



Le cadre de l'apprentissage par problématisation : outils et enjeux en didactique des mathématiques

Sylvie GRAU

Maîtresse de conférences en didactique des mathématiques

Laboratoire du CREN – INSPÉ Nantes Université FRANCE

sylvie.grau@univ-nantes.fr

Résumé : Notre hypothèse de recherche est que certaines notions ne sont pas disponibles chez une majorité d'élèves du fait qu'elles ne sont pas problématisées ni même enseignées sous une forme problématisée. Le cadre de l'apprentissage par problématisation apporte des outils pour mieux comprendre comment les élèves posent, construisent et résolvent des problèmes et quelle est la dynamique de cette construction lors d'un travail d'équipe. Il nous a permis de concevoir un scénario pour enseigner la modélisation fonctionnelle d'une situation concrète et son expérimentation a été réalisée en France auprès d'élèves de 14 à 16 ans. L'objectif est d'amener les élèves à faire émerger collectivement des nécessités liées au problème (genèse des problèmes) et au savoir visé (genèse du registre explicatif). Dans cet article, nous allons exposer ce cadre théorique, les outils que nous avons construits, et donner quelques résultats d'analyse de l'expérimentation.

Mots clés : problématisation, activité mathématique, contrat didactique, institutionnalisation

The learning framework of problematization: tools and issues in mathematics teaching

Abstract: Our research hypothesis is that certain concepts are not available to most students because they are not problematized (formulated as problems) or even taught in a problematized form. The learning framework of problematization provides tools for better understanding how students formulate, construct and solve problems as well as grasping the dynamic of this construction process in a groupwork context. Based on this framework, we designed a lesson plan to teach the functional modeling of a concrete situation, and the lesson plan was implemented in France with pupils aged 14-16. The objective was to help pupils collectively identify the necessities linked to the problem (genesis of problems) and to the knowledge targeted (genesis of the explanatory

register). This article presents our theoretical framework and the tools we developed, along with an analysis of some of the results.

Keywords: problematization, mathematical activity, didactic contract, institutionalization

Introduction

La place donnée à la résolution de problèmes dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques est de plus en plus importante. Elle a beaucoup évolué en France, passant d'un rôle d'évaluation en fin d'apprentissage avant 1950 à un rôle central de toute activité mathématique dans les derniers programmes de 2016 (Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse (s. d), comme cela est exposé dans les documents d'accompagnement des programmes en 2022 (Ministère de l'Éducation nationale et de la jeunesse (2022). Si cette place se justifie dans une perspective socioconstructiviste (Brossard, 2017), la mise en œuvre dans les classes montre des dysfonctionnements que les didacticiens continuent de mettre en évidence (Choquet, 2017). Les analyses ont cependant bien du mal à prendre en considération tout ce qui entre en jeu lors de la résolution de problèmes mathématiques en classe. Dans la théorie des situations didactiques (désormais TSD), Brousseau met en évidence deux concepts clés : la notion de « milieu » (Brousseau, 1988) et celle de « contrat » dont on peut définir deux facettes, la facette épistémologique et la facette sociale, ainsi que différents niveaux de granularité (Hersant, 2014). Ces notions ne suffisent cependant pas à élaborer des situations adidactiques – des situations à finalité didactique, mais où le sujet agit en interaction avec un milieu comme si la situation n'était pas didactique – porteuses des savoirs visés et suffisamment robustes pour pouvoir les utiliser dans les classes ordinaires. C'est bien que d'autres facteurs interviennent sur l'activité réelle de l'élève et qu'il est nécessaire de développer des outils d'analyse pour mieux comprendre cette activité mathématique. Il n'est cependant pas possible d'en rester à l'analyse de l'activité d'un élève générique comme en témoignent les travaux de Rayou (2020), tant les représentations, les expériences individuelles et le contexte, peuvent avoir une influence sur l'activité du sujet. S'intéresser à l'activité mathématique de l'élève demande de prendre en compte trois dimensions : la dimension épistémique, la dimension sociale et la dimension cognitive. De plus, l'activité mathématique de l'élève entre dans un processus au sein d'une communauté, ce qui signifie qu'il faut tenir compte de différentes temporalités et des interactions sociales, l'objectif étant de comprendre comment cette activité participe à la construction de connaissances partagées.

Dans cet article, nous nous intéressons à l'activité en classe de mathématiques de l'élève sujet, sur des temps de travail en groupes, sans interventions, ou très peu, de l'enseignant, pour analyser comment il problématise au sein d'un collectif de

pairs. Nous considérerons ici l'activité mathématique de l'élève comme une activité de problématisation, c'est-à-dire comme un enchaînement de problèmes que l'élève pose, construit et cherche à résoudre. Nous observons l'élève individuellement en analysant les thèses et objections qu'il expose au cours de débats au sein d'un groupe, mais nous regardons aussi le collectif pour comprendre la manière dont les interactions font évoluer la construction du problème par le groupe. Ces moments d'échanges sont les seuls accès à ce qui se passe dans la tête de l'élève au cours de l'activité.

Nous considérons que les élèves problématisent lorsqu'ils construisent les nécessités d'un problème en référence à une exploration empirique, c'est-à-dire lorsqu'ils ont une compréhension du problème qui est de l'ordre du "pourquoi ça ne peut pas être autrement" qui émane d'un travail mobilisant des "faits" et une construction du problème. (Hersant, 2022)

Si Piaget considère que le développement des structures de connaissances est produit par un double processus de déséquilibre et de rééquilibration (Legendre, 2006), dans le cadre de l'apprentissage par problématisation (désormais CAP), ce développement correspond à un changement de registre explicatif. Une problématisation s'effectue dans un cadre qui détermine « quels sont les types de questions et les types de réponses pertinentes dans un contexte donné » (Fabre, 2016, p. 17). Par registre explicatif, nous entendons le paradigme, le monde mental, la théorie, ce sur quoi s'appuie l'individu pour construire les modèles lui permettant de dire, agir et penser et lui permettant de construire des explications pour le problème traité. Il s'agit en fait de considérer que l'apprentissage modifie la structure des connaissances antérieures au sein d'un registre qui en assure la cohérence et permet de générer des raisons. Le CAP s'intéresse à la genèse de ce registre dit « explicatif ».

Dans ce registre, l'élève dispose de modèles lui permettant de construire le problème. Par exemple, si nous considérons le cadre de l'analyse comme registre explicatif – cadre étant ici pris au sens de Douady (1986) –, il offre des définitions, des théorèmes, des exemples de problèmes résolus et donc un certain nombre de modèles. Nous avons une adaptation des modèles en fonction des apprentissages au cours de la scolarité, et en parallèle une adaptation de leur usage en fonction des modèles à disposition. Ces adaptations proviennent de l'émergence de nouvelles contraintes que nous appelons des nécessités, contingentes du problème traité.

Les outils développés dans le CAP peuvent aider à comprendre l'articulation entre différentes dimensions de l'activité mathématique de l'élève. Utilisés pour analyser les interactions entre élèves lors de la recherche de problèmes au sein d'un collectif et lors de leurs productions écrites et orales, ces outils donnent une

idée de la dynamique de problématisation et fournissent des éléments permettant de caractériser l'évolution du registre explicatif, et ce, à différents niveaux : micro pour ce qui concerne l'individu, méso pour ce qui concerne un petit groupe et macro pour ce qui concerne le groupe classe. Il est difficile d'isoler l'activité d'un seul élève au sein d'un groupe tant les interactions agissent sur cette activité, mais nous repérons l'évolution des explications que les élèves génèrent individuellement. À travers la définition de différents rôles, nous repérons les élèves qui peuvent endosser plusieurs rôles au cours du travail dans l'idée d'un débat intérieur en référence à la « surveillance de soi » chez Bachelard (Hersant, 2022). Bien sûr, la reconstruction de l'activité de l'élève à partir des traces écrites et orales est fonction de la quantité et de la qualité de ces traces, rendant l'analyse très difficile pour certains élèves, d'où la mise en place de situations favorisant la production d'explications individuelles par les élèves.

À partir de ces éléments d'analyse, nous avons utilisé le CAP pour concevoir des séquences tenant compte de ce processus considéré comme une double genèse : la genèse du problème et celle du registre explicatif. Nous allons voir comment cette approche permet de partir du point de vue de l'élève pour concevoir des séquences dont les étapes permettent aux élèves de faire des pauses réflexives rétroactives, mais surtout proactives. L'objectif de nos recherches est aussi d'aider les enseignants à construire des situations didactiques en utilisant le CAP comme cadre théorique d'analyse.

Nous allons d'abord présenter les outils du CAP. Ensuite nous analyserons avec ces outils une séquence visant l'enseignement des fonctions affines en fin de collège et début du lycée (élèves de 14-16 ans). Nous verrons que les différents rôles pris par les élèves sont essentiels dans la dynamique de problématisation. Nous verrons aussi que la forme de l'institutionnalisation, dans le CAP, donne une nouvelle responsabilité aux élèves et que le scénario proposé a une fonction d'aide à la problématisation. Nous concluons sur les limites et perspectives de ce cadre théorique dans le champ de la didactique des mathématiques qui est le nôtre.

