repose sur le constat des dimensions des boîtes déjà construites et ne relève pas d'une recherche de généralisation. La technique τ_{calcul} n'est pas la première technique à laquelle pensent les élèves, et ceci, quel que soit le niveau d'enseignement. Elle arrive après que d'autres techniques, certaines erronées, aient été mises en œuvre et sous l'impulsion de la professeure au moment d'une mise en commun en s'appuyant sur la production de quelques élèves (P1, CM2), ou pendant l'activité (P2, P3). Ainsi, par exemple, P1 fait observer aux élèves les « bandes » formées par les plis :

> P1 : Le fond, il est constitué de quoi?
>
> Élèves : Deux plis
>
> P1 : Et les côtés, qu'est-ce que c'est, les côtés?
>
> E1 : Les hauteurs
>
> P1 : Elles sont composées de quoi, les hauteurs
>
> E2 : De papier
>
> P1 : Toute la boîte est en papier…de bandes aussi, [elle montre chaque côté vertical de la boîte en annonçant « une bandelette »] quand vous devez faire votre fond, votre feuille, il faut qu'elle soit constituée déjà de deux bandelettes.

Et poursuit après quelques sollicitations en faisant un schéma au tableau (figure 4) accompagné d'un discours qui induit la technique τ_{calcul} :

> Si, ici, vous avez 8, vous savez que vos bandelettes quand vous allez plier, elles vont mesurer combien? 4 cm, donc pour trouver la bonne dimension vous devez vous dire que quand vous allez plier votre feuille en six, les barres elles vont être à 4 cm […] ça va déjà vous donner une partie de la mesure.

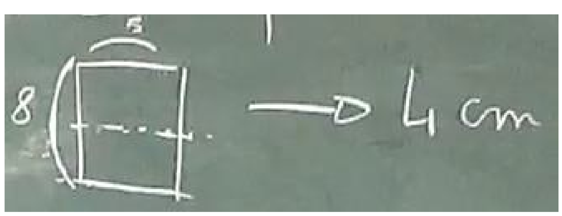


Figure 4. Schéma réalisé par P1 lors d'une mise en commun

C’est aussi la seule technique mise en valeur lors des mises en commun dans les quatre classes, sans qu’une comparaison avec les autres techniques soit faite, ce qui aurait révélé son pouvoir généralisateur. Une fois validée, sans doute par effet de contrat didactique, cette technique est majoritairement reprise par les élèves (voir figure 5) avec plus ou moins de succès pour répondre aux questions suivantes. Comme indiqué dans notre analyse a priori, nous considérons que cette technique τ_{calcul} relève des praxéologies de type algébrique qui se sont donc développées dans toutes les classes.

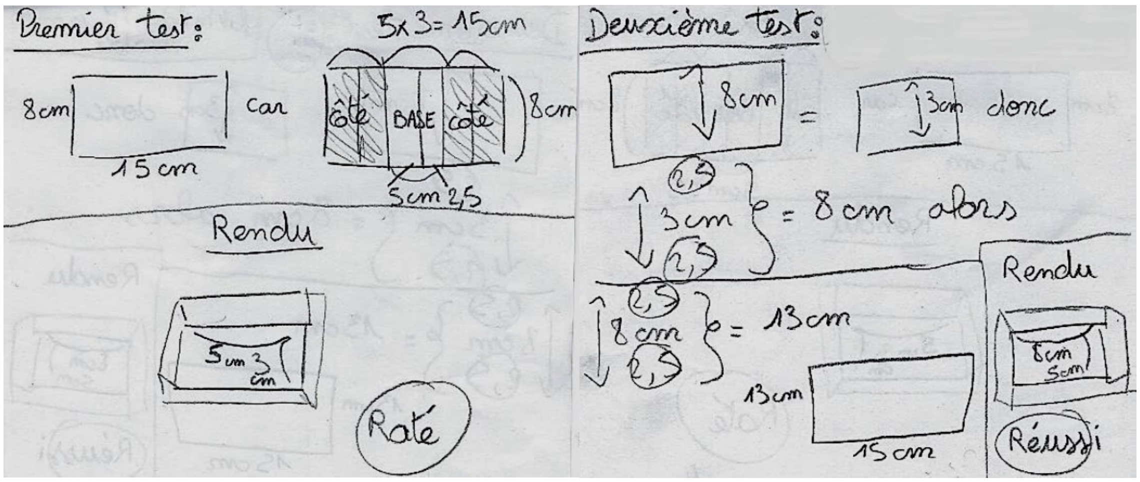


Figure 5. Trace écrite d’un groupe en classe de 6e.

