Décomposer et composer les nombres sous vingt : une opportunité pour introduire l’équivalence quantitative

Anne-Marie RINALDI
LIRDEF, Univ Montpellier, Univ Paul Valéry Montpellier 3, Montpellier, France
anne-marie.rinaldi@univ-montp3.fr

Résumé : Dans cet article, nous étudions l’impact que peut avoir l’utilisation de la technique de calcul en appui sur dix sur la construction de la notion d’équivalence quantitative. Nos analyses, à la suite de la mise en œuvre de trois séances d’un même dispositif d’enseignement dans deux classes en France (élèves de 7 à 8 ans), renseignent sur les difficultés que les élèves ont à utiliser et à se détacher du matériel ainsi que sur les médiations opérées par les enseignants pour les conduire à produire des expressions numériques équivalentes.

Mots-clés : apprentissage, calcul, école élémentaire, relation d’équivalence

Decomposing and composing numbers to add within twenty: introducing the notion of quantitative equivalence

Abstract: In this article, we study how using “make a ten” strategies help students grasp the concept of quantitative equivalence. Students from two classes in France (aged 7 to 8) were taught the same strategy during three class sessions. We analysed their difficulties in adopting the strategies and transitioning from manipulatives, as well as the methods teachers used to guide students to produce equivalent numerical expressions.

Keywords: learning process, adding, elementary school, equivalence relation

Introduction

L’objet de cet article est de montrer en quoi le fait de décomposer et composer additivement les nombres en s’appuyant sur le nombre dix peut s’avérer pertinent pour travailler l’équivalence quantitative avec des élèves de 7 à 8 ans. Mais avant de préciser nos hypothèses de recherche, nous donnons les raisons qui nous ont incitée à nous interroger sur l'enseignement et l'apprentissage du calcul sous vingt dans le système d'enseignement français.

Nous partons du principe que tout calcul élémentaire, mental ou posé, nécessite de s'appuyer sur un ensemble de faits numériques, donc de résultats mémorisés et disponibles immédiatement ou de résultats retrouvés rapidement. C'est pourquoi nous nous intéressons spécifiquement à l'apprentissage du répertoire additif sous vingt. Ce répertoire englobe les tables d'addition des dix premiers nombres entiers et toutes les décompositions et recompositions des nombres inférieurs à vingt.

Or, plusieurs études en psychologie cognitive, notamment celle de Gersten et al. (2005), convergent vers un même constat : les élèves ayant des difficultés en mathématiques en deuxième année d'école élémentaire se souviennent de beaucoup moins de faits numériques que les autres élèves et n'arrivent pas à les utiliser pour les combiner. En outre, les études de Siegler (1987) et de Baroody (2006) montrent que, pour trouver la somme de deux nombres inférieurs à dix, l'enfant de 5 à 8 ans va progressivement et à des rythmes différents, abandonner l'usage du comptage au profit d'autres stratégies de calcul basées sur la décomposition et la recomposition des nombres. La dernière étape du processus conduit alors à récupérer directement la réponse dans la mémoire à long terme.

Par ailleurs, une autre recherche conduite par Geary et ses collaborateurs (Geary et al., 1992) a permis de comparer le choix de stratégies pour effectuer un calcul additif sous vingt, entre deux groupes d'élèves, du même âge, 6-7 ans, scolarisés en Chine et aux États-Unis. Deux différences significatives sur la nature des stratégies ont pu être pointées. Le comptage est la principale stratégie utilisée par les enfants américains. Les enfants chinois utilisent la combinaison [1] pour 68 % des essais, alors que les enfants américains utilisent cette stratégie sur 13 % des essais. Pour Fuson et al. (1991), combiner serait plus facile pour les élèves asiatiques, car la langue chinoise, contrairement à la langue anglaise, permettrait d'entendre explicitement les groupements par dix quand ceux-ci sont présents. Une autre étude longitudinale conduite par Geary et al. (1996) sur chacune des trois premières années de l'école élémentaire (élèves de 6 à 9 ans) confirme la prédominance du comptage aux États-Unis, qu'il soit associé à l'usage des doigts ou verbal, et ce, jusqu'en troisième année d'école élémentaire. A contrario, en Chine, dès la deuxième année d'école élémentaire, ces stratégies sont abandonnées

---

1 Pour calculer une somme $a + b$ par combinaison (a et b entiers), on décompose l'un des termes du calcul par exemple b en $c + d$ (c et d entiers) et on effectue $(a + c) + d$ ou $(a + d) + c$. Cette stratégie repose sur la décomposition et la recomposition des nombres entiers.

au profit de la récupération en mémoire à long terme de résultats connus. Ces chercheurs, pour expliquer ce contraste, reprennent l'argument qui consiste à comparer la numération orale asiatique et la numération orale anglaise, mais avancent également un autre argument d'ordre interculturel : les attentes des enseignants, des parents et des élèves dans les pays asiatiques, en matière de maîtrise des faits numériques, c'est-à-dire des résultats récupérés directement dans la mémoire à long terme se traduisent par un plus grand investissement en temps, tant à l'intérieur qu'à l'extérieur de l'école.

L'ensemble des facteurs évoqués pour expliquer les différences significatives produites par les deux systèmes d'enseignement du calcul sous vingt nous porte à penser que le système d'enseignement français est, tout comme celui des États-Unis, assez éloigné culturellement des systèmes asiatiques. Nous supposons alors que si tel est le cas, l'école élémentaire française a produit et produit peut-être encore comme stratégie principale de calcul une stratégie basée sur le comptage et qu'elle ne garantit peut-être pas une maîtrise suffisante et pourtant nécessaire des faits numériques avant l'entrée en troisième année d'école élémentaire.

Sur cette hypothèse, nous avons cherché à concevoir en collaboration[2] avec trois professeurs des écoles maîtres formateurs[3] un dispositif d'enseignement pour la seconde année d'école élémentaire française (élèves de 7 à 8 ans) qui favoriserait l'utilisation de stratégies basées sur la combinaison. Outre le fait que ces stratégies de combinaison permettent d'introduire une autre technique que le comptage, leurs mises en œuvre impliquent de remplacer le calcul initial de la somme $a + b$ par une autre somme obtenue en décomposant par exemple b en $c + d$. En ce sens, ces stratégies de combinaison contribuent à une meilleure maîtrise des faits numériques sous dix et à donner du sens à l'équivalence quantitative entre deux expressions numériques de la forme $a + b$ et $a + c + d$.

Dans cet article, nous étudions précisément l'impact que peut avoir l'utilisation de l'une de ces techniques de combinaison, en l'occurrence « la technique de calcul en appui sur dix » sur la construction de la notion d'équivalence quantitative.

Dans une première partie, nous présentons notre cadre théorique d'analyse. Cela nous amène à penser et à justifier l'utilisation de certains objets matériels et

[2] Notre recherche a été conduite dans un groupe de l'Institut de recherche de l'enseignement des sciences (IRES) de Montpellier.

[3] Un professeur d'école maître formateur (PEMF) est un enseignant du premier degré qui contribue à la formation initiale et continue des enseignants du premier degré. Il est déchargé d'une partie de son enseignement pour mener à bien sa mission de formation.

symboliques pour, d'une part, introduire la technique en appui sur dix et, d'autre part, travailler conjointement sur la notion d'équivalence quantitative.

Dans une seconde partie, nous présentons l'ensemble du dispositif d'enseignement, le contexte de l'étude et la méthodologie d'analyse que nous retenons.

Dans une troisième partie, nous nous appuyons sur l'expérimentation de trois séances du dispositif dans deux classes pour relever et analyser un ensemble de difficultés rencontrées par les élèves pour produire des collections et/ou des expressions numériques équivalentes. Nous analysons également la manière dont l'enseignant, par son discours, par l'introduction de symboles cherche à faciliter le passage du monde des objets matériels au registre des écritures arithmétiques et inversement. Nous présentons nos résultats avant de revenir dans la conclusion, sur les potentialités de l'étude, pour engager un processus de conceptualisation de la notion d'équivalence quantitative chez les élèves au début de l'école élémentaire.

1. Cadre théorique d'analyse

Tout d'abord, nous nous référons aux travaux de Radford (2008, 2011) pour penser les objets mathématiques que sont les nombres sous vingt dans le but d'enseigner une technique de calcul basée sur la décomposition et recomposition des nombres. Par la suite, nous présentons et justifions le matériel choisi pour représenter les nombres sous vingt. Dans le prolongement, nous caractérisons une technique de composition et de recomposition des nombres, en l'occurrence la technique de calcul en appui sur dix, en nous appuyant sur la théorie anthropologique de la didactique [TAD] développée par Chevallard (2002). Pour finir, nous explicitons en quoi l'enseignement de cette technique constitue un moyen pour travailler la notion d'équivalence quantitative avec des élèves de 7 à 8 ans.

1.1 Penser les nombres sous vingt et leur enseignement

Nous partageons l'idée développée par Radford (2008) que nous apprenons au contact du monde matériel, du monde des objets, des artefacts culturels qui nous entourent, mais que pour apprendre à partir de ces objets il est nécessaire de les utiliser dans des activités et d'interagir avec d'autres personnes qui savent déchiffrer les contenus intellectuels propres à ces objets. C'est cette dimension sociale qui constitue ce que Radford appelle un « processus d'objectivation », c'est-à-dire un processus social de prise de conscience progressive d'un objet culturel qui permettra de percevoir graduellement les couches de généralité d'un objet. L'apprentissage consiste à apprendre à reconnaître ou à percevoir ces couches de généralité.

> Comme l'apprentissage est ré-flexion, apprendre suppose un processus dialectique entre sujet et objet médiatisé par la culture, un processus dans lequel, à travers son action (sensorielle ou intellectuelle), le sujet vient prendre conscience de l'objet. (Radford, 2011, p. 12)

Le rôle de l'enseignant dans la théorie de l'objectivation est alors de proposer aux élèves des activités riches mettant en scène, de manière adaptée, la rencontre avec d'autres voix et les diverses strates de généralité de l'objet culturel.