1. Le cadre de l'apprentissage par problématisation et ses outils d'analyse

Un problème peut être vu comme l'occasion d'apprendre par franchissement d'un obstacle au sens de Bachelard ou au fil d'une enquête au sens de Dewey (Fabre, 2005). Schématisée dans un losange (voir le schéma à la figure 1), la problématisation se joue entre quatre pôles qui délimitent l'espace problème : le problème posé, sa solution, les conditions et les données. Un problème est posé à partir du moment où on prend conscience de son existence. Construire le problème suppose de déterminer les contraintes et les ressources pertinentes pour le

circonscrire et le résoudre. Ces contraintes et ressources peuvent être de deux natures. Celles internes au problème, liées au contexte, aux données qu'elles soient fournies ou construites, sont considérées comme des faits « hors question », c'est-à-dire comme des vérités devant être prises en considération; ce sont les données du problème. Les contraintes et ressources propres à l'actant que sont ses connaissances, représentations, schèmes d'actions, répertoires, modèles, conceptions, en lien avec le problème, et qu'il va mobiliser pour se représenter le problème et le traiter, sont les conditions. Si résoudre le problème amène à privilégier un premier axe du problème vers la solution, la problématisation suppose la mise en tension, sur un autre axe, des données et des conditions, toujours en lien avec le problème. Le modèle du losange permet d'analyser comment un problème est posé, construit et résolu, suivant les éléments qui caractérisent chacun de ces pôles. Il peut aussi permettre d'analyser la dynamique de problématisation par la modélisation des différentes étapes du processus. On parle alors d'un enchaînement de problématisation. Problématiser revient à une circulation dans l'espace problème en fonction de contraintes multiples et à une évolution des éléments sur chacun des pôles.

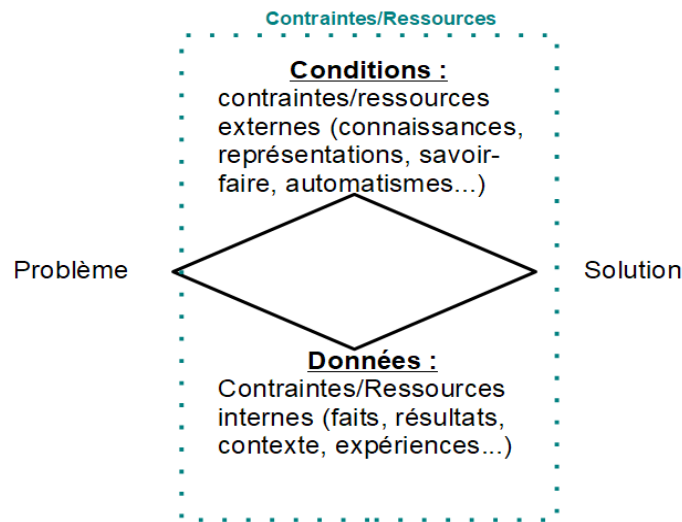


Figure 1. Losange de problématisation (Fabre, 2011)

La mise en tension des données et des conditions suppose des ouvertures et des fermetures du problème, la construction de problèmes transitoires (en particulier lorsqu'il s'agit d'établir de nouveaux faits, de construire de nouvelles données, sans toujours savoir comment ces nouveaux résultats vont ensuite participer à la résolution du problème initial), de sous-problèmes (par l'identification d'étapes dans la résolution ou de nécessités quant à la construction de données manquantes), des temps d'analyse rétroactive pour en tirer des éléments proactifs.

Appliqué aux mathématiques, le modèle du losange permet de considérer l'activité mathématique de l'élève comme un enchaînement de problèmes transitoires, de sous-problèmes, voire de problèmes de nature différente par transformation du but. Dans le champ de la didactique des mathématiques, la spécificité du CAP est qu'il permet d'analyser le problème mathématique tel que l'élève le construit en tant que sujet et non d'analyser le problème théorique pensé par l'enseignant et censé être construit par un élève générique dans une situation didactique.

Si les travaux de Fabre se sont penchés sur la manière d'amener l'élève à problématiser par un jeu d'inducteurs potentiels visant à orienter son activité sur l'un ou l'autre des pôles du losange (Musquer, 2017), nous nous sommes, quant à nous, intéressés à l'utilisation de cet outil pour décrire et analyser l'activité mathématique des élèves considérée comme un enchaînement de problématisation.

1.1 Les losanges de problématisation gradués pour analyser la genèse du problème

Face au problème initial tel qu'il est posé par l'enseignant, chaque élève construit son propre problème ou le plus souvent, un enchaînement de problèmes comprenant des problèmes transitoires et des sous-problèmes. Cette construction suppose des raisonnements qui correspondent à une certaine circulation dans le losange, la prise en considération ou non de certains pôles, mais aussi des manières différentes de considérer un même pôle. Nous avons essayé de les répertorier à partir de l'analyse des productions orales et écrites d'élèves lors de travaux de groupes et avons globalement identifié des niveaux nous permettant de mesurer l'évolution de ces constructions. Nous considérons ainsi trois niveaux de problématisation pour chacun des sommets du losange de problématisation qui décrivent une hiérarchie dans la problématisation que nous allons préciser. Ces niveaux nous ont permis de faire évoluer le losange de Fabre vers un losange gradué susceptible par ses déformations de rendre visible la dynamique de problématisation. Amener les élèves à problématiser en mathématiques revient à les amener à résoudre des problèmes explicatifs orientés vers la preuve. En effet, expliquer passe par la formulation de nécessités au sein d'un modèle, c'est-à-dire de ce qui fait que telle proposition est vraie au sein d'un cadre théorique mathématique clairement identifié en lien avec un problème spécifique. Notre hypothèse est que la formulation de ces nécessités permet de construire des connaissances plus disponibles car associées d'une part au problème qu'elles permettent de résoudre et d'autre part aux contraintes qui en définissent le domaine de validité.

La difficulté est d'avoir accès à la nature des différents problèmes, sous-problèmes et problèmes transitoires construits par les élèves au cours de l'activité. Pour ce faire, nous mettons les élèves en groupes et nous enregistrons les échanges, trois caméras fixes permettent de filmer l'ensemble des groupes, les chercheurs prennent des photographies et des notes, ils enregistrent sur clé USB les impressions des écrans des ordinateurs, photographient les affichages des écrans de calculatrice, pour décrire les gestes, attitudes. À partir de ces traces de l'activité, nous reconstruisons le problème construit par les élèves, tel qu'ils le font évoluer collectivement sur le temps d'une séance. Nous avons ainsi repéré que certains éléments permettent des avancées importantes du problème alors que d'autres semblent effectuer des boucles sans faire avancer le problème. Nous avons alors cherché à classer ces éléments par pôles, puis nous les avons classés suivant leurs effets sur la construction du problème et les avons répartis arbitrairement en trois niveaux.

Concernant le premier pôle, celui du problème posé, un problème peut être orienté vers la solution (1^{er} niveau), il s'agit alors de produire un résultat par la mobilisation d'une procédure plus ou moins disponible. Il peut être un problème de comparaison, de mise en relation (2^e niveau), ce qui demande de préciser un critère, une structure, des références, etc. Il peut enfin être un problème explicatif, donc porteur d'arguments, orienté vers la preuve (3^e niveau).

Concernant la solution attendue, elle peut être factuelle (1^{er} niveau), il s'agit alors de produire un nouveau fait mathématique comme une réponse numérique, une propriété, une expression, etc. Mais la solution attendue peut aussi être une relation (2^e niveau), c'est-à-dire la construction d'un nouveau critère, d'une nouvelle règle. Ce niveau suppose une plus grande généralité, il peut s'agir par exemple de faire une conjecture. Elle peut enfin être une nécessité (3^e niveau) et gagner encore en généralité par l'explicitation du « pourquoi c'est ainsi et que cela ne peut pas être autrement ».

Concernant les données, elles sont contingentes, elles correspondent à des constatations, des informations prélevées, des faits, c'est-à-dire des propositions considérées comme vraies, non réfutables. À partir des travaux de Piaget et Garcia (1983) et reprenant les termes de l'épistémologie génétique, nous considérons qu'elles peuvent être traitées de manière intraobjectale (1^{er} niveau) si une seule donnée porte le sens global de la situation, ce qui revient à ne considérer qu'une seule donnée et à interpréter les autres au regard de cette donnée de référence ou à les ignorer si elles ne correspondent pas au modèle interprétatif. Traiter les données de manière interobjectale (2^e niveau) suppose que le sens global de la situation émane d'une mise en relation de différentes données, des inférences sont faites. Traiter les données de manière transobjectale (3^e niveau)

signifie que le sens de la situation est porté par une théorie permettant la prise en compte de l'ensemble des données.

Les conditions peuvent être assertoriques (1^{er} niveau) si elles ont un statut non démontré – comme les théorèmes élèves par exemple –, problématiques (2^e niveau) s'il s'agit d'une hypothèse de travail ou d'une ouverture de possible, ou apodictiques (3^e niveau) si elles expriment une nécessité à l'intérieur d'un modèle. Nous préciserons ces niveaux dans l'exemple que nous présenterons plus avant dans cet article.

Nous avons alors identifié des événements de problématisation, considérés comme des événements qui, à des moments précis, viennent modifier la structure du problème au sein du losange. À un stade du travail, un problème factuel peut amener les élèves à la construction d'une nouvelle donnée, qui suppose un traitement différent de l'ensemble des autres données, ou la considération d'une nouvelle condition, voire à poser un nouveau problème qui devient explicatif. En fait, l'évolution n'est pas linéaire, à chaque événement de problématisation, nous avons une déformation du losange car le niveau correspondant à chaque sommet peut varier différemment (voir le schéma à la figure 2).