Notons que la technique $\tau_{relation}$ a été mise en œuvre par un élève en classe de 4e et un trinôme en classe de 3e (voir figure 6) sans que ce soit repris par la professeure P3 lors d’une mise en commun[11].

Dans les quatre classes, la place de la manipulation a été importante et il n’y a pas eu de construction d’une trace écrite collective. Seule la technique τ_{calcul} a été validée et des praxéologies de type algébriques ont été mises en œuvre. En revanche, aucun travail de comparaison entre les techniques n’a été réalisé et aucune référence n’a été faite à la modélisation. Enfin, le recours à des praxéologies algébriques n’a pas été un enjeu au cycle 4 où l’algèbre est pourtant enseignée[12].

---

[11] En classe de 3e, P3 n’a pas fait de mise en commun mais a accompagné et validé le travail réalisé dans chaque groupe.

[12] Rappelons que les notions de variable et d’indéterminée, de la factorisation et du développement d’expressions littérales comme la résolution d’équation du premier degré sont enseignées en classe de 4e.

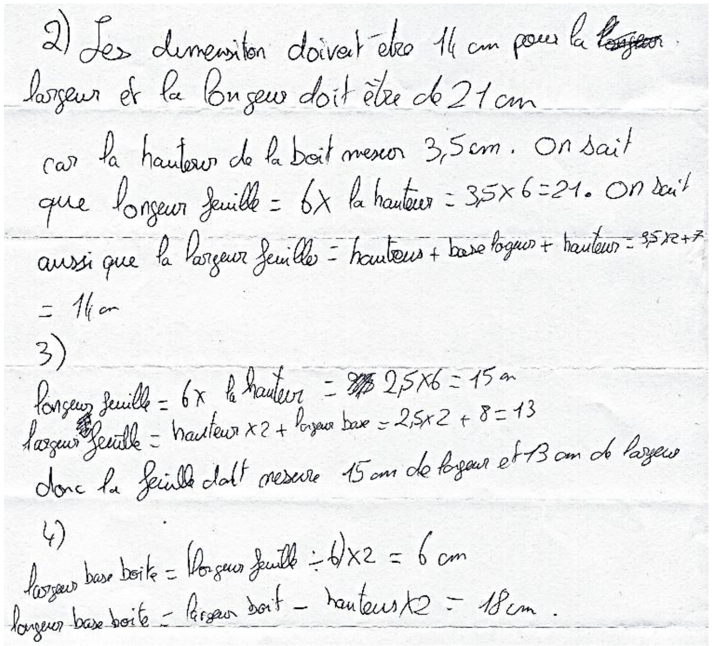

2) Les dimensiton doivent être 14 cm pour la ~~longeur~~ largeur et la longeur doit être de 21 cm
car la hauteur de la boit mesur 3,5 cm. On sait que longeur feuille = 6x la hauteur = 3,5x6=21. On sait aussi que la largeur feuille = hauteur + base logeur + hauteur = 3,5x2+7 = 14 cm
3)
longeur feuille = 6x la hauteur = 2,5x6 = 15 cm
largeur feuille = hauteur x2 + longeur base = 2,5x2 + 8 = 13
donc la feuille doit mesure 15 cm de logeur et 13 cm de largeur
4)
largeur base boite = (longeur feuille ÷ 6)x2 = 6 cm
longeur base boite = largeur boit − hauteur x2 = 18 cm.

Figure 6. Trace écrite d'un groupe de la classe de 3e.

3.2. Discours des professeures et travail épistémologique

Au cours des entretiens, les trois professeures ont exprimé leurs difficultés à expliciter ce que recouvre la compétence « modéliser » et à la relier à l'activité proposée. Ainsi, P1 confond modélisation et modélisme : « je l'aurais plutôt entendu, euh, comme un loisir au départ, comme, voilà, des personnes qui vont essayer de faire des choses, euh, de modéliser, c'est-à-dire reproduire quelque chose en échelle plus petite ». P2 indique que « c'est super flou pour moi et j'essaye de me dépatouiller avec ça et essayer de faire un lien entre ce que tu fais là concrètement et les outils mathématiques et les opérations et tout ça, pour moi, ça serait la modélisation de… mais j'arrive pas à faire un lien vraiment ». Quant à P3 avoue « J'ai toujours eu du mal, justement », avant de la définir comme une activité permettant de « retranscrire le problème dans une situation… dans une situation qu'on peut expliquer plus facilement. Avec un schéma, une construction, etc… »