Dans le cas de notre étude, nous supposons que l'objet mathématique « nombre sous vingt » est culturellement identifié comme le résultat d'un comptage (cf. introduction de l'article) et que ce nombre peut être perçu à un autre niveau de généralité comme autre chose qu'une itération de l'unité.

En ce sens, notre étude s'inscrit dans la continuité des travaux de recherche de Vilette et al. (2017), car nous allons être amenés à proposer des tâches de calcul dans le registre des écritures arithmétiques qui donnent justement à voir les décompositions et recompositions des nombres.

Mais avant d'arriver à ces écritures symboliques, en nous référant aux travaux de Vlassis et Demonty (2019), nous pensons qu'il est possible de proposer un ensemble de tâches liées à la manipulation effective où les élèves seraient amenés à communiquer à propos de leurs procédures en utilisant un ensemble de signes, et plus précisément un langage oral ou écrit, formel ou informel.

> C'est l'ensemble de ce processus de conceptualisation médiatisé par les interactions sociales et par les signes qui se trouve au cœur des apprentissages mathématiques. (Vlassis et Demonty, 2019, p. 101)

Dans le paragraphe suivant, nous présentons les représentations des nombres sous vingt que nous retenons pour donner accès au « second » niveau de conceptualisation de ces nombres dans le but de travailler la composition et la recomposition.

1.2 Représenter les nombres sous vingt

Le calcul sous vingt s'applique à des nombres entiers inférieurs ou égaux à dix. La plus grande somme que l'on puisse obtenir est dix plus dix soit vingt. L'une des caractéristiques des nombres entiers inférieurs à vingt est qu'il est relativement facile de les représenter grâce à des configurations de doigts, des dessins, des schémas; sur ces dessins, ces schémas, on peut éventuellement « montrer » que onze égale dix plus un et que chaque nombre compris entre dix et dix-neuf correspond à dix plus « … » avec « … » compris entre zéro et neuf.

En outre, une idée notamment défendue et largement diffusée par Brissiaud (2007, 2015) consiste à penser qu'il n'y a pas une mais deux façons d'amener les très jeunes enfants à connaître les nombres un, deux puis trois : la première étant basée sur le comptage, et la seconde sur la décomposition des nombres. Avec la seconde approche, pour dénombrer par exemple une collection de trois éléments, l'enfant peut dire un, et encore un, et encore un; deux et encore un; un et encore deux ou directement trois. Les mots nombres prononcés désignent à chaque fois des quantités et ne sont pas prononcés après avoir effectué un comptage. En effet, selon Gelman (1983) et Fayol (2015), certaines expériences conduites auprès de jeunes enfants montrent que le subitizing, donc la capacité à percevoir globalement, « d'emblée » est présente pour les petites collections.

Pour Mandler et Shebo (1982) le processus de reconnaissance serait lié aux arrangements spatiaux qui varient peu pour les petites quantités et seraient donc facilement reconnaissables. La quantité un ne pourrait ainsi être représentée que par un point, deux points formeraient nécessairement une ligne, et le modèle de trois sous la forme d'un motif triangulaire serait aisément perceptible. Pour quatre et au-delà de quatre la variabilité des configurations augmentant, toute reconnaissance immédiate deviendrait plus difficile. Pour Brissiaud (2015) :

> Le processus de compréhension des nombres au-delà de 5 ne se déroule pas à l'identique de celui des premiers nombres du fait que le nombre 5, celui des doigts d'une main, joue un rôle crucial dans la compréhension des nombres de 6 à 10. (Brissiaud, 2015, p. 1)

Le rôle crucial du nombre 5 est également exposé dans un article de Flexer (1986). Dans cet article, la chercheuse propose d'utiliser un « modèle concret de nombres » inspiré d'un modèle utilisé au Japon par l'Association of Mathematical Instruction (AMI), mis au jour par Hatano (1980, cité dans Flexer, 1986) et Ginbayashi (1984, cité dans Flexer, 1986), qui utilise des combinaisons de matrices carrées « simples » et de matrices rectangulaires 1 x 5 pour créer des représentations de nombres.

Les réglettes dites Cuisenaire du nom de leur concepteur Georges Cuisenaire (1891-1951) tout comme les matrices rectangulaires de Flexer (1986), Hatano (1980) et Ginbayashi (1984) produisent également des « modèles » de nombres. En effet la « 1-réglette » mesure 1 centimètre sur 1 centimètre sur 1 centimètre. Elle est définie comme la réglette unité et correspond au nombre 1. La « n-réglette » mesure n centimètres sur 1 centimètre sur 1 centimètre et correspond au nombre n. Les couleurs spécifiques de chaque réglette ne sont là que pour aider à la mémorisation des nombres qui leur sont associés. Avec ces deux modèles de nombres, le fait de pouvoir mettre bout à bout, de mettre juste dessous deux ou plusieurs réglettes, respectivement plusieurs matrices conduira ainsi à comparer directement des longueurs, à les additionner et à les soustraire. L'un des avantages de ces manipulations effectives par le geste et la vue est leur simplicité et le fait que tout résultat puisse être validé par une comparaison de longueur sans avoir besoin de passer par le comptage ou le surcomptage.

Dans le prolongement, nous pensons que le processus de compréhension des nombres au-delà de dix ne se déroule pas de la même manière que pour les nombres sous dix, car le nombre dix joue un rôle majeur dans nos deux systèmes de numération, parlée et écrite. En effet ces deux systèmes sont tous deux basés sur le groupement par dix.

Par ailleurs, nous estimons qu'utiliser plus d'un type de matériel pour représenter les nombres sous vingt peut contribuer à accéder plus facilement à ce que Radford considère comme étant des couches de généralité (cf. 1.1). En effet, cela amène à construire la quantité comme une grandeur qui ne prend pas en compte les dimensions, les couleurs ou d'autres critères que la quantité. De plus, quand les deux types de matériel mettent chacun à leur manière en évidence des groupements et notamment le groupement par dix, cela permet d'accéder à une seconde couche de généralité déjà évoquée précédemment : chaque nombre compris entre dix et dix-neuf correspond à dix plus « … » avec « … » compris entre zéro et neuf. Pour finir, un dernier enjeu serait d'enclencher un processus de décontextualisation qui favorise probablement la conceptualisation.

Notre choix s'est alors porté sur l'introduction d'un matériel « les bandes » qui permet de représenter tous les nombres sous vingt grâce à deux bandes de longueur dix, et neuf bandes de longueur allant respectivement de un à neuf. Ce matériel se rapproche des matrices carrées de Hatano (1980), de Ginbayashi (1984) et Flexer (1986) tout en étant différent, car chaque bande est un objet en papier à double face. Sur l'une des faces, on trouve x cases de même aire et sur l'autre face, le nombre x est écrit en chiffre. L'autre matériel correspond aux configurations de doigts. Ce matériel, familier aux élèves de France, favorise également tous types de groupement et en particulier le groupement par dix. Il amène également à visualiser directement les résultats grâce à des configurations « stables » que l'enfant a souvent rencontrées et mémorisées. Par exemple six doigts correspondent à trois doigts sur une main et trois doigts sur l'autre main ou à une main entière et un doigt sur l'autre main ou encore une main sans le pouce et deux autres doigts, dix correspond à deux mains levées. Le matériel « les doigts », en revanche, ne donne pas la possibilité de valider des résultats.

Dans le paragraphe suivant, nous exposons d'autres arguments, directement reliés au calcul, qui incitent à s'appuyer sur les décompositions de dix et les décompositions des nombres inférieurs à dix pour construire les décompositions et les recompositions sous vingt.

1.3 Calculer sous vingt

Si nous considérons la tâche qui consiste à chercher mentalement[4] le résultat de a plus b avec a et b nombres entiers inférieurs à dix, plusieurs techniques sont envisageables. Or, chacune de ces techniques, en se référant à la TAD, est justifiée par une technologie qui permet en même temps de la penser, voire de la produire. Nous présentons ci-après un classement qui s'appuie sur les spécificités de ces techniques puis les éléments de technologie qui se réfèrent à la technique en appui sur dix.

1.3.1 Classement des techniques de calcul sous vingt

Le comptage. Pour effectuer cinq plus trois, il s'agit de compter : « un, deux, trois, quatre, …, huit ». Cette technique, pour être appliquée correctement, suppose que certains principes explicités dans Bideaud et al. (1991) soient acquis. Elle devient difficile à mettre en œuvre dès que la somme des deux termes est supérieure à dix.

Le surcomptage. Pour effectuer cinq plus trois, il s'agit de compter à partir de cinq, le nombre de fois indiqué par le nombre trois : « six, sept, huit ». Cette technique, si elle est maîtrisée, peut s'avérer économique, c'est-à-dire peu coûteuse en temps et sans trop de risque d'erreurs à partir du moment où le surcomptage s'opère à partir du plus grand nombre et que le nombre indiqué par le plus petit nombre est inférieur ou égal à trois ou quatre.

La récupération en mémoire des faits numériques connus. Cette technique a l'avantage de donner le résultat immédiatement et s'avère, une fois qu'elle est maîtrisée, peu coûteuse cognitivement.

Les techniques utilisant la décomposition et recomposition des nombres, les presque doubles et l'appui sur dix. Avec la technique utilisant la décomposition et la recomposition des nombres, pour calculer par exemple onze plus cinq, il s'agit de décomposer onze en dix plus un, puis de calculer un plus cinq et de recomposer dix plus six en seize soit : $11 + 5 = (10 + 1) + 5 = 10 + 6 = 16$.

La technique des presque doubles suppose que pour calculer par exemple huit plus sept, on ajoute un au double de sept, soit un à quatorze. En effet : $7 + 8 = 7 + (7 + 1) = (7 + 7) + 1 = 14 + 1 = 15$.
Ces deux techniques ont en commun de s'appuyer sur une bonne connaissance des nombres, de faire appel à des faits numériques connus et d'utiliser l'associativité de l'addition.