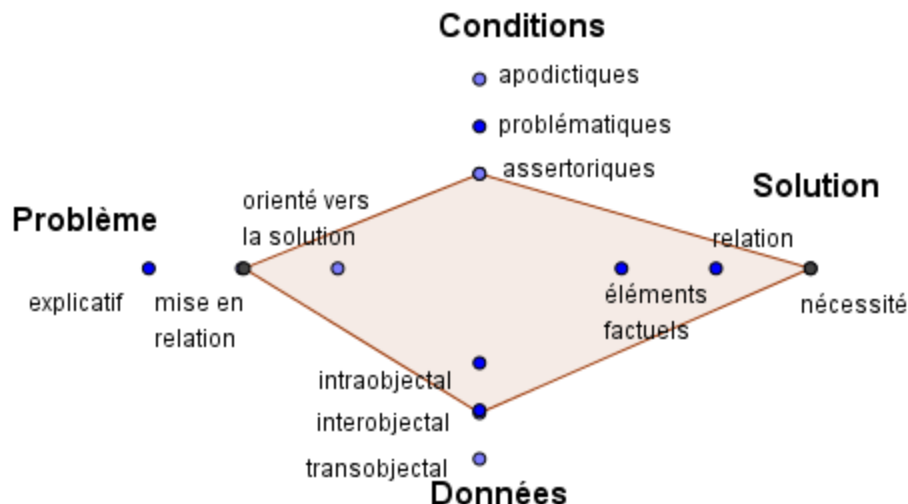


Figure 2. Losange de problématisation gradué (Grau, 2017b)

Nous considérons qu'un savoir mathématique est problématisé à partir du moment où un problème explicatif a permis d'en établir les nécessités, c'est-à-dire ce qui fait que le savoir est ce qu'il est et qu'il ne peut pas être autrement au sein d'un cadre théorique et en lien avec les problèmes qu'il permet de résoudre. Pour comprendre comment se fait cette construction d'un problème explicatif, nous avons analysé plus spécifiquement l'activité mathématique aux niveaux micro et

méso d'élèves qui, lors d'un travail d'équipe, avaient effectivement abouti à la formalisation d'un savoir problématisé.

Le losange de problématisation gradué est renseigné pour chaque épisode entre deux événements de problématisation à partir de la question que les élèves mettent au travail et des différents arguments, des propriétés ou définitions qu'ils utilisent de même que de la solution temporaire qu'ils obtiennent et qui les amène à poser un nouveau problème. Lorsque le quadrilatère obtenu s'étire davantage vers l'un des pôles, cela signifie qu'un inducteur de problématisation a amené les élèves à prendre davantage plus en considération les éléments d'un pôle. L'analyse des débats au sein des groupes pendant les séances menées en classe montre l'avancée des arguments. Nous identifions ces inducteurs à travers des marqueurs langagiers (expression d'un doute ou d'une certitude, formulation de type « et si », évocation de travaux anciens, d'éléments du cours, de résultats de calculs antérieurs, etc.). Ainsi, la forme et l'aire du quadrilatère caractérisent un niveau de problématisation.

Par ailleurs, cette analyse des interactions verbales permet de caractériser différents rôles que peuvent prendre individuellement les élèves. La structure de ces débats n'est pas linéaire, elle montre des ouvertures et des fermetures qui peuvent émaner d'intervention d'acteurs différents, des retours en arrière, des pauses, des passages par des sous-problèmes factuels avant de revenir à un problème explicatif. Notre recherche a alors permis d'identifier quatre rôles dans les interactions. L'agissant propose, fait, opère, exécute, il construit de nouvelles données. Le vérificateur contrôle, il compare, vérifie la ligne directrice, le respect du cadre ou des consignes, il valide. Le questionnant remet en cause, demande des explicitations, il amène les autres à reformuler, à argumenter, à justifier. Enfin, le formulateur est celui qui synthétise, conclut, formule ou reformule, pose des conclusions provisoires, pose les problématiques, énonce des éléments du savoir. Chaque élève peut endosser alternativement ces rôles. Nous considérons que la problématisation est le résultat d'un changement régulier de rôles et que les nécessités émergent de ces allers-retours entre l'agir, le penser et le dire. Notre recherche a permis de montrer qu'un élève problématise - il construit des nécessités du problème par une mise en tension des données et des conditions - à partir du moment où il peut passer par chacun de ces rôles seul (dans l'idée d'un débat intérieur « self-talk ») ou au sein du groupe par adaptation au milieu. En fait, certains rôles orientent plus spécifiquement l'activité sur certains pôles du losange de problématisation. Par exemple, le vérificateur peut amener à interroger la validité d'un résultat au regard des conditions et donc à remettre en cause une condition assertorique (comme un théorème élève par exemple). Le vérificateur peut aussi amener à interroger cette même validité au regard des données et

amener un traitement inter ou transobjectif, ou au regard du problème posé, ce qui peut alors amener le groupe à repositionner le problème.

Les losanges de problématisation gradués peuvent aider à comprendre comment les inducteurs de problématisation (Fabre et Musquer, 2009) agissent sur la dynamique de problématisation. Fabre et Musquer ont établi une typologie de ces inducteurs considérés comme des éléments qui orientent le travail d'un pôle du losange vers un autre, et précisé leur fonction suivant les pôles ainsi mis en relation. Lors de la conception de séances, ils parlent cependant d'inducteurs potentiels, car d'autres facteurs peuvent jouer sur leur efficacité en classe. Nos recherches ont mis en évidence que des inducteurs potentiels émergent en fait des interactions entre élèves dans les groupes. Nous avons donc cherché à provoquer l'émergence de ces inducteurs pour aider les élèves à problématiser.

Les losanges de problématisation gradués, établis à chaque étape du travail au sein des groupes d'élèves, permettent de rendre compte des différentes dynamiques de problématisation et d'identifier les arguments, les faits, les nécessités au cours du processus. Pour amener tous les élèves à prendre les différents rôles que nous avons définis et donc à problématiser, nous avons construit un enchaînement de situations. Un problème initial est posé aux élèves, les amenant à construire de nouvelles données (l'élève est agissant) afin de faire émerger un paradoxe, une incohérence (l'élève est questionnant). Les élèves sont ensuite amenés à produire des explications (l'élève est formulateur). La situation suivante est construite à partir des explications produites par les élèves. Il s'agit alors de faire émerger des nécessités (l'élève est vérificateur). La dernière étape consiste à proposer une situation construite à partir des nécessités, les élèves ont alors à formaliser une règle, une propriété, une définition, toujours en lien avec le problème construit (l'élève est formulateur). Cet enchaînement caractérise une problématisation par analyse des productions. Son but est d'amener les élèves à construire un savoir en lien avec le problème posé et avec des nécessités du problème. La présentation ici très linéaire de la problématisation par analyse des productions peut en réalité passer par des étapes intermédiaires où les élèves peuvent avoir de nouveau à produire des données, vérifier de nouveaux résultats, passer par des formulations temporaires. L'enjeu principal est que chaque élève soit acteur dans chacune des phases que nous considérons comme indispensables à une problématisation du savoir. Les losanges peuvent alors témoigner de ce que nous appelons la genèse du problème.

1.2 Les espaces de contraintes

Pour construire un scénario amenant les élèves à problématiser, une analyse a priori dans le cadre de la TSD peut s'avérer insuffisante car elle se contente

souvent de lister des procédures possibles et de mettre en évidence les obstacles à partir du problème théorique et dans l'idée d'un élève générique. Tenir compte des problèmes réellement construits par les élèves considérés comme des sujets suppose d'anticiper d'autres représentations de la situation que celles imaginées par l'enseignant pour son projet d'enseignement parce que l'activité de l'élève est toujours située. Une analyse épistémologique et une praxéologie du savoir visé peuvent apporter des éléments que nous pouvons organiser dans un espace de contraintes (Orange, 2012). Cet espace se caractérise par trois registres : le registre empirique est l'ensemble des faits – tout ce qui est considéré comme vrai et non mis en question qu'il s'agisse d'un résultat obtenu, d'une donnée initiale, d'une propriété établie, d'une représentation mentale, etc. –, le registre des modèles est l'ensemble des modèles qui rendent compte des faits ou participent à leur construction, le registre explicatif étant le paradigme sur lequel s'appuie la construction des modèles. Initialement construit pour l'analyse en didactique des sciences et vie de la Terre, l'espace de contraintes mathématiques peut être construit à partir de la TAD (théorie anthropologique du didactique) en organisant dans cet espace ce qui peut relever de tâches, techniques, technologies et théories (Chevallard, 1992). En mathématiques, il est possible de construire un espace de contraintes a priori, mais aussi un espace de contraintes a posteriori à partir des traces de l'activité des élèves. Le registre empirique devient alors l'ensemble des données du problème théorique enrichi de ce que les élèves produisent par des traitements divers, au travers des tâches qu'ils se sont assignées, et qu'ils ne mettent pas en question, du moins temporairement. Ces traitements sont contraints par des nécessités qui, elles-mêmes, relèvent de modèles. Enfin, ces modèles s'inscrivent dans des cadres mathématiques ou non, ils font référence à un registre explicatif lui-même configuré par trois mondes : le monde scientifique, le monde social et le monde scolaire. Prenons l'exemple d'une modélisation d'une covariation de deux grandeurs. Les élèves peuvent utiliser différents registres sémiotiques pour envisager des traitements (Duval, 1995, 2006). Ils peuvent essayer de représenter les données (registre graphique), de faire des calculs (registre des écritures numériques) ou de tester des expressions algébriques (registre des écritures algébriques). Suivant les traitements, les formulations écrites et les registres sémiotiques utilisés, il nous est alors possible de repérer les contraintes qui ont organisé l'activité. Ces contraintes peuvent être des nécessités liées au nombre de données à traiter (trois suffisent pour un traitement dans l'idée de grandeurs proportionnelles, par exemple), au choix du repère pour le tracé, au choix des expressions testées, etc. L'articulation entre ces conditions et les données amène à penser le registre explicatif en termes de cadre mathématique (cadre algébrique, cadre fonctionnel, cadre des mesures de grandeurs) ou relevant d'une autre discipline (cadre des mesures physiques). Au sein d'un même registre