Le manque de connaissances mathématiques et didactiques sur le processus de modélisation et son enseignement conduit à une direction de l'étude de la situation comme une situation de recherche en autonomie didactique décroissante selon les niveaux d'enseignement. Il pourrait expliquer aussi qu'aucune professeure n'a anticipé la possibilité d'avoir des solutions différentes en fonction du type de pliage (*Pla* et *PLo*). Ceci a eu deux conséquences. D'une part, dans chaque classe, les deux types de pliage sont présents, générant confusion et incompréhension sans que les professeures puissent identifier leur origine. D'autre part, le manque d'analyse du type de pliage avec les élèves court-circuite le nécessaire travail de définition du système dans le processus de modélisation. Ce travail était pourtant envisageable avec les élèves en fournissant des feuilles de différents formats lors de la première question. Aucune des professeures ne l'a envisagé.

Concernant la caractérisation des praxéologies de modélisation, ce sont bien des praxéologies muettes qui sont à l'œuvre puisque la modélisation n'est jamais un enjeu. Le processus de modélisation n'est jamais explicité, de sorte qu'on n'observe pas de praxéologies de modélisation au sens où nous les avons définies : il manque un travail de la classe qui explicite le système (qui aurait permis d'identifier les deux sens de pliage, par exemple) ou *a minima* un travail de comparaison des techniques qui valide les modèles construits. Seul le travail mathématique dans un modèle est présent. Nous retrouvons ce que nous avions observé (Wozniak, 2012) où une relation de proportionnalité pouvait servir de modèle : les besoins de connaissances mathématiques et didactiques sur la modélisation conduisent les professeures à enseigner les solutions plutôt qu'à faire étudier les problèmes.

Concernant la dimension algébrique de la situation, P3 a d'emblée énoncé un enjeu de généralisation au premier entretien. Elle souhaite voir les élèves « réussir à trouver les dimensions pour une boîte quelconque, de la feuille de départ » sans faire référence à l'algèbre qui est pourtant au programme des classes de 4e et 3e. D'ailleurs, la résolution d'équation très présente dans ces programmes n'est pas même mentionnée. De leur côté, c'est a posteriori que P1 et P2 reconnaissent cette dimension. Pour P1 : « c'est aussi ça, l'algèbre, c'est, voilà, c'est les relations entre des mesures, des quantités et qu'on peut en les liant d'une certaine façon trouver autre chose, donc pour moi oui c'était on va dire officieux » tandis que pour P2 « c'est les prémices, c'était intéressant de le voir comme ça aussi et d'avoir un pied déjà sans le formaliser ». Enfin, les deux professeures en collège (P2 et P3) considèrent qu'il manque une question qui demande la généralisation des liens entre les dimensions de la feuille et de la boîte et P3 suggère l'ajout de la question : « émettre une conjecture, quelle est la relation entre les dimensions de la feuille et les dimensions de la boîte? » Cette proposition de la part des deux professeures révèle en creux un rapport à l'enseignement des mathématiques : il n'est pas envisagé l'intérêt de faire percevoir par les élèves la raison d'être des savoirs à travers leur émergence en cours de résolution de problèmes. L'algèbre comme outil de modélisation par généralisation des cas étudiés ne peut pas être perçu par lui-même, il faut qu'il soit explicitement demandé.

4. Discussion et conclusion

Cet article se focalise sur la direction de l'étude d'un problème de modélisation avant et après l'introduction de l'algèbre. Il aborde ainsi une problématique complémentaire à celle de Oliveira et al. (2017) qui s'intéressent aux praxéologies des élèves avant et après l'enseignement de l'algèbre dans la résolution de problèmes inéquitables. Nous retenons de leurs travaux que, comme dans l'étude de problèmes de généralisation (Wozniak, 2020), les élèves peuvent résoudre de tels problèmes avant l'apprentissage formel de l'algèbre élémentaire. Nous retenons aussi le peu de différences entre les résultats des élèves au secondaire 1 par rapport aux élèves au secondaire 2 et le fait que plus la structure du problème de partage inéquitable est complexe, plus les élèves recourent aux essais numériques :

> Il est possible que lorsque la structure du problème est plus complexe, les élèves cherchent des procédures avec lesquelles ils se sentent plus confortables. Ainsi, la procédure algébrique étant récente pour eux, ils la laisseraient de côté pour privilégier une procédure qu'ils maîtrisent mieux afin de se centrer sur les relations plus complexes. (Oliveira et al., 2017, p. 177)

Nous avons observé un phénomène semblable : les mêmes techniques sont spontanément utilisées dans les différentes classes, même s'il y a eu développement de praxéologies de type algébrique pour un nombre croissant d'élèves avec l'avancée dans le curriculum.