---

[4] Calculer mentalement ici signifie que le calculateur ne dispose pas de collection d'objets ou de matériel de dénombrement, de support écrit sur lequel il peut faire un dessin ou un schéma.

La technique en appui sur dix consiste à décomposer l'un des deux nombres du calcul en fonction de l'autre pour calculer en s'appuyant sur dix. Étant donné que l'objet de cet article est d'étudier l'impact que cette technique peut avoir sur la construction de la notion d'équivalence quantitative, les éléments de technologie qui s'y réfèrent sont précisés dans le paragraphe suivant.

1.3.2 Technique en appui sur dix : éléments de technologie

Avec la technique en appui sur dix, pour calculer 7 + 5 on calcule 7 + 3 + 2 ou 5 + 5 + 2.

Dans ce paragraphe, nous précisons le domaine d'application, le principe, et les connaissances mathématiques nécessaires pour mettre en œuvre et valider la technique en appui sur dix ainsi qu'un mode d'emploi de cette technique. Nous terminons en définissant les portées de la technique au sens de Kaspari et al. (2020), ce qui nous amène à comparer l'efficacité de cette technique dans certains cas particuliers par rapport, notamment, à l'utilisation des doubles ou presque doubles.

Domaine d'application de la technique. La technique en appui sur dix s'applique pour calculer $a + b$ avec a et b entiers naturels compris entre 0 et 9 et quand la somme $a + b$ est supérieure à 10 et inférieure à 20. Cette technique est donc spécifique au calcul sous vingt. Quand le domaine numérique est étendu au-delà de 20, la technique ne s'appuie plus sur dix mais sur un multiple de dix. C'est ainsi que pour calculer 27 + 8 , on calcule 27 + 3 + 5[5]. Le multiple de dix sur lequel on s'appuie est alors trente.

Principe de la technique. La technique en appui sur dix consiste à décomposer l'un des termes du calcul en fonction de l'autre terme du calcul, afin de ramener à un calcul de la forme dix plus «…», avec «…» entier naturel compris entre zéro et neuf.

Connaissances mathématiques relatives à la technique.

- Décomposer additivement un nombre compris entre zéro et neuf;
- Mobiliser directement les faits numériques connus ou retrouver les résultats du répertoire additif sous dix;
- Recomposer un nombre de la forme dix plus « a » avec a entier naturel compris entre zéro et neuf;
- Utiliser l'associativité de l'addition et éventuellement la commutativité de l'addition sur l'ensemble des entiers naturels.

---

[5] La mise en œuvre de cette technique suppose le fait d'avoir compris qu'il faut décomposer « astucieusement » le nombre 8, car obtenir par exemple 27 + 1 + 7 aurait peu d'intérêt. La manière dont on décompose le nombre 8 n'est pas choisie au hasard.

Mode d'emploi de la technique. Si nous reprenons l'exemple du calcul 7 + 5 et que nous cherchons à expliquer comment nous nous y prenons pour effectuer le calcul demandé en partant du nombre 7, nous pouvons avoir éventuellement le discours suivant[6] : Pour effectuer 7 + 5, j'ajoute à 7 le complément de 7 à 10 afin d'obtenir 10 puis le complément à 3 de 5. Ce discours met en avant la nécessité de convoquer deux faits numériques, 7 + 3 = 10 et 3 + 2 = 5 pour remplacer le calcul initial par un calcul équivalent : 7 + 5 = 7 + 3 + 2.

Le schéma de la figure 1 construit à partir de bandes de longueurs respectives 7, 5, 7, 3, 2, 10, 2 et 12, permet d'expliquer les différentes étapes de la mise en œuvre de la technique en appui sur dix. En effet, la seconde ligne du schéma illustre le fait que la bande 5 soit échangée contre deux bandes 3 et 2 mises dans le prolongement l'une de l'autre et bout à bout. Les trois bandes ainsi obtenues 7, 3 et 2, ont pour longueur la longueur des deux bandes initiales 7 et 5 mises bout à bout et dans le prolongement l'une de l'autre. Les expressions numériques 7 + 5 et 7 + 3 + 2 sont équivalentes. De la même manière, la seconde ligne et la troisième de la figure 1 illustrent le fait que les expressions 7 + 3 + 2 et 10 + 2 sont équivalentes. De ligne en ligne, on obtient donc une suite d'égalités : 7 + 5 = 7 + 3 + 2 = 10 + 2 = 12.

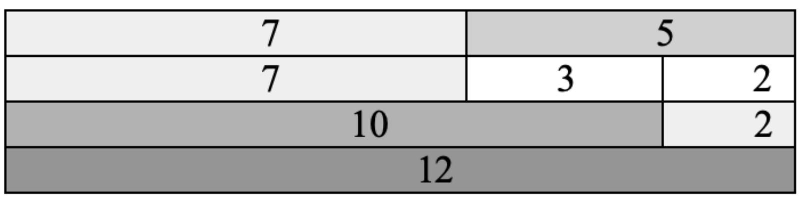


Figure 1. Exemple de schéma associé à la mise en œuvre de la technique en appui sur dix

Pour conclure, le discours qui vient d'être explicité, associé de surcroît à la manipulation effective « de bandes » (figure 1) permet, à notre sens, d'illustrer sur cet exemple pourquoi une expression numérique peut être remplacée par une autre expression numérique équivalente. En revanche, l'utilisation des configurations de doigts pour illustrer la technique en appui sur dix pour calculer 7 + 5 suppose qu'il y ait deux élèves qui s'associent : l'un prenant en charge la représentation du nombre 7, et l'autre la représentation du nombre 5. Dans ce cas, le passage par dix sera réellement facilité uniquement si le premier élève lève une main et deux doigts et l'autre élève lève une main ou éventuellement si le second élève lève à son tour trois doigts sur une main et deux

[6] Une autre manière d'expliquer la technique serait de dire : « Pour effectuer 7 + 5, je conserve 7 et je décompose le nombre 5 de façon à faire apparaître le complément de 7 à 10. » Avec des élèves plus âgés, un autre moyen serait d'utiliser la propriété de compensation de l'addition « Pour effectuer 7 + 5, j'ajoute à 7, le complément de 7 à 10 et je compense, en soustrayant à 5, le complément à 5 de 7 ».

sur l'autre. Mais si le premier élève lève quatre doigts sur une main et trois doigts sur l'autre main et que le second élève lève une main, le groupement par dix ne se voit pas.

C'est pourquoi dans la suite de notre développement, le type de matériel « bandes » est privilégié pour illustrer le calcul de $a + b$ avec la technique en appui sur dix, car dans le mode d'emploi de cette technique seul un des deux nombres est décomposé pour permettre l'appui sur dix.

Portées de la technique. Considérons par exemple l'ensemble des tâches comme effectuer $7 + n$ avec n entier naturel compris entre 4 et 9 pour discuter de la portée pragmatique puis de la portée institutionnelle de la technique en appui sur dix au sens de Kaspari et al. (2020).

Pour chaque tâche, la technique en appui sur dix est fiable avec peu de risque d'erreurs et à un coût raisonnable à partir du moment où le calculateur sait que $7 + 3 = 10$ et qu'il trouve facilement le résultat de $n - 3$. Remarquons, que le coût reste a priori inchangé si le calculateur part de n et calcule avec facilité le complément de n à dix, puis calcule $7 - (10 - n)$. La portée pragmatique de la technique est avérée.

En revanche, nous pouvons affirmer que la technique en appui sur dix a une portée institutionnelle moins forte que la technique de récupération des faits numériques dans le cas du calcul de $7 + 7$. Dans le cas des calculs $7 + 6$, $7 + 8$, nous supposons que la technique des presque doubles peut être présente en début d'école élémentaire. Nous en déduisons donc que la technique en appui sur dix est réellement compétitive[7] pour trois calculs sur six qui sont les calculs de $7 + 4$, $7 + 5$, $7 + 9$. Précisons que pour ces trois calculs, c'est la seule technique qui soit une alternative au comptage. En ce sens, l'enseigner semble légitime.

En conclusion, l'ensemble des éléments de technologie relatifs à la technique en appui sur dix et en particulier le mode d'emploi de cette technique en utilisant comme matériel « les bandes » peut, selon nous, contribuer à donner du sens à l'équivalence quantitative à l'école élémentaire. Nous développons cette idée dans le paragraphe suivant.

[7] Une étude similaire sur les calculs de type $a + n$ avec a compris entre 2 et 9 et n compris entre $11 - a$ et 9 permettrait de déterminer l'ensemble des tâches où la technique en appui sur dix est une alternative à toutes les autres techniques présentées au paragraphe 3.1.

1.4 Introduire l'équivalence quantitative

Dans l'introduction d'un ouvrage paru en 2020 regroupant des contributions de chercheurs membres de l'Observatoire international de la pensée algébrique (OIPA), Squalli et al (2020), citant Carraher et Schliemann (2007), font remonter bon nombre de difficultés :

> - Les élèves voient le signe d'égalité comme un signe d'annonce de résultats (Booth, 1984; Kieran, 1981; Vergnaud, 1985; Vergnaud, Cortes et Favre-Artigue, 1988);
> - Ils ont tendance à rechercher une valeur numérique simple (Booth, 1984). Le refus de laisser les opérations en suspens conduit à des erreurs de concaténation (Bednarz et Janvier, 1996);
> - Ils ne reconnaissent pas les propriétés de commutativité et de distributivité (Boulton-Lewis et al., 2001; Demana et Leitzel, 1988; MacGregor, 1996).
>
> (Squalli et al., 2020, p. 6)

Pour nous (Rinaldi, 2021), les causes de ces difficultés seraient dues, entre autres, au fait de développer, dans les premières années de l'école élémentaire essentiellement la valence pragmatique du calcul, qui consiste à trouver le résultat d'un calcul, sans développer en même temps la valence épistémique du calcul qui consiste, elle, à apprendre des propriétés mathématiques en calculant. Or, en cherchant par exemple à expliquer pourquoi et comment on peut remplacer le calcul 53 − 27 afin de rendre celui-ci plus facile, les élèves peuvent être amenés à trouver, puis écrire : 53 – 27 = 56 − 30. Dans cette égalité, le symbole égal « = » indique que les deux expressions numériques 53 − 27 et 56 − 30 sont équivalentes « quantitativement ». L'intention est surtout de prouver, en l'occurrence grâce à la propriété de conservation des écarts, la similitude des expressions situées des deux côtés du signe égal, sans avoir besoin au préalable d'effectuer le calcul correspondant à chaque expression. Dans ce cas, le symbole d'égalité est employé comme un symbole relationnel entre 53 − 27 et 56 − 30 et non pas comme un symbole opérationnel qui manifeste, quant à lui, le fait qu'on indique à droite du signe égal, le résultat d'un calcul.