explicatif interviennent des éléments de différents mondes. Par exemple, concernant la proportionnalité, certains éléments viennent du monde des théories mathématiques comme les propriétés de linéarité ou la notion de fonction affine. D'autres relèvent uniquement du monde scolaire et sont liés à des objets purement didactiques (ex. le tableau de proportionnalité qui est un construit scolaire), ou à la représentation de ce qu'est l'activité mathématique scolaire (statut de l'erreur, type de tâches habituellement demandé dans un contexte, comme l'utilisation de produits en croix dès que les données sont dans un tableau, par exemple). D'autres enfin viennent du monde social considéré comme l'ensemble des expériences vécues, des objets du monde, des concepts quotidiens.

L'organisation de ces éléments dans l'espace de contraintes a posteriori permet de visualiser des ouvertures et des fermetures. Il s'agit en fait d'une réorganisation dans un seul tableau des différents losanges de problématisation à chaque épisode. C'est aussi l'occasion de visualiser comment des nécessités incompatibles peuvent cependant cohabiter, preuve que certains élèves n'ont pas une vision globale de l'ensemble des données et qu'ils les traitent isolément. Cette compréhension plus fine de la manière dont les élèves construisent le problème peut donner des pistes pour concevoir des situations didactiques tenant compte des ouvertures et fermetures qu'il s'agirait de provoquer pour amener les élèves à des problèmes explicatifs orientés vers la construction des nécessités liées au savoir visé.

Le registre explicatif peut être un cadre mathématique au sens de Douady (1986), mais il peut être un paradigme plus général englobant différents cadres, par exemple le paradigme de la covariation (Passaro, 2013) qui traverse aussi bien le cadre de l'arithmétique, celui des mesures de grandeurs, que celui de l'analyse. Orange (2005) considère qu'il est possible d'attester d'un apprentissage si au cours de l'activité, les nécessités évoluent en lien avec un changement de registre explicatif. Par exemple, en mathématiques, passer du cadre des mesures de grandeur au paradigme de la covariation permet d'aborder la question de la modélisation et d'envisager des traitements sur des fonctions théoriques et non plus des fonctions empiriques.

Les espaces de contraintes permettent de lister a posteriori les différents registres explicatifs mobilisés par les élèves à partir des nécessités mises en évidence au cours de leur activité. Établis à différents moments de l'apprentissage, ils rendent compte de l'évolution des registres explicatifs et donc témoignent d'apprentissages. Ils permettent aussi de mieux comprendre certaines représentations ou certains modèles qui peuvent devenir des obstacles à l'apprentissage. Ils témoignent donc de la genèse du registre explicatif.

Ces deux outils, les losanges de problématisation gradués et les espaces de contraintes a posteriori, sont complémentaires. Les losanges donnent à voir la genèse du problème au niveau méso. Il s'agit de comprendre comment chaque groupe construit collectivement le problème et de mesurer l'écart entre les problèmes construits par les différents groupes au sein de la classe. Au niveau macro, l'espace de contraintes a posteriori montre les différents registres explicatifs à l'œuvre dans la classe et met en évidence les faits et idées qui y prédominent sans rendre compte de la dynamique de problématisation. Pour l'enseignant, l'enjeu est de faire construire aux élèves un « problème pertinent par rapport aux savoirs que l'on veut leur faire construire » (Orange, 2012, p.31) et de les amener à générer des raisons. Ces deux outils apportent des informations qui peuvent utilement aider l'enseignant à élaborer des situations d'enseignement en jouant sur les inducteurs de problématisation : Faut-il ouvrir de nouveaux possibles ou au contraire amener à fermer une piste? Faut-il amener les élèves à valider ou invalider une solution? Faut-il les amener à une nouvelle factualisation? Faut-il apporter de nouvelles données? De nouvelles connaissances? Faut-il modifier la question? Proposer une solution? À partir des productions des élèves et de ces outils, l'enseignant peut concevoir l'enchaînement d'une problématisation par analyse des productions (désormais PPAP). Nous allons développer cet aspect à partir d'un exemple.

2. Un exemple de PPAP pour l'enseignement de la notion de fonction affine

La notion de fonction affine est enseignée en France à la fin du collège (élèves de 14-15 ans) et reprise au début du lycée au cours de l'année de 2^{de} (élèves de 15-16 ans). Si la notion est mobilisable en mathématiques, elle n'est pas réellement disponible dans les autres disciplines, ni même au sein de la classe de mathématiques lorsque les élèves ont la charge de la modélisation, c'est-à-dire, ici, de l'utilisation, sans que cela soit induit par l'enseignant, d'une relation affine pour modéliser la relation entre deux grandeurs. Nous avons donc construit une PPAP visant l'émergence des nécessités liées à cette notion, relativement au problème de modélisation d'une covariation. Cette ingénierie a été expérimentée dans plusieurs classes (une en fin d'année de 3^e et deux autres en tout début d'année de 2^{de}). Les productions écrites des élèves ont été recueillies, les échanges entre les élèves des différents groupes ont été enregistrés, filmés, des photographies ont été prises pendant les séances pour témoigner de l'usage de certains outils ou de productions intermédiaires, comme présenté dans la méthodologie plus avant. Nous avons transcrit les échanges et utilisé les vidéos et les photographies pour interpréter les propos, en particulier lorsque les élèves ont utilisé un langage déictique ou lorsque les échanges portaient sur des éléments dont nous n'avions plus trace dans la

production finale (affichage de calculatrice ou sur écran de l'ordinateur, tracés au brouillon, etc.).

2.1 La structure de la PPAP pression-température

Nous avons vu que la PPAP comporte différentes étapes, de sorte que les élèves prennent différents rôles. Nous allons faire ici une analyse a priori rapide de chacune des étapes afin de repérer les niveaux de problématisation et les événements de problématisation attendus. La 1^{re} étape est construite par le chercheur et mise en œuvre par un enseignant dans sa classe, les productions sont récupérées en fin de séance et servent à élaborer le support de travail de l'étape suivante et ainsi de suite. La PPAP se termine lorsque les productions attestent d'une formulation correcte des nécessités attendues. Suivant le savoir visé, le problème et le contexte, le nombre d'étapes peut donc varier. Dans cette recherche, les enseignants ne participent pas à l'élaboration de la 1^{re} séance, mais ils sont associés à la suite de la conception. Lors de la mise en œuvre, les documents de travail et la consigne sont donnés aux élèves par le chercheur, ensuite le chercheur et l'enseignant observent et collectent des traces de l'activité mathématique des élèves, mais ils n'interviennent pas auprès des groupes.

Situation 1 :

Trois professeurs font la même expérience. Ils mesurent la pression en hPa (hectopascal) en faisant varier la température d'un même corps dans un même récipient. Voici le tableau de mesures obtenues pour un volume constant et un nombre de moles constant :

par le professeur A :

T en °C	-15,2	7,5	10,2	23,7	41	43,7
P en hPa	774	842	850	890	942	950

par le professeur B :

T en °F	4,64	45,5	50,36	74,66	105,8	110,66
P en hPa	774	842	850	890	942	950

par le professeur C :

T en K	257,95	280,65	283,35	296,85	314,15	316,85
P en hPa	774	842	850	890	942	950

D'après ces données, la pression est-elle proportionnelle à la température?

Déterminer une relation entre la température et la pression qui est vraie quelle que soit l'unité choisie pour mesurer la température.

Figure 3. Le problème initial

1^{re} étape : le problème initial (voir figure 3) est un problème de mise en relation (2^e niveau) : il est d'abord demandé aux élèves de dire si la pression est

proportionnelle à la température, à partir d'un tableau de mesures (A, B ou C). Un paradoxe va émerger au moment de la mise en commun du fait que les élèves ont les mêmes mesures, mais exprimées dans des unités différentes : les températures sont en degrés Celsius (tableau A), en degrés Fahrenheit (tableau B) ou en Kelvin (tableau C). La pression s'avère proportionnelle à la température uniquement dans le cas où la température est mesurée en Kelvin. Il s'agit alors pour les élèves de comprendre comment cela est possible. La consigne suivante appelle un haut niveau de généralisation puisqu'il s'agit de caractériser une famille de fonctions à partir de trois relations dont une seule a été caractérisée.