Nous considérons qu'il y a trois dimensions dans le travail épistémologique du professeur. La non-identification de deux solutions suivant le type de pliage relève de la dimension mathématique de ce travail et a une incidence sur sa dimension didactique en ne permettant pas d'anticiper d'éventuelles difficultés ou incompréhensions et en ne favorisant pas le travail de définition du système dans le processus de modélisation. Quant à la dimension épistémologique, elle se révèle dans le discours de P2 et P3 qui considèrent que le travail en algèbre commence avec la demande explicite d'une généralisation. Elle se révèle aussi par un rapport à la modélisation et à l'activité mathématique scolaire à travers les discours et les pratiques observées. Comme dans Wozniak (2012), les professeures enseignent les solutions plutôt que les moyens de les construire et développent des praxéologies de modélisation muettes. Ici, le résultat est une boîte qui sert à valider le travail mathématique à réaliser. Ceci peut expliquer le temps long réservé à l'appropriation du procédé de fabrication dans les classes de P1 et P2. Nous faisons une autre hypothèse : le rapport à la manipulation et à l'expérimental écraserait le travail mathématique lui-même alors même que P3 mentionne ce risque : « Est-ce qu'ils vont chercher le côté mathématique ou est-ce qu'ils vont juste chercher à construire sans chercher une méthode pour que ça marche tout le temps ». Un élément semble corroborer cette hypothèse : aucune des professeures n'a exploité le potentiel de la schématisation des plis (par exemple dans la figure 3) base de développement des techniques de types algébriques ou algébriques. C'est en dépliant et repliant les boîtes que les professeures ont accompagné les élèves dans la construction de la technique τ_{calcul} ou l'ont explicitée. Lors d'une mise en commun, P1 réalise un schéma qui ne reprend pas les plis et P2 s'appuie sur une photo de la notice vidéoprojetée (voir figure 5).

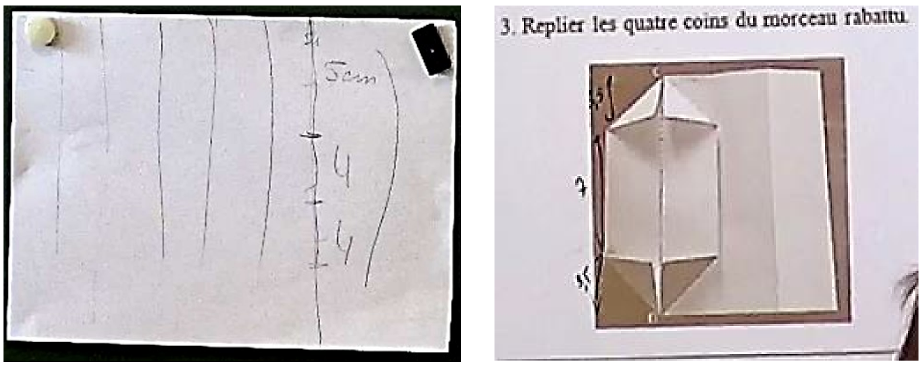


Figure 7. Schémas réalisés par P1 (à gauche) et P2 à partir d'une photo vidéoprojetée (à droite).

Cette absence de schématisation peut expliquer qu'alors que les trois professeures ont incité les élèves à diviser la longueur par 6 pour réaliser les pliages, la technique τ_{mesure} (il s'agit de compléter le dessin du fond de boîte par les plis associés puis mesurer les dimensions) n'a pas été utilisée par les élèves. Un binôme en CM2 a commencé à faire un dessin mais, interrompu par la récréation, n'a pas poursuivi dans cette direction.

Si le critère d'analycité permet de distinguer arithmétique et algèbre, il ne suffit pas à rendre compte de l'évolution praxéologique. Notre étude est aussi l'occasion d'expliciter ce continuum (tableau 6) : praxéologies numériques où généralisation et indéterminée sont absentes, praxéologies de type algébrique où les techniques sont numériques, mais les technologies qui les justifient relèvent de l'algèbre et enfin les praxéologies algébriques.