Mais au préalable, avant de travailler à partir d'expressions numériques et d'établir un symbolisme conventionnel (=) reliant deux expressions numériques, nous avions émis l'hypothèse qu'il était nécessaire avec des enfants de 7 à 8 ans de proposer une situation au sens de Brousseau (2004) qui donne du sens à l'équivalence quantitative. C'est ainsi que l'un des moyens envisagés avait été d'introduire différentes règles dites « cassées » afin de mesurer un même segment. Ces règles dites « cassées », car ayant toutes la particularité de ne pas commencer à la graduation 0, ne permettaient pas de trouver, grâce à une lecture directe, la longueur du segment. Certaines règles commençaient par exemple à la graduation 2 ou à la graduation 3, les autres commençaient à la graduation 8 ou à la graduation 10 (Rinaldi, 2013). Leur utilisation successive puis conjointe amènerait ainsi à appréhender la notion d'écart entre deux nombres et la propriété de conservation des écarts dans le domaine de la mesure.

C'est pourquoi, présentement, dans le but de travailler l'équivalence quantitative avec de jeunes enfants (7-8 ans), dans la continuité des travaux de recherche de Rinaldi (2013, 2021, 2022), de Squalli (2002) et d'Anwandter Cuellar et al. (2018), nous faisons l'hypothèse que le fait d'introduire, dans le milieu de l'élève, un matériel, en l'occurrence « les bandes », incite à opérer directement sur des collections, chacune de cardinal inférieur à vingt (confère le mode d'emploi de la technique, exposé au paragraphe 1.3.2) et à préciser en quoi certaines d'entre elles peuvent être équivalentes « quantitativement ». L'enjeu étant par exemple d'établir une équivalence entre une collection de cardinal 7 + 5 et une autre collection de cardinal 10 + 2 sans avoir expressément recours au calcul des termes situés de part et d'autre du signe égal.

Cependant, il n'en reste pas moins, comme l'ont montré entre autres les travaux de Theis (2005), que des élèves de première ou deuxième année d'école élémentaire sont souvent en mesure de constater l'équivalence quantitative de deux collections tout en refusant l'écriture symbolique avec le signe égal entre deux expressions numériques. D'où l'idée d'associer à des tâches de manipulation, des tâches de calcul et des tâches de production d'écritures arithmétiques pour créer relativement tôt (deuxième année d'école élémentaire) un environnement où l'élève est amené à utiliser d'autres écritures que celles de type $a + b = c$. Nous pensons à des écritures additives équivalentes qui font varier le nombre de termes à gauche et à droite du signe égal et qui portent sur la somme de nombres entiers inférieurs à dix, des écritures de type : $a + b = c + d$; $a + b + c = d + e$; $a + b + c = d + e + f$… avec a, b, c, d, e, f… nombres entiers sous dix.

2. Dispositif d'enseignement, contexte de l'étude et méthodologie

Dans cette seconde partie de l'article, nous présentons le dispositif d'enseignement conçu pour la seconde année d'école élémentaire, le contexte de l'étude et notre méthodologie de recueil et d'analyse des données.

2.1 Présentation du dispositif d'enseignement

Le dispositif d'enseignement s'appuie sur trois types de tâches imbriquées : des types de tâches qui consistent à manipuler des collections discrètes (configuration de doigts) ou continues (bandes de longueurs données), à produire une expression numérique de la forme $a + b$ ou $a - b$, à trouver le résultat d'un calcul en mobilisant la technique en appui sur dix.

Dans le tableau 1, nous exposons la programmation des séquences d'enseignement qui s'étalent dans la durée de la première semaine de rentrée à la fin de la première période scolaire, juste avant les vacances de novembre. Chaque séquence est découpée en trois, quatre ou cinq séances d'une durée moyenne de 45 minutes et vise un objectif notionnel spécifique[8].

Tableau 1 : programmation des séquences d'enseignement

Séquences du dispositif	Objectif notionnel	Matériel utilisé
Séquence 1 : 5 séances Semaines 2 et 3 de septembre	Maîtrise des faits numériques sous dix et passage aux écritures arithmétiques de la forme : • $a + b = x$ dans le cas de la composition de a et b ou de la décomposition de x avec a, b et x entiers inférieurs à dix • $a + x = b$ dans le cas de la recherche du complément de a à b avec a et b entiers inférieurs à dix	Manipulation de bandes Manipulation de configurations de doigts
Séquence 2 : 2 séances Semaine 4 de septembre	Maîtrise des décompositions et recompositions de 10 et passage aux écritures arithmétiques : $10 = a + b$ avec a et b inférieurs à dix Maîtrise de la recherche du complément x de a à 10 avec a entier inférieur à dix et passage à l'écriture $a + x = 10$	Manipulation de bandes Manipulation de configurations de doigts Utilisation de cartes à jouer
Séquence 3 : 3 séances Semaine 1 d'octobre	Mise en œuvre de la technique de calcul en appui sur dix) et passage à l'écriture arithmétique: $a + b = 10 + \cdots$ avec a et b entiers naturels inférieur à dix	Manipulation de bandes Manipulation de configurations de doigts
Séquence 4 : 3 séances Semaine 2 d'octobre	Calcul en ligne avec appui sur dix de plusieurs termes inférieurs à dix	
Tout au long de la seconde année d'école élémentaire (CE1)	Adaptabilité aux calculs : utilisation de la technique de l'appui sur dix lorsqu'elle paraît la plus adaptée au calcul proposé. Calculs en ligne et en colonne : utilisation possible de la technique en appui sur dix pour réaliser des calculs en ligne ou posés	

[8] L'ensemble des séquences du dispositif est disponible dans la brochure « calcul sous vingt » (IREM Montpellier, 2021).

2.2 Recueil et méthodologie d'analyse des données

L'expérimentation du dispositif d'enseignement s'est déroulée de septembre 2020 à décembre 2020 dans les deux classes de CE1[9] de deux membres du groupe IRES qui ont contribué à sa conception. La classe A est une classe de CP/CE1 située au centre-ville qui a pour effectif 25 élèves dont 13 sont des élèves de CE1 et la classe B est une classe de CE1 dédoublée[10] située en réseau d'éducation prioritaire qui a pour effectif 12 élèves. Le double-niveau d'une part et d'autre part, l'origine socioprofessionnelle du public accueilli, font que les conditions d'exercice du métier sont différentes dans les deux classes. Cela nous semble alors d'autant plus intéressant d'observer et d'évaluer les effets du dispositif dans la classe A et dans la classe B, et de comparer les résultats obtenus dans les deux classes pour repérer éventuellement des différences significatives du contexte de l'étude sur les apprentissages des élèves.

Pour chaque classe, nous possédons comme données, pour les séquences 1, 2, 3 et 4, les réponses des élèves aux évaluations et les feuilles de calculs renseignées individuellement. En outre, nous avons deux sortes d'enregistrement vidéo. Le premier regroupe les enregistrements vidéo, avec caméra orientée sur le tableau, des moments de lancement, de synthèse et d'institutionnalisation. Le second type d'enregistrement regroupe les enregistrements de moments consacrés aux phases de recherche. Dans ce dernier cas, les caméras sont orientées sur un, deux, quatre, voire l'ensemble des élèves.

En lien avec notre question de recherche qui s'attache à évaluer l'impact que peut avoir l'utilisation de la technique en appui sur dix sur la construction de la notion d'équivalence quantitative, nous nous basons sur le recueil de données propres à trois séances.

Nous choisissons d'analyser les données de la séance 2 de la séquence 1, car dans cette séance les « bandes » construites pendant la séance 1 sont utilisées pour la première fois par les élèves afin de valider les réponses à différents calculs additifs. Nous analysons ensuite les données de la séance 2 de la séquence 3, car dans cette séance les élèves découvrent le mode d'emploi de la technique en appui sur dix (cf. figure 1) en manipulant les bandes. Ils sont amenés, étant donné deux bandes

---

[9] En 2019-2020, nous avions conçu, observé et analysé une « préanalyse » du dispositif d'enseignement dans trois classes de CE1 : la classe A, la classe B et une autre classe de CE1 située en réseau d'éducation prioritaire (REP+).

[10] Une mesure a été prise en France à la rentrée scolaire 2018 pour fixer l'effectif d'une classe de CE1 située dans des réseaux d'éducation prioritaire (REP+) à environ 12 élèves. On parle alors de classe dédoublée. Cette mesure était déjà rentrée en vigueur à partir de 2017 pour les classes de CP de REP+.

de longueur a et b avec $a + b > 10$, à choisir certaines bandes en prenant en compte leurs longueurs, afin d'établir eux-mêmes, pas à pas, une suite d'équivalences quantitatives entre plusieurs collections. L'objectif est *in fine* de produire des écritures de la forme $a + b = 10 + c$ avec c inférieur à dix.

La dernière séance analysée, la séance 2 de la séquence 4, doit mettre en avant les stratégies individuelles des élèves pour calculer la somme de trois nombres inférieurs à dix et renseigner sur la manière dont chaque élève mobilise les faits numériques sous dix pour décomposer la somme de trois termes, quand cette somme est supérieure à vingt sous la forme $10 + 10 + a$ avec a inférieur à dix.