2^e étape : les élèves ayant produit des calculs (dont des calculs de variations) et des représentations graphiques, ces éléments sont soumis à la comparaison (problème de mise en relation donc toujours de 2^e niveau). Il s'avère que dans les trois cas, le graphique obtenu est une droite. La question posée aux élèves est toujours de déterminer une relation entre la température, mais à partir de ces nouvelles données. Le problème devient explicatif (3^e niveau), les élèves se demandent comment expliquer l'alignement des points à partir des données des tableaux. Cette étape amène les élèves à formuler une nécessité : les variations de pression doivent être proportionnelles aux variations de température.

3^e étape : La proportionnalité des variations a été mise en évidence par des calculs, des tracés sur les graphiques ou des écritures algébriques. Il est demandé aux élèves de trouver comment exprimer cette nécessité dans les différents registres sémiotiques qu'ils ont utilisés : graphiques, tableaux, écritures algébriques? Les élèves ont alors à expliquer comment chaque caractéristique s'exprime dans ces différents registres sémiotiques : la proportionnalité des écarts par l'alignement des points et la mise en évidence des variations dans le tableau de valeurs, la relation entre la pression P et la température T par une expression de la forme $P = aT + b$ où a est le coefficient de proportionnalité et b la pression pour une température nulle.

4^e étape : Un document reprend les explications fournies à l'étape 3 pour montrer le lien entre les différentes manières de représenter la proportionnalité des variations. Il est demandé aux élèves une formalisation de ce qu'est une fonction affine en lien avec le problème de modélisation de la covariation de deux grandeurs et avec les nécessités construites concernant : l'identification de la grandeur dépendante, la proportionnalité des variations, le choix des unités, la valeur en zéro. Un document de synthèse présente la solution du problème et la formalisation de la proportionnalité des variations dans les différents registres sémiotiques.

Plusieurs contextes permettront ensuite de généraliser et d'aller vers une formulation théorique, c'est-à-dire la définition d'une fonction affine sur des nombres et non plus sur des grandeurs.

On comprend qu'une PPAP suppose un temps long. Il s'agit d'amener les élèves à faire la synthèse de différentes productions regroupées dans un document contrairement à la pratique la plus usuelle qui consiste à mettre les solutions en débat en classe entière et à l'oral. Ce qui est mis en discussion est alors « pourquoi c'est vrai », pour faire émerger des nécessités liées aux éléments du savoir visé.

L'espace de contraintes lié aux premières étapes (voir tableau 1) met en évidence les éléments du registre empirique, considéré comme l'ensemble des faits donnés ou construits par les élèves, ce qui est hors question. Au niveau du registre des modèles émergent des nécessités liées à la manière dont les élèves se représentent le problème, la manière dont ils le modélisent – ici comme une situation de proportionnalité d'abord puis de relation affine, le registre explicatif étant ce qui sous-tend les modèles utilisés.

Tableau 1. Espace de contraintes problème pression-température

Registre empirique	Le graphique montre un alignement des points.	Une même variation sur une grandeur amène une même variation sur l'autre, une variation double de l'une amène une variation double de l'autre.	Le produit en croix ne donne pas de bons résultats.	On a un coefficient de proportionnalité pour les données dans un seul des tableaux.
Nécessités au sein des modèles	Si deux suites de nombres sont proportionnelles, on peut appliquer le produit en croix.		La représentation graphique est une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, donc c'est la représentation graphique d'une fonction affine.	
Registre explicatif	Suites numériques proportionnelles	Grandeurs proportionnelles	Proportionnalité dans le cadre fonctionnel (covariation)	Fonction affine

L'espace de contraintes met en évidence les registres explicatifs, considérés comme les grands paradigmes dans lesquels les modèles sont mobilisés par les élèves pour construire le problème. Il s'agit en fait de l'espace théorique dans lequel les

losanges de problématisation ont une cohérence. L'enjeu ici est d'amener les élèves à un changement de cadre (Douady, 1986; Rogalski, 2001) pour passer du registre explicatif des suites numériques proportionnelles à celui des fonctions affines. Dans nos travaux de thèse (Grau, 2017b), notre analyse épistémologique a permis de mettre en évidence l'importance du passage par le point de vue covariationnel en appui sur les travaux de Passaro (2009, 2013, 2016), point de vue qui semble naturel chez les plus jeunes élèves et abandonné au profit de techniques apprises au cours de la scolarité. Il s'avère cependant que certains groupes d'élèves ne mobilisent aucun de ces registres explicatifs car ils n'inscrivent pas leur activité dans le cadre disciplinaire scolaire des mathématiques. Nous avons alors utilisé les losanges de problématisation pour montrer les dynamiques de problématisation – différentes suivant les groupes d'élèves et suivant les individus dans le groupe – et mettre en évidence certains écarts entre l'attendu et le réalisé en lien avec le contrat didactique (Grau, 2020).

2.2 L'analyse des interactions dans un groupe de quatre élèves

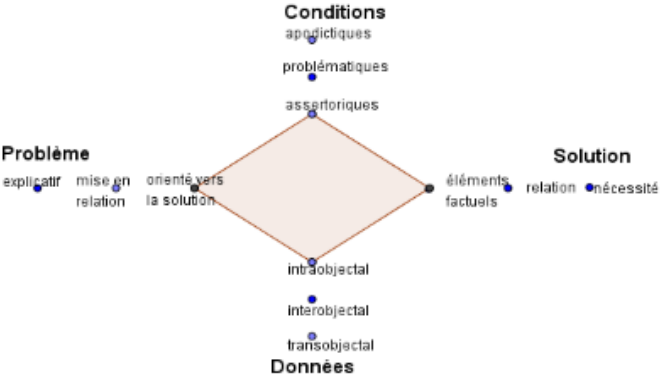
Les losanges de problématisation nous permettent de modéliser les questions que les élèves cherchent à traiter. Nous avons pu ainsi montrer que les groupes qui parviennent à faire émerger les nécessités sont ceux au sein desquels les élèves se répartissent implicitement les rôles et peuvent en changer pendant le travail, passant alternativement de l'élève agissant à l'élève questionnant, vérificateur, formulateur. Certains rôles ouvrent ou ferment les possibles et permettent de délimiter ce qui est hors question et ce qui est en question. Ainsi, le formulateur peut clore un échange s'il énonce un fait ou une nécessité qui fait consensus ou a été démontré, ou au contraire ouvrir un nouveau questionnement si cet énoncé met en évidence un paradoxe ou une incohérence. L'enchaînement des problèmes amène une construction apodictique du savoir si les problèmes deviennent explicatifs et si les solutions permettent de formaliser les nécessités en lien avec le savoir et le problème. Dans notre situation, il s'agit d'amener les élèves à formaliser la nécessité d'utiliser un modèle affine pour exprimer la relation entre la température et la pression, nécessité qui vient, d'une part, du fait que les deux grandeurs sont proportionnelles dans le cas où la température est exprimée en K, que dans les autres unités, la représentation graphique montre un alignement des points et que d'autre part les variations de la température sont proportionnelles aux variations de la pression.

Prenons l'exemple d'un groupe de quatre élèves lors de la deuxième étape de recherche du problème pression-température qui va durer environ 25 minutes. Les élèves doivent rédiger une narration de recherche expliquant comment ils ont pu déterminer une relation entre la pression et la température à partir des tableaux de mesures et des graphiques qui leur étaient fournis. L'analyse des échanges permet

un découpage des interactions suivant différents épisodes. Nous les organisons dans le tableau suivant pour mettre en regard le problème et le losange de problématisation associé. Les niveaux du losange sont définis à partir des explications et arguments donnés dans le groupe. Le rôle pris par certains élèves à certains moments amène la formalisation d'éléments explicatifs ou de preuves, les affirmations témoignent alors de faits, la défactualisation intervient au contraire quand un élève remet en question ce qui était considéré comme vrai. Les rappels de cours, certains schèmes ou routines attestent de « hors question » quand d'autres interventions témoignent au contraire d'ouvertures par l'expression d'hypothèses, ou l'utilisation de raisonnement inductifs.

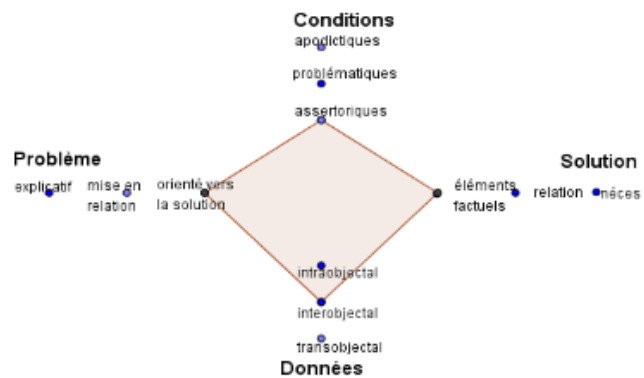
La forme globale des polygones obtenus grâce aux losanges gradués (voir tableau 2) permet de voir si la problématisation s'organise sur l'axe de la résolution ou sur celui de la problématisation, la taille indique un niveau de problématisation. Lorsque tous les pôles sont au premier niveau, il s'agit d'un problème technique que souvent l'élève a déjà appris à résoudre. Lorsque tous les pôles sont au second niveau, le problème est un problème d'analyse. Plusieurs mises en relation doivent permettre une catégorisation, une mise en évidence de propriété, la formulation d'une conjecture. Lorsque tous les pôles sont au troisième niveau, il s'agit d'un problème de synthèse proche d'une démonstration. Par comparaison entre les groupes, il est alors intéressant de voir le nombre d'épisodes, les niveaux de problématisation et individuellement il est aussi intéressant de voir quels sont les élèves qui interviennent dans les sauts de problématisation observés et quels rôles endossent ces élèves qui favorisent l'avancée du problème.