Tableau 6. Le continuum praxéologique

Praxéologies	numérique	type algébrique	algébrique
Techniques	arithmétique	arithmétique	algèbre
Technologies	arithmétique	algèbre	algèbre
Caractérisations	Indéterminée et généralisation sont absentes	Indéterminée, analycité; généralisation factuelle ou contextuelle	Indéterminée, dénotation, analycité; généralisation symbolique

Pour conclure, nous revenons sur les deux questions que nous avons posées en introduction. La première question portait sur les besoins de connaissances mathématiques, didactiques et épistémologiques des professeures dans ce type de situations. Nous faisons l'hypothèse que le manque de familiarité avec le processus de modélisation vient gêner, dans l'étude de ce problème, le développement de praxéologies algébriques. Il y a un changement de paradigme scolaire qui fait de la modélisation autant un objet d'enseignement qu'un processus d'enseignement (Wozniak, 2019a) et qui n'est pas spécifique à la France (Barquero et al., 2018). La modélisation doit permettre l'émergence de nouveaux savoirs, faciliter leur étude et en faire percevoir la raison d'être. Ces observations en confirment d'autres (Wozniak, 2012, 2020), les professeurs français ne semblent pas prêts.

La seconde question visait à identifier comment le curriculum influence les choix du professeur pour diriger l'étude de ce type de problèmes. Même si les professeures développent des discours propres au programme d'enseignement du niveau où elles interviennent, ce sont des pratiques communes qui s'observent : une même technique τ_{calcul} valorisée, un rôle prépondérant à la manipulation et, corrélativement, une absence de schématisation des plis. L'enjeu algébrique, pourtant permis par l'activité proposée et conforme au programme scolaire de deux classes, ni la modélisation comme objet de savoir à enseigner ne sont présents dans aucun de nos cas d'étude. Nous faisons l'hypothèse que le manque de connaissances mathématiques et didactiques sur le processus de la modélisation est un déterminant didactique plus important que celui des curricula.

Dans cet article, nous avons considéré la résolution d'un problème de modélisation de situations extra-mathématiques. Ce que nous avons observé confirme de premières observations (Wozniak, 2012) concernant les besoins de connaissances mathématiques et didactiques des professeurs sur la modélisation. Si le problème considéré est porteur de praxéologies de types algébriques dès le cycle 3 qui pourraient évoluer vers des praxéologies algébriques au cycle 4, nous faisons le constat que, dans le contexte de formation actuel des professeurs en France, ce n'est peut-être pas le type le plus approprié. Il resterait à identifier quel type de problème de modélisation serait davantage porteur. Pour l'heure, comme nous l'avons montré dans Wozniak (2020), les problèmes de généralisation semblent être des types de problèmes de modélisation mieux adaptés, ce qui plaiderait pour leur introduction dans le curriculum dès le cycle 3 en France, comme c'est le cas, par exemple, en Belgique (Demonty et Vlassis, 2018).

Références

Barquero, B., Florensa, I., Jessen, B., Lucas, C. et Wozniak, F. (2018). The external transposition of inquiry in mathematics education: impact on curriculum in different countries. Dans Y. Shimizu et R. Vithal (dir.), *School Mathematics Curriculum Reforms: Challenges, Changes and Opportunities. Actes de colloque du International Commission on Mathematical Instruction* (p. 189-197). University of Tsukuba,.

Barquero, B., Bosch, M. et Wozniak, F. (2019). Modelling praxeologies in teacher education: the cake box. Dans U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen et M.Veldhuis (dir.), *Proceedings of the 11th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, (p. 1144-1151). Utrecht University.

Bednarz, N., Kieran, C. et Lee, L. (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*. Kluwer Academic Publishers.

Blum, W. H.-J. et Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45-58.

Blum, W. H.-J., Galbraith, P., Henn, H-W. et Niss, M. (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study.* Springer.

Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(1), 77-124.

Cattoën, M.-O. (2020). *Étude des besoins de connaissances des enseignants pour accompagner vers le développement de praxéologies algébriques à partir d'une situation de modélisation.* [Mémoire de maitrise inédit]. Université de Montpellier.

Champy, F. (2012). *La sociologie des professions (2e éd.).* Presses universitaires de France

Chappaz, J. et Michon, F. (2003). La boîte du pâtissier. *Grand N*, *72*, 19-32.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, *19*, 43-75.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Demonty, I. et Vlassis, J. (2018). *Développer l'articulation arithmétique-algèbre*. De Boeck.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. et Ng, S. F. (2016). *Early algebra ICME-13 topical surveys*. Springer Open.