Pour conduire notre analyse, nous relevons pour chacune des trois séances :

- Les difficultés rencontrées par les élèves pour produire des collections équivalentes et/ou des expressions numériques équivalentes en émettant des hypothèses sur les savoirs mathématiques qui leur font défaut (sur les nombres, les propriétés de l'addition, la relation d'équivalence) ou sur la non-pertinence de la situation proposée (tâche mathématique, consigne, matériel, organisation humaine …);
- La manière dont l'enseignant par son discours, par l'introduction de symboles cherche à faciliter le passage du monde des objets matériels au registre des écritures arithmétiques et inversement.

3. Analyses en lien avec le processus de conceptualisation de l'équivalence quantitative

Comme annoncé dans le paragraphe précédent (cf. 2.2) notre analyse se focalise sur trois moments du processus de conceptualisation de l'équivalence quantitative, le premier initié par la recherche de la somme de deux longueurs, le second par la découverte du mode d'emploi de la technique en appui sur dix avec des bandes, le troisième par la recherche de la somme de trois nombres inférieurs à dix. Pour chaque moment du processus, nous suivons les deux axes de notre méthodologie d'analyse en relevant et en analysant les difficultés rencontrées par les élèves et les médiations opérées par l'enseignant.

3.1 Analyse du moment « somme de deux longueurs »

La première séance de la première séquence a permis à chaque élève de réaliser son propre jeu de bandes constitué de deux bandes de longueur dix et de neuf bandes de longueur allant de un à neuf afin de représenter tous les nombres de un à vingt. Dans la séance « somme de deux longueurs » c'est grâce à ce matériel que les élèves en binôme vont valider le résultat de la somme de deux nombres inférieurs à dix en l'occurrence $3 + 7$, $5 + 2$, $4 + 4$ et $9 + 2$ et écrire sur une feuille le calcul correspondant. Nous n'avons pas repéré de difficultés ni dans l'effectuation des calculs ni dans la manipulation en ce qui concerne les trois premiers calculs. Les mises en commun ont permis à l'enseignant de faire expliciter aux élèves leurs techniques (comptage, surcomptage et récupération de faits numériques) et de préciser que pour chercher la longueur de deux bandes, il est nécessaire de les mettre dans le prolongement l'une de l'autre et bord à bord. Certains binômes, pour vérifier, posaient la bande somme sur les deux autres alors que d'autres la posaient juste au-dessous ou juste dessus.

Pour le dernier calcul, celui de 9 + 2, sur les deux classes, tous les binômes sauf un (celui de Kevin et Maria, classe B), ont trouvé le résultat sans hésitation. Ils ont pris les bandes dix et un pour réaliser une bande de longueur 11 et ont écrit sur leurs feuilles, 9 + 2 = 11. L'enseignant de la classe B s'est servi quant à lui des échanges entre les deux élèves Kevin et Maria pour introduire une écriture additive qui traduit l'équivalence entre 9 + 2 et 10 + 1.

Nous retranscrivons ci-dessous les échanges entre Kevin et Maria au sujet du calcul 9 + 2 et la correction proposée par l'enseignant.

Extrait d'un échange entre deux élèves au sujet du calcul 9 + 2

Kevin : Ça fait quatorze.

Maria : Il n'y a pas le quatorze.

Kevin : C'est ça, quatorze. [Il donne alors la bande 10 et la bande 4 à Maria. Maria place les deux bandes sous les bandes initiales pour vérifier.]

Kevin : « Ça dépasse ».

Extrait de la correction proposée au sujet du calcul 9 + 2

[Le professeur est au tableau. Il pose la bande 2 et dans le prolongement, bout à bout, la bande verte 9 et interroge Kevin]

Professeur : J'aimerais que Kevin nous dise ce qu'il avait trouvé au départ.

Kevin : J'avais dit quatorze.

Professeur : Est-ce qu'on a une bande 14 ?

Élève(s) : Non.

Professeur : Quelles bandes Maria a-t-elle mises pour vérifier ?

Maria : La bande 10 et la bande 4.

[Le professeur pose les bandes sur le tableau et s'adresse au groupe classe.]

Professeur : Qu'est-ce qu'ils se sont dit ? Les deux bandes sont trop longues. Neuf plus deux ne fait pas quatorze.

Élève : Ça fait onze.

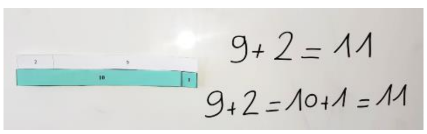
Professeur : Qu'est-ce que je peux mettre ?

Élève(s) : La bande 10 et la bande 1.

Professeur : Qu'est-ce que je peux écrire comme phrase mathématique ?

Professeur : Mais encore ?

[Au bout d'un certain temps un élève propose dix plus un. Le professeur inscrit alors le calcul correspondant au tableau.]



Cette séance montre que les élèves ont tous su décomposer la bande de longueur 11 en deux bandes de longueur 10 et 1 et qu'ainsi ils ont pu vérifier que la bande de longueur 9 + 2 avait bien la longueur de la bande 11. En fait, nous pensons que pour eux, comme 9 + 2 est égal à 11 et que comme 11 est égal à 10 + 1, il est alors « normal » de constater que les bandes 9 + 2 et les bandes 10 + 1 ont la même longueur.

Nous en déduisons donc, dans ce contexte, que même si l'enseignant a introduit l'écriture arithmétique 9 + 2 = 10 + 1 , le symbole d'égalité n'est probablement pas interprété par les élèves comme un symbole relationnel entre 9 + 2 et 10 + 1 (cf. 1.4). Nous pensons qu'à ce moment du processus de conceptualisation, sans même avoir manipulé les bandes, les élèves sont en mesure d'écrire les deux égalités 9 + 2 = 11 et 11 = 10 + 1, car dans ces deux égalités le signe égal peut-être interprété par les élèves comme un symbole opérationnel, qui manifeste le fait qu'on indique à droite du signe égal le résultat d'un calcul. Le premier calcul correspond à la recherche d'une somme, ce qui se traduit par une égalité de la forme $a + b = c$, et le second calcul au résultat d'une décomposition additive qui, elle, se traduit par une égalité de la forme $a = b + c$. Cela nous amène alors à nous interroger sur le fait que l'enseignant utilise implicitement la transitivité de la relation d'équivalence, au début de l'école élémentaire, pour déduire des deux égalités 9 + 2 = 11 et 11 = 10 + 1, l'égalité 9 + 2 = 10 + 1.

Selon nous, la proposition faite par l'enseignant a le mérite d'utiliser une symbolisation dans le registre des écritures arithmétiques qui correspond à une « lecture » ou à une « traduction » de ce que montre le matériel.

Nous pensons cependant qu'à ce même niveau de scolarité, un autre moyen pour « attraper » l'égalité 9 + 2 = 10 + 1 serait par exemple de :

- Décomposer 2 en 1 + 1 afin d'obtenir dans un premier temps l'égalité 9 + 2 = 9 + 1 +1 puis l'égalité 9 + 2 = 10 + 1 en recomposant le nombre 10 à partir de 9 + 1;
- ou bien de décomposer 10 en 9 + 1 afin d'obtenir dans un premier temps l'égalité 10 + 1 = 9 + 1 + 1 puis l'égalité 10 + 1 = 9 + 2 en recomposant le nombre 2 à partir de 1 + 1.

Dans ce cas, les manipulations risquent d'être plus difficilement accessibles aux élèves, mais grâce aux possibles interactions sociales et aux médiations opérées par l'enseignant, elles sont susceptibles de produire des écritures où le signe égal peut être interprété comme un symbole relationnel entre deux expressions numériques.

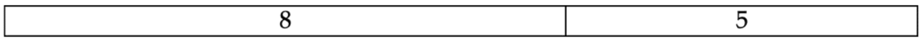
3.2 Analyse du moment «découverte de la technique en appui sur dix avec manipulation de bandes »

Pour implanter la technique en appui sur dix avec manipulation de bandes, nous avons proposé en séance 2 de la séquence 4 un jeu dénommé « le jeu du dix plus… ». La règle du jeu est présentée en annexe 1. Notre analyse s'appuie sur l'observation de la phase de jeu dans les classes A et B. Dans chacune des deux classes, l'enseignant a fait le choix de présenter le jeu à quatre joueurs et de suivre l'intégralité de la partie pendant que le reste des élèves travaillait sur d'autres tâches en autonomie.

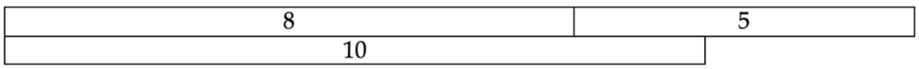
Quels que soient les groupes de quatre élèves observés, cinq au total, nous constatons que pendant les deux ou trois premières parties, les règles du jeu sont difficiles à suivre. Nous énumérons, en suivant la chronologie du jeu, les principales difficultés rencontrées par les élèves et les médiations opérées par les enseignants (tableau 2). Cela nous amène à revenir sur la nature des discours et des symboles introduits par les enseignants tout au long du jeu pour amener les élèves à s'approprier grâce à la manipulation des bandes, le mode d'emploi de la technique en appui sur dix.

Tableau 2 : difficultés des élèves rencontrées dans la mise en place du jeu : « dix plus … »

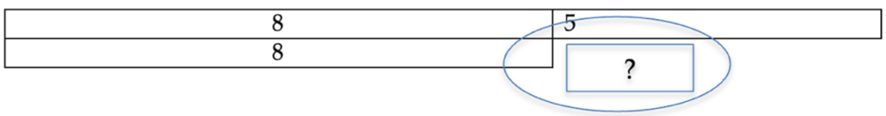
1° Les élèves posent pour leurs camarades les deux bandes correspondant au calcul à effectuer en leur donnant à lire les nombres « en miroir ». C'est souvent le professeur qui intervient pour retourner les bandes.



2° Les élèves placent directement la bande dix, ce qui incite le professeur à préciser qu'il s'agit d'obtenir 10 mais à partir d'une des bandes.