Tableau 2. Analyse de la construction du problème pression-température dans un groupe de quatre élèves en début de classe de seconde

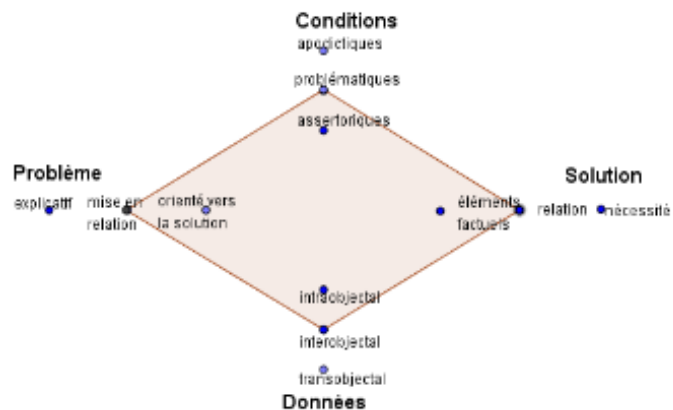
Épisode 1 (01:08) = le coefficient de proportionnalité Les élèves cherchent à déterminer un coefficient de proportionnalité. Ils utilisent leurs connaissances assertoriques sur l'objet. Le problème est technique amenant un travail sur des données isolées (intraobjectal)	
--	--

Le cadre de l'apprentissage par problématisation : outils et enjeux...

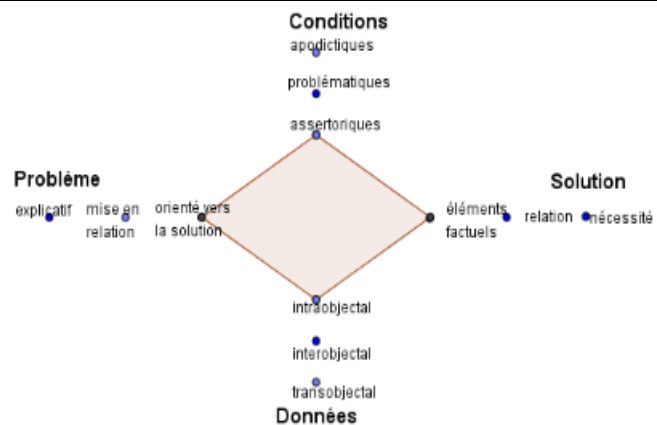
Épisode 2 (05:45) = les différentes unités de température
 Les élèves prennent conscience des unités dans le problème (mise en question des unités par comparaison). Ils utilisent des connaissances assertoriques mais ils comparent des faits (interobjectif) : les unités sont différentes, mais les mesures sont identiques. Ils cherchent toujours une réponse factuelle au problème de la proportionnalité.



Épisode 3 (07:07) = le lien entre pression et température
 Les élèves font des hypothèses sur la forme de la réponse attendue par l'enseignant. Ils mettent en relation les différentes données. Le problème est bien de mettre en relation, mais ils n'ont pas de savoirs assertoriques pour y répondre, ils utilisent d'hypothétiques propriétés (ils utilisent des formules du type « et si... »)



Épisode 4 (09:43) = la conversion des °C en K
 Les élèves cherchent à convertir toutes les mesures dans une même unité en utilisant les règles de conversion assertoriques. Ils reviennent à un problème technique de conversion en traitant les données de manière isolée (intraobjectif) : ils cherchent à produire les conversions des °F et K en °C.

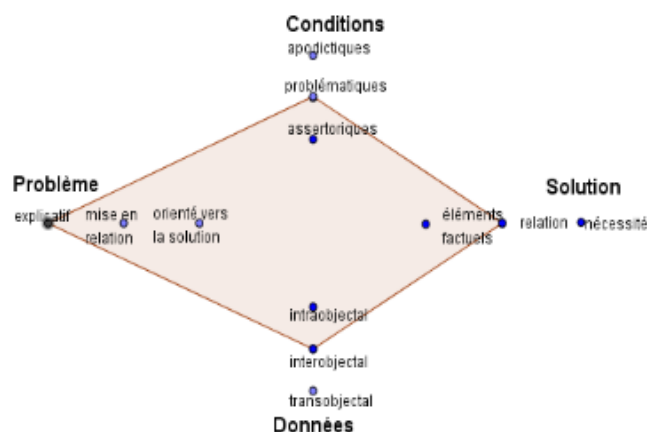


Épisode 5 (11:26) = la rédaction du compte-rendu
 Les élèves discutent de la forme attendue et de la manière d'écrire les choses. Il n'est plus question du problème, mais de propreté, d'orthographe, de mise en page...

Épisode 6 (16:20) = le paradoxe

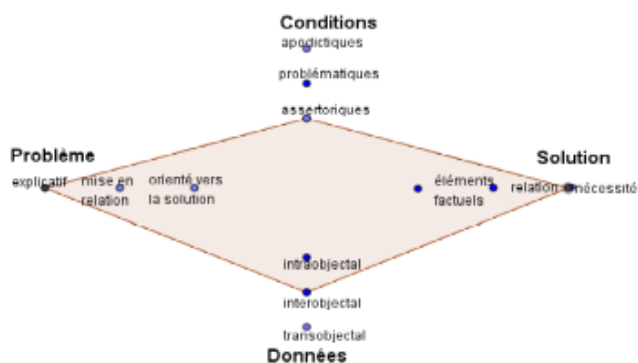
Les élèves mettent en évidence un paradoxe (mise en question de la cohérence des résultats). Ils cherchent une explication, mais n'ont aucune réponse assertorique à donner.

Ils comparent les données et cherchent une relation.



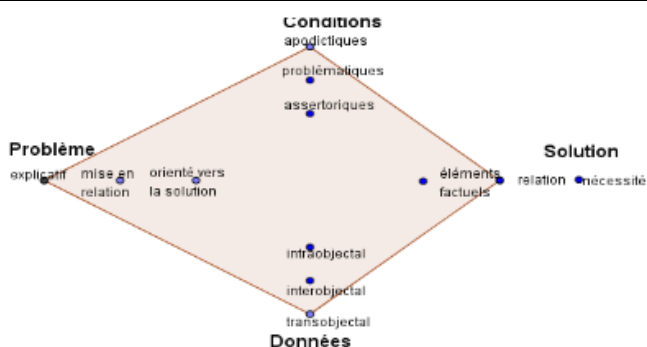
Épisode 7 (17:58) = les fonctions affines et linéaires.

Ouverture d'un nouveau possible par la mobilisation des connaissances assertoriques qu'ont les élèves sur les fonctions affines pour mettre en évidence la nécessité d'une modélisation affine.

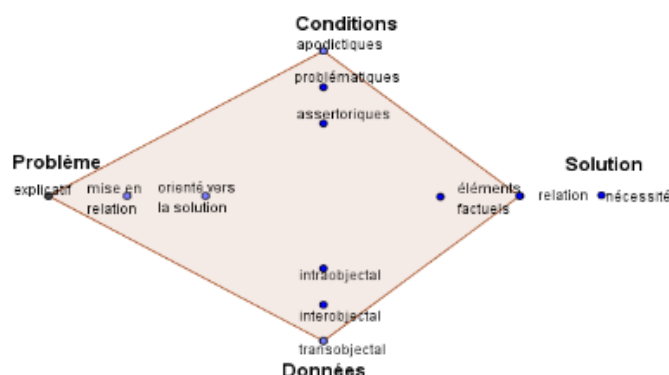


Épisode 8 (19:42) = le modèle pour les °F

Les élèves cherchent une relation dans le cas de mesures en °F (recherche d'une explication), ils utilisent le concept d'affinité pour traiter l'ensemble des données en utilisant les nécessités construites : les points sont alignés, les écarts sont proportionnels, la relation doit être affine.



Épisode 9 (20:49) = la formalisation avec les écritures algébriques
 Les élèves cherchent une formalisation dans le registre sémiotique des écritures algébriques tenant compte des nécessités (proportionnalité des variations, relation affine) et permettant d'expliquer le paradoxe.



Épisode 10 (24:53) = la rédaction et la conclusion
 Le problème n'est pas évoqué sur cet épisode.