Matheron, Y. (2018). Éléments d'un parcours d'étude et de recherche pour enseigner l'algèbre au cycle 4. *Petit x*, *108*, 67-86

Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche (2015). *Programme d'enseignement de l'école élémentaire et du collège.* Bulletin officiel spécial n°11 du 26 novembre 2015.

Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche (2016). *Le calcul en ligne au cycle 3.* Éduscol.

Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports (2018). *Programmes d'enseignement. Cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), cycle de consolidation (cycle 3) et cycle des approfondissements (cycle 4) : modification.* Bulletin officiel de l'éducation nationale n°30 du 26 juillet 2018.

Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports (2019a). *Attendus de fin d'année Mathématiques 5e*. Éduscol.

Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports (2019b). *Attendus de fin d'année Mathématiques 4e*. Éduscol.

Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports (2019c). *Attendus de fin d'année Mathématiques 3e*. Éduscol.

Oliveira, I., Rhéaume, S. et Geerts, F. (2017). Apprentissage de l'algèbre : procédures et difficultés rencontrées lors de la résolution de problèmes. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, *20* (3), 156–180. https://doi.org/10.7202/1055732ar

Perrenet, J. et Zwaneveld, B. (2012). The many faces of the mathematical modeling cycle. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(6), 3-21.

Programme for International Student Assessment. (2006). *Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A Framework for PISA*. Organisation de cooperation et de développement économiques.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70.

Radford, L. (2004). La généralisation mathématique comme processus sémiotique. Dans G. Arrigo (dir.), *Atti del Convegno di didattica della matematica 2004* (p. 1-27). Divisione della Scuola.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 257-277. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Squalli, H. (2016). Évolution des travaux de recherche en didactique de l'algèbre : de la transition arithmétique-algèbre au courant Early Algebra. *Cours de la 2e École de didactique des mathématiques EDM 2016*.

Squalli, H. (2020). Early algebra : genèse d'un domaine de recherche, évolution et perspectives. Dans H. Squalli, I. Oliveira, A. Bronner et M. Larguier (dir.), *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires* (p. 5-21). Livres en ligne du CRIRES. https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches

Squalli, H., Larguier, M., Bronner, A. et Adihou, A. (2020). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 22*(1), 36-62. https://doi.org/10.7202/1070024ar

Wozniak, F. (2012). Des professeurs des écoles face à un problème de modélisation : une question d'équipement praxéologique. *Recherches en didactique des mathématiques, 32*(1), 7-55.

Wozniak, F. (2019a). Enseigner les mathématiques au début du XXIe siècle. *Didactiques en pratique*, *5*, 27-36.

Wozniak, F. (2019b). Fondements du travail épistémologique du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques*, *39*(1), 15-50.

Wozniak, F. (2020). Les problèmes de généralisation au cœur de la transition arithmétique-algèbre. Une étude française. Dans H. Squalli, I. Oliveira, A. Bronner et M. Larguier (dir.), *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherche et perspectives curriculaires* (p. 44-70). Livres en ligne du CRIRES. https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches

Annexe 1 : Les deux documents envoyés aux professeurs.

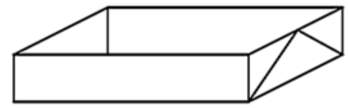
MISSION CONSTRUCTION

Les élèves sont des ingénieurs d'une usine qui fabrique des boîtes selon un procédé par pliage décrit dans la notice ci-jointe.

Le but de l'activité est d'étudier comment construire des boîtes en respectant différentes contraintes.

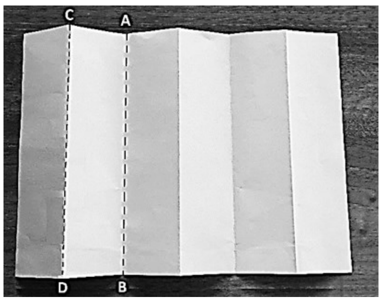
1. Construire une boîte à partir de la notice fournie.
2. a) Construire une boîte à fond carré.
   b) Quelles doivent être les dimensions de la feuille pour obtenir une boîte avec un fond carré de côté 7 cm?
3. a) Construire une boîte à fond rectangulaire.
   b) Quelles doivent être les dimensions de la feuille pour obtenir une boîte avec un fond rectangulaire de 5 cm par 8 cm?
4. Sans les construire, prévoir les dimensions des boîtes obtenues avec des feuilles rectangulaires de 18 cm par 24 cm.
5. Vrai ou faux?
   a) Il n'est pas possible de construire une boîte à fond carré à partir d'une feuille rectangulaire de 12 cm par 24 cm.
   b) Il est possible de fabriquer une boîte avec un fond rectangulaire de 8 cm par 4 cm et une hauteur de 4 cm.
   c) Il n'est pas possible de fabriquer une boîte avec un fond rectangulaire de 8 cm par 6 cm et une hauteur de 2 cm.