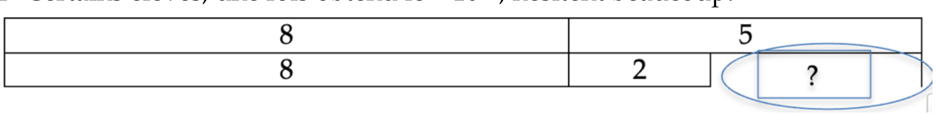
3° Une fois la bande 10 retirée et la première bande posée (ici le 8), la difficulté réside dans le fait de savoir quelle bande poser pour obtenir dix .



Certains élèves remettent la seconde bande (ici 5) auquel cas le calcul n'avance pas. D'autres élèves mettent une bande au hasard et poursuivent le calcul en se référant aux longueurs sans « passer » par 10. Nous supposons que les élèves ne comprennent pas : l'intérêt d'obtenir 10 ou qu'ils ne pensent pas à mobiliser les décompositions de dix pour déposer la bande 2.

Il se peut aussi, comme dans les séances précédentes où les élèves devaient trouver la somme des longueurs des bandes du haut et placer deux bandes afin d'obtenir la même longueur en haut et en bas, qu'ils soient ici déstabilisés par le fait qu'on retrouve une addition représentée par les bandes du haut, alors qu'en bas, les deux bandes doivent permettre d'obtenir une mesure de longueur égale dix. Il semblerait alors qu'une rupture de contrat importante pourrait contribuer à expliquer les difficultés des élèves.

4° Certains élèves, une fois obtenu le « 10 », hésitent beaucoup.



Ils mettent deux bandes au lieu d'une, ce qui donne par exemple $8 + 5 = 8 + 2 + 2 + 1$. C'est juste, mais cela ne correspond pas à dix plus un nombre. Il semblerait que les élèves ne mobilisent pas suffisamment les faits numériques pour rechercher en l'occurrence le complément de 2 à 5.

5° Comme les essais prennent du temps, les élèves qui ne calculent pas, ne suivent plus le jeu. Ils ne se sentent concernés qu'au moment d'écrire le résultat du calcul. Là encore, la présence de l'enseignant s'avère nécessaire pour préciser qu'on n'écrit pas directement le résultat 13, ni encore $10 + 3$, mais qu'on indique à droite du signe égal par quelles bandes on a remplacé les bandes 8 et 5 pour obtenir justement $10+3$. L'écriture arithmétique attendue est donc : $8 + 5 = 8 + 2 + 3$. Pour bien montrer que la dernière écriture est en lien avec la bande 10, il est alors convenu d'encadrer juste après le résultat de $8 + 2$, ce qui donne : $8 + 5 = \boxed{8 + 2} + 3 = 10 + 3 = 13$.

En synthèse, nous retenons que les difficultés majeures des élèves au début de la partie peuvent s'expliquer par une rupture de contrat en lien avec la manipulation des bandes (étape 3, tableau 2) et une rupture de contrat en lien avec l'utilisation du signe égal (étape 5, tableau 2). Nous pensons également que le fait de pouvoir faire des essais en manipulant les bandes n'incite pas forcément les élèves à anticiper en mobilisant les faits numériques sous dix (étape 4, tableau 2).

Pour poursuivre notre analyse, nous nous intéressons dans un premier temps à la manière dont les professeurs des classes A et B s'y sont pris pour aider certains élèves à prendre les « bonnes » bandes au bon moment. Il s'avère que pour chacun des professeurs, le discours émis pour le calcul de 8 + 5 est stable dans le sens où les expressions utilisées sont reprises par la suite quels que soient les binômes en difficulté et quel que soit le calcul à effectuer.

C'est ainsi que pour le calcul de 8 + 5, dans la classe A, afin de remédier à la difficulté qui consiste à placer la bande 2, l'enseignant demande avant même que l'élève ait pris une bande :

> Qu'est-ce qu'il manque ? Qu'est-ce qu'il faut pour aller de 8 à 10 ? [Puis une fois que l'élève a posé la bande 2, l'enseignant demande à nouveau :] Qu'est-ce qu'il manque ? Qu'est-ce qu'il faut pour aller de 2 à 5 ?

Dans la classe B, en revanche, à la même étape du calcul, l'enseignant ne demande rien. Il attend que l'élève ait posé la bande 2. Une fois, par contre, que l'élève a posé le 2, il commente :

> Tu as gardé le 8 et dans le 5 tu as pris 2 pour faire 10. [Il attend à nouveau que l'élève poursuive et pose le 3 pour commenter à nouveau :] Dans le 5 il restait encore 3 après avoir pris 2.

Les deux discours mis en parallèle contribuent à faire ressortir la nature différente des éléments prélevés par chaque enseignant pour aider les élèves. C'est ainsi que nous percevons que, dans la classe A, le professeur ne cherche pas forcément à savoir si l'élève a compris qu'il faut placer une bande dans le prolongement de la bande 8 afin d'obtenir une bande somme de longueur à 10 (étape 3, tableau 2). Il s'éloigne du contexte de la manipulation pour amener l'élève à savoir ce qu'il manque, ce qu'il faut pour aller de 8 à 10. Or, la bande 10 n'est nulle part sur le tapis de jeu. Donc, la référence au nombre 10 ne se justifie pas en soi. Le professeur fait comme si l'élève savait ce qu'il cherche à chaque étape et l'invite dans ces conditions à mobiliser certains faits numériques pour trouver la solution.

Le professeur de la classe B laisse l'élève essayer jusqu'à ce qu'il place la bande 2 à côté de la bande 8.[11] Le discours du professeur permet de traduire oralement ce que la manipulation montre. En effet, sous la bande 8 et la bande 5, il y a la bande 8, la bande 2 et la bande 3. Ce qui signifie bien que l'élève a gardé le 8, qu'il a pris le 2 dans le 5 pour faire 10 et qu'il a mis les 3 qui restaient du 5. En revanche, l'enseignant ne cherche pas à savoir comment l'élève a fait pour prendre la bande 2 et la bande 3. Il ne sait pas si l'élève a choisi ces bandes en s'aidant de la perception visuelle ou en mobilisant certains faits numériques.

Pour compléter l'analyse de ce moment de jeu, il nous semble que le fait de demander aux élèves, pour chaque exemple numérique, une fois la phase de manipulation finie, d'écrire 8 + 5 = 8 + 2 + 3 puis d'encadrer juste après le résultat de 8 + 2 en référence à la bande 10 est un moyen heuristique pour les aider à s'approprier le mode d'emploi de la technique en appui sur dix surtout si les élèves sont confrontés en fin de partie ou à la séance suivante à l'ensemble des écritures produites : $8 + 4 = \boxed{8 + 2} + 2$; $7 + 6 = \boxed{7 + 3} + 3$; $4 + 9 = \boxed{4 + 6} + 3$. Passer d'une écriture à l'autre contribue à expliciter que dans chaque rectangle la somme des deux nombres égale dix, que ces nombres ne sont pas pris au hasard, qu'un de ces nombres est connu et qu'il correspond à l'un des termes de la somme qu'on cherche à calculer.

Par ailleurs le symbole rectangle sera remplacé un peu plus tard dans la scolarité par le symbole des parenthèses, ce qui donnera, à la place de $7 + 6 = \boxed{7 + 3} + 3$, une égalité du type 7 + 6 = (7 + 3) + 3.

En conclusion, le fait de manipuler n'induit pas directement la conceptualisation. Les professeurs ont dû faire accepter les contraintes du jeu, mieux expliquer l'instrumentalisation des bandes, amener les élèves à mobiliser les faits numériques connus, inciter à produire des écritures arithmétiques, comparer ces écritures pour permettre à chacun de s'approprier le mode d'emploi de la technique en appui sur dix.

3.3 Analyse du moment « recherche de la somme de trois nombres inférieurs à dix »

Nous faisons le choix de centrer notre analyse sur la première séance de la quatrième séquence qui consiste à calculer une somme de trois termes. Le fait qu'il y ait trois termes amène le calculateur à commencer par en choisir deux parmi les

[11] Nous supposons, mais cela reste une supposition, que si l'élève avait pris la bande 3, le professeur aurait signalé à l'élève que comme 8 + 3 = 11, la bande 3 ne convient pas.

trois afin de s'engager dans le calcul. Ce choix dépend de la connaissance des faits numériques et de l'adaptabilité dont fait preuve chaque calculateur[12].

Nous présentons dans un diagramme en bâtons (figure 2) le nombre de réponses correctes pour chaque calcul (couleur noire), de calculs faux (couleur grise), de calculs non faits (case hachurée) sur les 13 réponses recueillies dans la classe B. Nous avons regroupé les calculs en fonction de leurs caractéristiques sans respecter l'ordre dans lequel ils étaient posés afin de faciliter la lecture et l'analyse des données.

Il est à noter que 2 élèves sur les 13 présents n'ont cherché sur l'ensemble des calculs proposés que deux d'entre eux qui sont 8 + 4 + 1 et 5 + 3 + 5.[13] Tous les autres élèves ont cherché les réponses à tous les calculs en utilisant la technique en appui sur dix.

Comme attendu, les calculs les mieux réussis sont les trois premiers (5 + 3 + 5, 2 + 4 + 8, 9 + 3 + 1). Les dix élèves sur treize qui les ont faits justes ont directement regroupé les deux termes dont la somme égale 10 (5 et 5, 2 et 8, 9 et 1).

Le dernier calcul 4 + 7 + 0 est aussi très bien réussi (9 réponses justes sur 11). Sur les 9 réponses proposées, une seule correspond à $\boxed{4 + 6} + 1$[14].Les 8 autres sont de la forme $\boxed{7 + 3} + 1$.