La succession des losanges illustre les mouvements d'ouverture et de fermeture par la nature même des problèmes transitoires et sous-problèmes construits par le groupe. Par comparaison, les dynamiques sont très différentes d'un groupe à l'autre. Nous avons d'abord étudié les groupes pour lesquels nous avons des traces de problématisation, pour comprendre comment s'était faite la construction du problème. Notre analyse a alors porté au niveau micro sur les élèves pour lesquels il était possible, individuellement, de reconstruire l'activité du fait des traces qu'ils en avaient laissées. Dans cette perspective, le groupe que nous venons d'étudier plus haut est particulièrement intéressant à plusieurs égards. Les élèves qui le composent ont des niveaux scolaires très différents, ce qui amène les élèves plus en difficulté à questionner les résultats obtenus par d'autres. Chacun prend successivement différents rôles l'amenant à construire de nouveaux faits, à faire de nouvelles hypothèses, à confronter ses connaissances avec celle des autres, à devoir reformuler pour vérifier la compréhension commune, qui amènent le groupe à construire de nouveaux sous-problèmes ou de nouveaux problèmes transitoires (comme le problème des conversions d'unités). Nous avons ensuite porté notre attention sur les groupes pour lesquels nous n'avons pas de traces d'une quelconque problématisation pour essayer de comprendre ce qui pouvait faire obstacle à la problématisation.

2.3 Les obstacles à la problématisation dans les groupes

L'analyse des dynamiques de problématisation permet de mieux comprendre l'impact du contrat didactique, du contexte et du climat de classe sur l'activité des élèves (Grau, 2019). En effet, certains malentendus perdurent lorsque la situation est trop éloignée des tâches habituellement proposées à l'élève, lorsque le contexte multiplie les confusions possibles en mélangeant des domaines différents sans les

explicitier. Par exemple, dans notre expérimentation, la situation initiale est l'analyse de résultats de mesures lors d'une expérience en sciences physiques. Les élèves hésitent entre ce qui est attendu d'eux en cours de sciences physiques et en cours de mathématiques. Dans le domaine des sciences physiques, les élèves peuvent se contenter de lectures et de valeurs approchées liées à la précision de l'appareil de mesurage, en mathématiques le contrat usuel suppose d'établir des résultats précis, exacts. Nous allons maintenant détailler quelques-uns de ces obstacles.

Dans certains groupes, les élèves ne prennent pas tous les rôles, restent sur un rôle qu'ils se sont attribué en fonction de la représentation qu'ils ont de leurs compétences en mathématiques au sein du groupe. Ainsi, nous avons pu observer que des élèves qui ont une faible estime de leurs compétences exprimée dans les échanges au sein du groupe, peuvent avoir du mal à questionner ou vérifier et rester dans un rôle d'agissant, ou même d'exécutant. Certains peuvent d'ailleurs ne pas entrer dans l'activité mathématique s'ils sont maintenus dans des tâches rédactionnelles, par exemple. D'autres, au contraire, peuvent questionner, valider et tester ainsi leur compréhension des notions manipulées par les autres. Nous avons pu montrer qu'un même élève peut avoir une posture très différente suivant la composition du groupe, passant d'un rôle à l'autre dans un groupe soutenant, ou maintenu dans un rôle d'exécutant dans un autre groupe où il se sent moins légitime.

Par ailleurs, l'analyse didactique ne permet pas de toujours comprendre les difficultés que rencontrent certains groupes. Les interactions entre élèves attestent que certains arguments, non mathématiques, entravent la construction des problèmes. Les difficultés peuvent alors être analysées en termes de malentendus socioscolaires (Rayou, 2020). Ces malentendus peuvent devenir des obstacles à la problématisation et sont certainement une cause importante de discrimination dans le système scolaire français. Il nous faut donc comprendre comment les éviter afin que l'apprentissage par problématisation ne se révèle pas discriminant. Certains malentendus peuvent être identitaires, c'est-à-dire qu'ils montrent un écart entre la manière dont le sujet s'engage dans la communauté d'apprentissage au niveau du style, des besoins ou du ressenti, et ce qui est attendu par l'enseignant (nous avons eu l'exemple d'élèves qui ne se considèrent pas membres d'une certaine communauté scolaire du fait qu'elles ne sont pas « filles de profs » ou ne sont pas « des savants »). Ils peuvent être culturels (ici, certains élèves n'identifient pas ce qui relève des mathématiques et restent dans le domaine des sciences physiques ou s'arrêtent à la question de l'existence de différentes unités pour mesurer la température suivant les pays). Ils peuvent aussi être cognitifs en ce sens que l'activité cognitive attendue par l'enseignant n'est pas celle menée par l'élève,

l'obstacle peut alors être didactique (certains élèves ne comprennent pas ce qu'on attend d'eux lorsqu'on leur demande la relation entre deux grandeurs. Est-ce un calcul, une propriété, une causalité, un point commun?) ou cognitif (il leur est impossible de considérer les variations des deux grandeurs en même temps).

L'expérimentation menée dans différentes classes de fin de collège et début du lycée montre aussi l'effet important des pratiques d'enseignement sur l'activité des élèves à niveau égal (un prétest a permis d'évaluer les prérequis des élèves). Dans une classe où les élèves ont l'habitude de mener des recherches et où l'enseignant valide le moins possible, les élèves ont tendance à prendre plus facilement les rôles de vérificateurs et de formulateurs. Dans celles où le savoir passe essentiellement par l'enseignant et où les problèmes complexes sont plutôt proposés en fin de séquence, les élèves prennent peu d'initiatives et ne prennent pas le rôle de formulateur. Ces analyses montrent le rôle du contrat didactique. En effet, dans la TSD, les concepts de milieu et de contrat didactique sont essentiels (Brousseau, 1988; Perrin-Glorian et Hersant, 2003; Hersant, 2014). Le contrat didactique est défini par Brousseau comme l'ensemble de règles qui partage et limite les responsabilités de chacun, élèves et professeur, vis-à-vis d'un savoir mathématique enseigné, mais Hersant et Perrin-Glorian considèrent que d'autres composantes interviennent aussi dans ce contrat : le domaine mathématique, le statut didactique du savoir, et la nature et les caractéristiques de la situation (Perrin-Glorian et Hersant, 2003, p. 238). Le contrat est, pour le professeur, l'un des moyens de gérer les deux processus que sont la dévolution et l'institutionnalisation. Dans une PPAP, le contrat didactique n'est pas stable et il est posé par le chercheur, il suppose différentes ruptures : au niveau du domaine mathématique (changement de cadre), au niveau du statut didactique du savoir (savoir ancien ou nouveau), au niveau de la nature de la situation (changement de niveau de problème) et de la répartition des responsabilités (questions très ouvertes ou très fermées). La PPAP expérimentée ici montre que les pratiques usuelles des enseignants de mathématiques ne permettent pas toujours aux élèves d'interpréter correctement ce qui est demandé, les contraintes posées, les informations fournies dans les situations proposées du fait de ces ruptures du contrat didactique. En particulier, les élèves sont confrontés à assumer une responsabilité dans le processus d'institutionnalisation, ce qui est plutôt inhabituel.

2.4 La construction des étapes et les ruptures de contrat didactique

La recherche menée (Grau, 2017b) atteste cependant que, dans tous les cas, le fait de mettre au travail les productions des élèves les contraint à prendre plusieurs rôles et leur donne le temps de construire les nécessités. À l'issue de la PPAP, les élèves témoignent qu'ils préfèrent utiliser le bilan de la PPAP pour résoudre des

problèmes qu'ils identifient comme relevant de la même notion plutôt qu'un cours plus formel sur les fonctions affines. Ceci atteste que la mise en évidence de nécessités en lien avec le problème permet une construction du savoir qui rend les connaissances plus disponibles.

Tout l'enjeu est alors de créer l'enchaînement des étapes de la PPAP en fonction de ce que construisent et produisent les élèves. Cela demande une analyse épistémologique et didactique du savoir, d'une part, mais aussi une bonne connaissance du construit sur lequel s'appuient les élèves pour agir, dire et penser, afin d'isoler dans les productions écrites et orales les indices des modèles explicatifs mobilisés par les élèves, d'autre part. Il ne s'agit plus simplement de hiérarchiser les productions des élèves pour les mettre en débat dans la classe, mais d'isoler des éléments signifiants du registre explicatif et d'introduire éventuellement des signes ou symboles permettant d'explicitier les concepts mobilisés, les représentations mentales et procédures utilisées (Grau, 2017a). Sur ce même objet d'enseignement – les fonctions affines –, l'analyse des interactions verbales lors de débats menés par les enseignants comparées à celles dans les groupes d'élèves pendant la PPAP montre un déplacement du questionnement. Les débats visent souvent à établir le vrai, alors que la PPAP vise à établir pourquoi c'est vrai. L'étape de travail sur la formalisation des nécessités est indispensable et contribue à ce que les élèves entrent dans une démarche de preuve, car la question de la validation a été réglée dans une étape précédente.

D'autres PPAP testées à différents niveaux de la scolarité et dans différents domaines des mathématiques mettent en évidence que l'élève ainsi mis en situation de construire ce qui peut être considéré comme une axiomatique, porte un regard différent sur la nature du savoir construit. Au lycée, la comparaison entre la formulation du savoir en fin de PPAP avec le savoir savant tel qu'il a pu être formalisé à différentes époques¹, amène aussi une représentation différente de l'activité mathématique et peut permettre à certains élèves de mieux entrer dans cette activité. Les mathématiques leur apparaissent non plus comme un savoir figé mais un savoir évolutif, créatif et situé. De plus, le fait que les nécessités soient liées au problème permet aux élèves d'identifier une classe de problèmes associée à ces nécessités et donc une meilleure reconnaissance du domaine d'application du savoir.