NOTICE DE FABRICATION DE LA BOÎTE

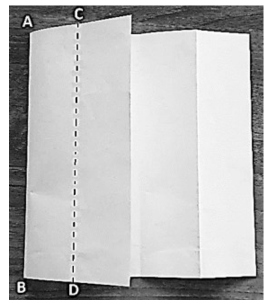


La notice suivante décrit les étapes permettant de construire une boîte.

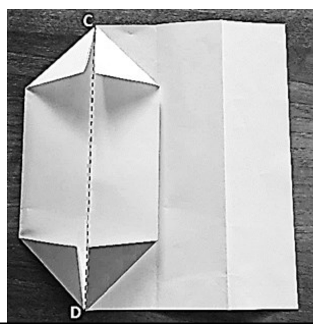
1. Partager la feuille en six bandes égales par un pliage en accordéon.



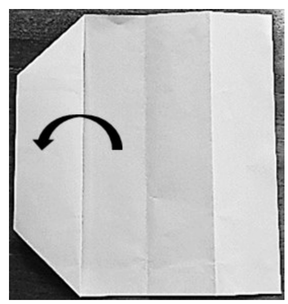
2. Rabattre vers l'intérieur la partie gauche de la feuille suivant (AB).



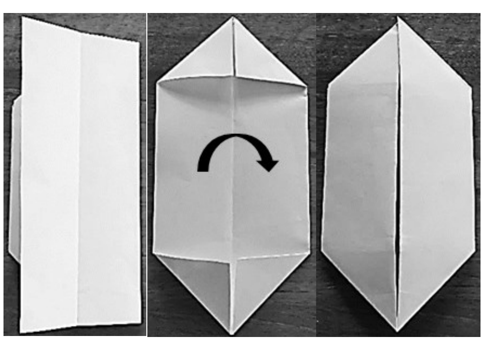
3. Replier les quatre coins du morceau rabattu.



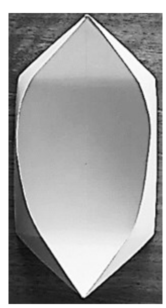
4. Rabattre vers l'extérieur suivant (CD).



5. Faire la même chose avec le côté droit de la feuille.



6. Ouvrir par le milieu et marquer les plis du fond de la boîte et de sa hauteur.



Annexe 2. : Description des techniques valides et des théories Θ qui les fondent, associées aux deux types de tâches T1 et T2

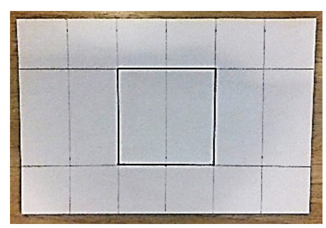
T1 : Déterminer les dimensions de la feuille pour construire une boîte de dimensions données

$\tau_{ajustement}$: Ajuster les dimensions de la feuille (par découpage) jusqu'à obtention par pliage des dimensions de la boîte demandées.

1. Construire une boîte.
2. Mesurer les dimensions du fond de la boîte.
3. Découper l'une et/ou l'autre dimension de la feuille pour réduire l'une et/ou l'autre dimension du fond de la boîte qui sera ensuite construite.
4. Renouveler les opérations 1, 2, 3 jusqu'à obtention des dimensions recherchées de la boîte.

τ_{mesure} : Mesurer les dimensions de la feuille après avoir dessiné le fond de la boîte aux dimensions voulues, puis les plis associés à sa construction.

1. Déplier une boîte déjà construite pour identifier les différents plis.
2. Tracer le fond de la boîte aux dimensions recherchées, au centre d'une feuille.
3. Compléter le dessin de sorte que les segments dessinés représentent les plis de la feuille.
4. Découper le surplus de feuille.
5. Construire la boîte.