---

12 Exemple : Pour calculer 8 + 3 + 2 avec la technique en appui sur 10, on peut
- Choisir 8 et 2 ou 2 et 8, ce qui permet d'obtenir directement la somme sous la forme demandée : $\boxed{8 + 2} + 3$.
- Choisir 8 et 3 ou 3 et 8, ce qui oblige à calculer cette somme sous la forme $\boxed{8 + 2} + 1$ et à effectuer 1 + 2 pour trouver le résultat final sous la forme demandée : $8 + 3 + 2 = \boxed{8 + 2} + 3$.
- Choisir 3 et 2 ou 2 et 3 amène à calculer 5 + 8 ou 8 + 5 sous la forme $\boxed{5 + 5} + 3$ ou $\boxed{8 + 2} + 3$.

13 Ces deux calculs étaient inscrits en premier sur leur feuille.

14 Nous encadrons la décomposition de dix utilisée. Ce code a été choisi avec les élèves pour désigner les deux bandes qui, mises bout à bout et dans le prolongement l'une de l'autre, avaient une longueur de dix (cf. figure 1). Nous n'avons pas jugé utile d'utiliser des parenthèses à ce niveau de scolarité (CE1).

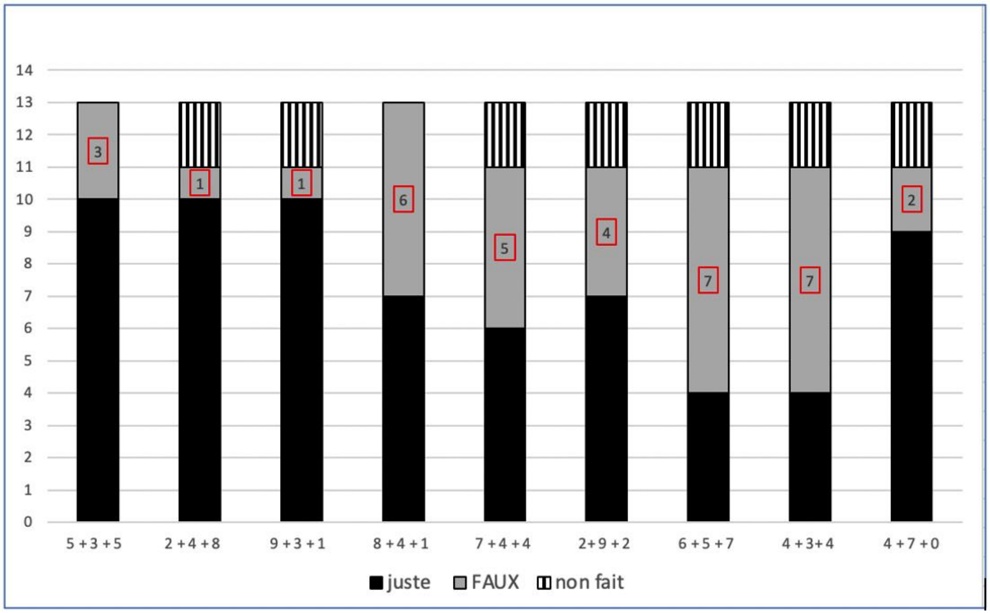


Figure 2. Nombre de résultats justes et faux par calcul correspondant à la somme de trois termes

Les calculs 8 + 4 + 1 et 7 + 4 + 4 se ressemblent, car le premier terme du calcul est le nombre le plus grand des trois et, pour obtenir 10, il faut ensuite décomposer le second terme. Les 9 élèves ont d'ailleurs commencé par obtenir 8 + 2 et 7 + 3. Quand leurs réponses sont fausses, c'est qu'ils n'ont pas effectué le calcul de 2 + 1 et de 4 + 1. Ils n'ont pas reporté sur le troisième terme le complément à 4 de 2 ou le complément à 4 de 3.

Le calcul 2 + 9 + 2 a la particularité d'avoir le plus grand nombre 9 au milieu. 10 élèves sur les 11 se ramènent d'ailleurs à $\boxed{9 + 1}$+… Une seule élève se ramène à $\boxed{2 + 8}$+ 3. Les réponses fausses s'expliquent par le non-report du nombre 1 qu'il reste à ajouter à 2.

Parmi les quatre réponses justes à 6 + 5 + 7, calcul où le dernier chiffre est celui qui est le plus grand, on trouve 6 + 5 + 7 = $\boxed{6 + 4}$+ 8, ou 6 + 5 + 7 = $\boxed{5 + 5}$+ 8 ou 6 + 5 + 7 = $\boxed{7 + 3}$+ 8.

Parmi les quatre réponses justes à 4 + 3 + 4, on trouve autant de $\boxed{7 + 3}$+ 1 que de $\boxed{4 + 6}$+ 1.

Pour conclure, les résultats obtenus sont encourageants, car la plupart des élèves arrivent à utiliser leur connaissance des faits numériques sous dix et leur connaissance des décompositions de dix pour remplacer une expression numérique par une expression numérique de la forme dix plus « … ». De plus, il est à noter, en étudiant une à une les productions, que l'ensemble des élèves qui appliquent correctement la technique en appui sur dix accordent de l'importance au choix du premier nombre. Ils choisissent ce nombre décisif après avoir lu dans son intégralité l'expression numérique située à gauche du signe égal. Les deux termes regroupés pour obtenir 10 attestent de cette compétence comme le montre la production d'un élève reproduite en figure 3.

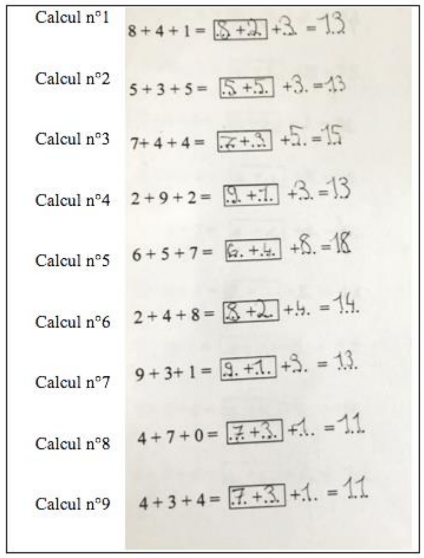


Figure 3. Exemple de production d'élève attestant d'une habileté calculatoire

3.4 Résultats de l'étude

En lien avec la manipulation des bandes. Le jeu de bandes constitué de deux bandes de longueur dix et de neuf bandes de longueur allant de un à neuf permet aux élèves de « voir » si la bande somme de longueur $a + b$ a la même longueur qu'une bande c avec c inférieur à dix ou la même longueur qu'une bande de longueur $10 + d$ avec d inférieur ou égal à dix.

En lien avec le registre des écritures arithmétiques. Deux stratégies semblent envisageables en seconde année d'école élémentaire pour établir l'équivalence entre $a + b$ et $10 + d$. La première consiste à calculer $a + b$ et à calculer $10 + d$, puis à utiliser implicitement la transitivité de la relation d'équivalence quantitative. Un autre moyen envisageable consiste à partir de l'expression numérique $a + b$, à décomposer l'un des termes puis à recomposer de façon « astucieuse » pour « retomber » sur $10 + d$. C'est en ce sens que la technique en appui sur dix permet de travailler la notion d'équivalence quantitative sans chercher à calculer les termes $a + b$ et $10 + d$.

En lien avec l'utilisation du signe égal. Les seules égalités écrites spontanément par les élèves sont du type $a + b = c$. Dans ces égalités, le symbole = annonce un résultat. La première fois où les élèves ont rencontré une écriture du type $a + b = 10 + d$, cette écriture correspondait à la contraction de $a + b = e$ et $10 + d = e$. Or, cette contraction est restée implicite et l'enseignant n'a pas justifié cette écriture.

En lien avec le processus de conceptualisation. Le fait de manipuler n'induit pas directement la conceptualisation. Utiliser du matériel, en l'occurrence ici un jeu de bandes de longueurs inférieures ou égales à dix s'est avéré utile pour que les élèves proposent et valident plusieurs décompositions et recompositions des nombres inférieurs à vingt. Cependant, les enseignants ont dû guider les élèves pour arriver à une instrumentalisation des bandes en lien avec l'objectif d'enseignement visé : remplacer la somme de deux termes $a + b$ par une somme équivalente obtenue en décomposant l'un des termes a ou b pour obtenir une somme équivalente à $10 + c$. Par ailleurs, ce sont les enseignants qui ont amené les élèves à formuler les relations entre les nombres et introduit un outil heuristique $\boxed{\ldots+\ldots}$ pour désigner la somme de deux nombres égale à dix(cf. 3.2).

En lien avec les habiletés calculatoires. Le fait de calculer des sommes de trois nombres inférieurs à dix a permis de développer une habileté calculatoire en incitant l'élève à choisir des groupements de nombres astucieux et à utiliser les propriétés de la commutativité et de l'associativité de l'addition.

Conclusion

Dans cet article, nous montrons que l'un des enjeux de l'apprentissage de la technique en appui sur dix est d'arriver, en deuxième année d'école élémentaire française (enfants de 7 à 8 ans), à remplacer le calcul initial d'une somme comprise entre dix et vingt par le calcul d'une « autre » somme qui, elle, « contient » dix. Or, pour arriver à trouver cette « autre » somme, il est nécessaire de savoir décomposer et composer les nombres sous dix. C'est pourquoi nos travaux s'inscrivent dans la continuité de ceux de Sensevy et al. (2015), dans le sens où nous utilisons l'addition comme moyen pour explorer les nombres et les relations entre les nombres avec une attention particulière pour la relation d'équivalence quantitative.

Par ailleurs, nous pensons que ce processus de conceptualisation de la relation d'équivalence quantitative peut être facilité si les élèves sont amenés à manipuler des représentations de nombres. Comme les nombres que nous cherchons à décomposer et composer sont inférieurs à vingt, nous avons fait le choix d'introduire, entre autres, dans le milieu de l'élève, un jeu de bandes constitué de deux bandes de longueur dix et de neuf bandes de longueur allant de un à neuf (cf. 1.2).