τ_{calcul} : Calculer les dimensions de la feuille à partir du repérage du lien entre les plis de construction et les dimensions de la boîte.

1. Déplier (au moins en partie) une boîte déjà construite pour identifier les différents plis.
2. Schématiser les différents plis, puis identifier sur ce schéma les plis correspondant au fond de la boîte.
3. Identifier ou coder les reports de longueur.
4. Additionner les longueurs ainsi déterminées pour obtenir les dimensions de la feuille correspondante.

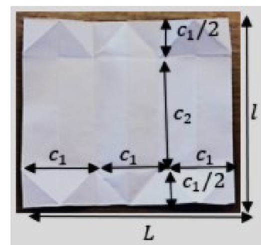
$\tau_{relation}$: Etablir les relations entre les dimensions du fond de la boîte et les dimensions de la feuille

1. Déplier (au moins en partie) une boîte déjà construite pour identifier les différents plis.
2. Repérer les plis qui forment le fond de la boîte.
3. Déterminer les relations entre les dimensions de ce fond de boîte et celles de la feuille. Ce qui amène à :

   $L = 3c$ et $l = 2c$ dans le cas d'une boîte carrée

   $L = 3c_1$ et $l = c_1 + c_2$ dans le cas d'une boîte rectangulaire construite à partir du pliage de type *Pla*

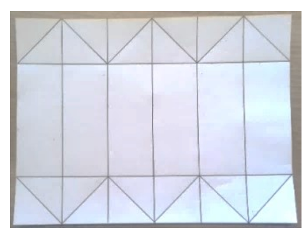
   $L = 3c_2$ et $l = c_1 + c_2$ dans le cas d'une boîte rectangulaire construite à partir du pliage *PLo*.



T2 : Déterminer, sans la construire, les dimensions du fond des boîtes obtenues à partir de feuilles de dimensions données.

τ_{mesure^*} : Mesurer les dimensions du fond de la boîte en dessinant les plis sur la feuille de dimension données.

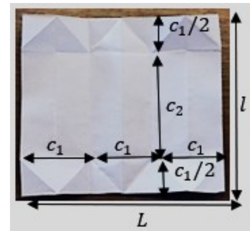
1. Déplier une boîte déjà construite pour identifier les différents plis.
2. Sur la feuille de dimensions données, reproduire en les traçant, ces plis.
3. Mesurer le rectangle représentant le fond de la boîte qu'on obtiendrait en effectuant le pliage.



τ_{calcul^*} : Calculer les dimensions de la boîte à partir du schéma d'une boîte dépliée.

1. Déplier une boîte déjà construite pour identifier les différents plis.
2. Schématiser les différents plis, puis représenter sur ce schéma les dimensions de la feuille, données par l'énoncé.
3. Identifier ou coder les reports de longueur.
4. Calculer le tiers d'une dimension de la feuille pour obtenir la première dimension du fond de la boîte, puis enlever à la deuxième dimension de la feuille ce nombre pour calculer la deuxième dimension du fond de la boîte.

$\tau_{relation^*}$: Etablir les relations entre les dimensions de la feuille et les dimensions du fond de la boîte.



1. Déplier (au moins en partie) une boîte déjà construite.
2. Repérer les plis qui forment le fond de la boîte.
3. Déterminer les relations entre les dimensions de la feuille et celles du fond de la boîte. Ce qui amène à :

   $c_1 = \frac{L}{3}$ et $c_2 = l - c_1$ dans le cas d'une boîte rectangulaire construite à partir du pliage *Pla*

   $c_1 = \frac{l}{3}$ et $c_2 = L - c_1$ dans le cas d'une boîte rectangulaire construite à partir du pliage *PLo*.

$\tau_{relation\text{-}inverse^*}$: Reprendre les relations obtenues avec la technique $\tau_{relation}$ et les « retourner ».

1. Reprendre les relations $L = 3c_1$ et $l = c_1 + c_2$ dans le cas d'une boîte rectangulaire construite à partir du pliage *Pla* et $l = 3c_1$ et $L = c_1 + c_2$ dans le cas d'une boîte rectangulaire construite à partir du pliage *PLo*.
2. Déduire de ces relations les expressions de c_1 et c_2. Ce qui amène à :

   $c_1 = \frac{L}{3}$ et $c_2 = l - c_1$ avec le pliage *Pla*

   $c_1 = \frac{l}{3}$ et $c_2 = L - c_1$ avec le pliage *PLo*.