Dans l'article, pour étudier l'impact que peut avoir « la technique de calcul en appui sur dix » sur la construction de la notion d'équivalence quantitative en manipulant ce jeu de bandes, nous avons analysé trois séances d'un même dispositif d'enseignement dans deux classes de seconde année d'école élémentaire.

Le contexte de l'étude, notamment le fait que l'effectif des deux classes réunies s'élève à 25 élèves, que les enseignants des deux classes aient participé à la préanalyse et à la conception du dispositif d'enseignement et que les trois séances s'inscrivent dans une unité recouvrant au total treize séances (cf. figure 1), nous amène à objectiver les résultats présentés dans le paragraphe précédent.

Autant le fait de manipuler le jeu de bandes avec l'intention de déterminer la longueur d'une bande somme semble accessible aux élèves, autant la manipulation s'avère délicate quand il s'agit de remplacer une bande somme par une bande somme « contenant » dix. Cette autre façon d'instrumentaliser les bandes est amenée dans les deux classes observées par l'enseignant. Deux types de discours sont alors produits. Le premier vise à aider l'élève en lui suggérant les questions qu'il devrait se poser sur les calculs à utiliser pour trouver les bonnes bandes au bon moment. Le second discours vise quant à lui, une fois que les bandes correctes sont placées au bon endroit à amener l'élève à interpréter par un calcul ce que le matériel lui permet de voir. Ce constat nous encourage, dans nos travaux ultérieurs, à nous interroger davantage sur les formes de médiation que l'enseignant peut proposer pour favoriser le processus d'objectivation (Radford, 2011).

En revanche, à l'instar des recherches de Squalli (2002), d'Anwandter Cuellar et al. (2018) et Theis (2005), nous validons le fait que la manipulation des bandes amène les élèves à comparer « directement » la somme d'une longueur a et d'une longueur b à la somme d'une longueur 10 et d'une longueur c pour infirmer l'équivalence quantitative entre deux collections mais que cette manipulation ne facilite pas pour autant le passage à l'égalité $a + b = 10 + d$.

Par ailleurs, les résultats exposés dans cet article, en lien avec le calcul de la somme de trois nombres inférieurs à dix, tout comme ceux de nos travaux de recherche antérieurs (Rinaldi, 2021), semblent confirmer l'intérêt, dans le contexte français, de privilégier les décompositions et recompositions des nombres pour développer des habiletés calculatoires.

Références

Anwandter Cuellar, N., Lessard, G., Boily, M. et Mailhot, D. (2018). L'émergence de la pensée algébrique au préscolaire : les stratégies des élèves concernant la notion d'équivalence mathématique. *McGill Journal of Education / Revue des sciences de l'éducation de McGill, 53*(1), 146–168. https://doi.org/10.7202/1056287ar

Baroody, A. (2006). Why Children have difficulties mastering the basic number combinations and how to help them. *Teaching Children Mathematics, 13*(1), 22-31.

Bideaud J., Meljac C. et Fischer J.-P. (1991). *Les Chemins du nombre.* Presses universitaires du Septentrion.

Brissiaud, R. (2007). *Premiers pas vers les maths. Les chemins de la réussite à l'école maternelle.* Retz.

Brissiaud, R. (2015). Le nombre dans le nouveau programme maternelle : Quatre concepts clés pour la pratique et la formation. *Le café pédagogique*. http://www.cafepedagogique.net/lexpresso/Pages/2015/10/07102015Article635798003968263974.aspx

Brousseau, G. (2004). Les représentations : étude en théorie des situations didactiques, *Revue des sciences de l'éducation, 30*(2), 241-277.

Carraher, D. W. et Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. Dans F. Lester (dir.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (p. 669-705). Information Age Publishing.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 1. Structures et fonctions. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot et R. Floris (dir.), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques* (p. 3-33). Éditions la Pensée sauvage.

Fayol, M. (2015). *Nombres et opérations, premiers apprentissages à l'école primaire »* [Conférence de consensus]. CNESCO, https://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2015/11/Bilan-de-la-recherche.pdf

Flexer, R.- J. (1986). The Power of Five: The Step before the Power of Ten, *The Arithmetic Teacher, 34*(3), 5-9.

Fuson, K. et Kwon, Y. (1991). Systèmes de mots-nombres et autres outils culturels : effets sur les premiers calculs de l'enfant. Dans J. Bideaud, C. Meljac et J.-P. Fischer (dir.), *Les chemins du nombre* (p. 351-374). Presses universitaires du Septentrion.

Geary, D., Fan, L. et Bown-Thomas, C. (1992). Numerical cognition: Loci of ability differences comparing children from China and the United States. *American Psychological Society, 3*(3), 180-185. https://doi.org/10.1111/j.1467-9280.1992.tb00023.x

Geary, D. C., Bow-Thomas, C. C., Liu, F. et Siegler, R. S. (1996). Development of arithmetical competencies in Chinese and American children: Influence of age, language, and schooling. *Child Development, 67*(5), 2022–2044. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.1996.tb01841.x

Gelman, R. (1983) Les bébés et le calcul. *La Recherche, 14*(149), 1382-1389.

Gersten, R., Jordan, N.-C. et Flojo, J.-R. (2005). Early identification and interventions for students with mathematics difficulties. *Journal of learning disabilities, 38* (4), 293-304. http://dx.doi.org/10.1177/00222194050380040301

IREM Montpellier. (2021). Calcul sous vingt : un dispositif innovant d'enseignement et d'apprentissage au CE1 [brochure]. https://ires-fds.edu.umontpellier.fr/ressources-et-publications/ressources-et-publications-mathematiques/ressources-cycle-2/

Kaspari,D., Chaachoua, H. et Bessot, A.(2020). Qu'apporte la notion de portée d'une technique à l'étude de la dynamique praxéologique? *Annales de didactique et de sciences cognitives, 25,* 243-269. https://doi.org/10.4000/adsc.573

Mandler,G. et Shebo, B.-J. (1982). Subitizing : An Analysis of Its Component Processes. *Journal of Experimental Psychology: General, 111*(1), 1-22. https://doi.org/10.1037/0096-3445.111.1.1

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. Dans L. Radford, G. Schubring et F. Seeger (dir.), *Semiotics in mathematics education : epistemology, history, classroom, and culture* (p. 215-234). Sense Publishers.

Radford, L. (2011). Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage : la théorie de l'objectivation. *Éléments, 1*, 1-27.

Rinaldi, A.-M. (2013). Mesurer avec une règle cassée pour comprendre la technique usuelle de la soustraction posée. *Grand N*, 91, 93-119.

Rinaldi, A.-M. (2021). Habiletés calculatoires : les enjeux de la réécriture de calculs soustractifs. *Recherches en didactique des mathématiques, 41*(2), 217–259.

Rinaldi, A.-M. (2022). Le calcul sous vingt : une possibilité de travailler la notion d'équivalence à l'école élémentaire. *Repères IREM*, 126, 23-42.

Sensevy, G., Quilio, G. et Mercier, A. (2015) Arithmetic and comprehension at primary. Dans X. Sun, B. Kaur et J. Novotna (dir.), *Proceedings of ICMI study 23: Primary Mathematics Study on Whole Numbers* (p. 472-479). University of Macau.

Siegler, R. (1987). The perils of averaging data over strategies: an example from children's addition. *Journal of experimental Psychology, 116* (3), 250-264. https://doi.org/10.1037/0096-3445.116.3.250

Squalli, H. (2002). Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire : un exemple de raisonnements à l'aide de concepts mathématiques. *Instantanés mathématiques, automne 2002*, 1-10.

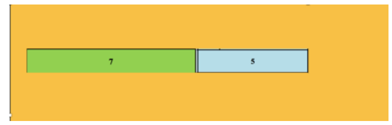
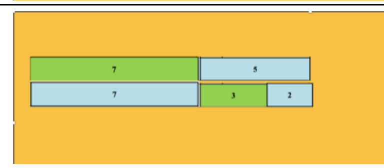
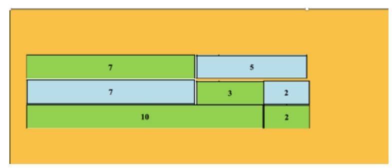
Squalli, H., Oliveira, I., Bronner, A. et Larguier, M. (2020). *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires*. Livres en ligne du CRIRES. https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches

Theis, L. (2005). L'apprentissage du signe = : un obstacle cognitif important. *For the Learning of Mathematics*, *25*(3), 7–12.

Vilette, B., Fischer, J.-P., Sander, E., Sensevy, G., Quilio, S. et Richard, J.-F. (2017). Peut-on améliorer l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique au CP? Le dispositif ACE. *Revue française de pédagogie*, 201, 105-120. https://doi.org/10.4000/rfp.7296

Vlassis, J. et Demonty, I. (2019). Conceptualisation, symbolisation et interactions enseignante/enseignant-élèves dans les apprentissages mathématiques : l'exemple de la généralisation. *Éducation et francophonie*, *47*(3), 98–120. https://doi.org/10.7202/1066515ar

Annexe 1 : Règle du jeu du dix plus « … »

<u>Première étape</u> Les joueurs de l'équipe A lisent le calcul à effectuer (ici 5 + 7) et posent les bandes correspondantes.	
<u>Deuxième étape</u> Les joueurs de l'équipe B posent dessous et bord à bord une des deux bandes (ici la 7 par exemple).	
<u>Troisième étape</u> Les joueurs de l'équipe B **remplacent la seconde bande** (ici la bande 5) par deux bandes qui vont permettre d'exprimer le calcul sous la forme ***dix plus…***	
<u>Quatrième étape</u> Les joueurs de l'équipe B placent sur une dernière ligne la bande dix et la bande « … » et dictent aux joueurs de l'équipe A, le calcul correspondant : $7 + 5 = \boxed{7 + 3} + 2 = 10 + 2$	
<u>Cinquième étape</u> Les rôles sont inversés. Les joueurs de l'équipe B prennent la fiche de calcul et lisent le second calcul à effectuer. Ils placent les bandes. Les joueurs de l'équipe A poursuivent…	