Par ailleurs, le scénario de la PPAP, tel qu'il est pensé et proposé aux enseignants, limite les interventions spontanées en situation, chaque étape suppose un travail autonome des élèves à partir du document fourni, l'étayage ne porte que sur des

¹ Nous avons en particulier proposé aux élèves de comparer la définition de la fonction affine dans des manuels scolaires de 1942, 1951, 1975 et 2011.

techniques ou savoirs anciens. L'objectif est de donner plus de visibilité au processus d'institutionnalisation en mettant l'élève au centre de ce processus. Contrairement aux pratiques usuelles de débats menés à l'oral à partir de productions de groupes, l'écrit permet une mise à distance et demande à ce que chaque élève reformule pour lui les arguments produits par la classe. Ces nouvelles productions attestent des écarts entre les interprétations et montrent qu'il est nécessaire de travailler les écrits intermédiaires si l'on veut que la formalisation du savoir ait un sens pour tous les élèves. Elles montrent en quoi mettre l'élève en position réflexive amène à développer une posture autonome de contrôle, posture indispensable lorsque l'on mène une activité mathématique (Grau, 2018, à paraître).

Enfin le travail autour des productions des élèves à ces différentes étapes apporte à l'enseignant et au chercheur des éléments de compréhension des erreurs, difficultés ou obstacles dans l'apprentissage d'une notion et donc, peuvent aider l'enseignant à mieux anticiper l'activité de l'élève et construire des situations permettant à chacun de progresser. Il permet aussi de mettre en évidence des difficultés liées à des malentendus socioscolaires non pris en compte lors de l'analyse a priori mais qui peuvent parfois empêcher l'apprentissage. Ces aspects ne doivent pas être négligés au moment de penser le contexte dans lequel est posé le problème.

Conclusion

Les outils du cadre de l'apprentissage par problématisation (CAP) permettent d'enrichir l'analyse a priori et l'analyse a posteriori des situations, telles qu'elles sont menées dans le cadre de la théorie des situations didactiques (TSD), en ce sens qu'ils fournissent des analyses de l'interprétation subjective et cognitive de la situation par l'élève en fonction du contexte dans lequel est rencontré le problème. L'écart entre le prévu et le réalisé apporte alors des éléments de compréhension dont nous pouvons tenir compte ensuite pour faire évoluer le milieu. En particulier les losanges gradués permettent de voir à quel niveau problématiser un élève et comment le faire progresser. Certains élèves, par exemple, restent sur un traitement intraobjectal des données, ce qui peut les mettre en grande difficulté dans leurs apprentissages. D'autres ne sont jamais confrontés à des problèmes explicatifs et n'ont ainsi que très peu l'occasion de générer des explications. Mais cet outil est aussi utile pour l'enseignant afin de vérifier que les situations qu'il propose aux élèves sont de niveaux variés et leur permettent effectivement de problématiser.

Ce cadre nous a permis d'élaborer un scénario de séquence (la PPAP) basé sur la succession d'étapes permettant l'ouverture et la fermeture de possibles, la mise en

évidence de nécessités, et la construction de problèmes explicatifs propres à amener l'élève à la preuve. L'analyse dans le CAP du processus de problématisation mené par les élèves, nous apporte des éléments de compréhension de ce qui les amène à agir, penser, dire en mathématiques d'une certaine façon, toujours en lien avec le problème qu'ils construisent. Ces éléments montrent la nécessité de mettre l'élève devant l'obligation de prendre différents rôles : l'agissant, le vérificateur, le questionnant et le formulateur. L'enjeu est donc de proposer aux élèves des situations qui induisent la prise de rôles spécifiques (par la demande explicite faite à l'élève d'agir, de vérifier, de questionner ou de formuler) à partir de ses productions intermédiaires et celles de ses pairs. L'objectif est de donner un temps long au processus d'institutionnalisation et de passer du problème rencontré à une généralisation des résultats par la mise en évidence des raisons pour lesquelles le savoir est ce qu'il est et ne peut pas être autrement. À la suite des expérimentations de PPAP, l'analyse des résultats des évaluations – mesure quantitative sur plus de 3 000 élèves, prétests et post-tests individuels dans les classes où ont été menées les expérimentations, et expérimentation d'apprentissages par problématisation sur toute une année scolaire dans une classe de seconde – a permis d'attester que les élèves qui problématisent, c'est-à-dire ceux qui, individuellement, montrent qu'ils peuvent construire des savoirs scientifiques raisonnés, mobilisent de manière plus autonome les savoirs face à des problèmes inédits, du fait qu'ils identifient des nécessités et des caractéristiques qui appellent ces savoirs. La mise en place de ce scénario dans les classes pose cependant deux difficultés majeures. La première réside dans la conception par les enseignants des différentes étapes de la PPAP : poser le problème, mettre en tension les faits et les conditions du problème, la mise en évidence de nécessités, la formalisation du savoir en lien avec ces nécessités et le problème. Cette conception doit s'appuyer sur l'épistémologie du savoir visé et permettre différentes genèses, celle du problème, d'une part, et celle du registre explicatif, d'autre part. La seconde est d'amener effectivement tous les élèves à problématiser, ce qui suppose d'explicitier certaines ruptures du contrat didactique et de tenir compte d'éventuels malentendus socioscolaires.

Ces recherches ouvrent de nouveaux champs d'exploration en particulier si nous articulons ces résultats avec d'autres cadres théoriques. L'articulation avec la théorie des situations didactiques de Brousseau (2011) amène à penser le milieu en lien avec un contrat didactique donnant plus de responsabilités à l'élève dans le processus d'institutionnalisation. L'articulation du CAP avec la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1992) nous amène à repenser l'organisation mathématique de certains savoirs scolaire (Matheron, 2000) sur la base d'une axiomatique basée sur les nécessités. L'articulation du CAP avec les

espaces de travail mathématiques (Kuzniak, 2011) doit nous permettre de mieux spécifier la genèse du registre explicatif en lien avec les genèses sémiotique, instrumentale et discursive. Ces approches en didactique comparée pourraient être intéressantes pour rendre opérationnelle l'idée d'un apprentissage mathématique par problématisation dans les classes à tous les niveaux de la scolarité.

Références

Brossard, M. (2017). Apprentissage et développement I. Dans M. Brossard (dir.), *Vygotski : Lectures et perspectives de recherches en éducation* (p. 87-111). Presses universitaires du Septentrion.

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(3), 309-336.

Brousseau, G. (2011). La théorie des situations didactiques en mathématiques. *Éducation et didactique*, 5(1), 101-104. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.1005>

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12(1), 73-112.

Choquet, C. (2017). Profils de professeurs des écoles proposant des problèmes ouverts en mathématiques. *Recherche en didactique des mathématiques*, 36(1), 11-47.

Douady, R. (1986). Jeu de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 5-32.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Duval, R. (2006). La conversion des représentations : un des deux processus fondamentaux de la pensée. Dans J. Baillé et A. Compeyron (dir.), *Conversion, du mot au concept* (p. 9-45). Presses universitaires de Grenoble.

Fabre, M. (2005). Deux sources de l'épistémologie des problèmes : Dewey et Bachelard. *Les sciences de l'éducation - Pour l'ère nouvelle*, 38(3), 53-67. <https://doi.org/10.3917/lsdle.383.0053>

Fabre, M. (2011). *Éduquer pour un monde problématique : La carte et la boussole*. PUF

Fabre, M. (2016). *Le sens du problème*. De Boeck Éducation.

Fabre, M. et Musquer, A. (2009). Quels outils pour la problématisation? Analyse d'une banque de situations-problèmes. *Spirale*, 43, 45-68.

Grau, S. (2017a). *Les figurations : Écrit intermédiaire pour problématiser*. Actes du 44^e Colloque COPIRELEM. Épinal.

Grau, S. (2017b). *Problématisation en mathématiques : Le cas de l'apprentissage des fonctions affines* [thèse de doctorat inédite]. Université de Nantes.

Grau, S. (2018). *Enseigner par les problèmes : la question de la mise en commun* [conférence]. CREN-CARDIE, Nantes.

Grau, S. (2019). *Apprentissage à et par la problématisation en classe de mathématiques : quelques conditions à partir de l'analyse des interactions entre élèves dans un travail de groupe en classe de seconde* [communication orale]. 16^e colloque du réseau Probléma, Nantes.

Grau, S. (2020). Problématiser en mathématiques : le cas de l'apprentissage des fonctions affines. Dans J. Pilet et C. Vendeira (dir.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques, 2019* (p. 36-56). IREM de Paris 7.

Grau, S. (à paraître). Le modèle de séquence PPAP. Dans B. Lebouvier (dir.), *Aider les apprentissages par problématisation en classe*.

Hersant, M. (2014). Facette épistémologique et facette sociale du contrat didactique : une distinction pour mieux caractériser la relation contrat milieu, l'action de l'enseignant et l'activité potentielle des élèves. *Recherches en didactique des mathématiques*, 34(1), 9-31.

Hersant, M. (2022). Usages et apports du cadre de la problématisation à la didactique des mathématiques. Dans S. Doussot, M. Hersant, Y. Lhoste et D. Orange-Ravachol (dir.), *Le cadre de l'apprentissage par problématisation : apports aux recherches en didactiques* (p. 57-74). Presses universitaires Rennaises.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 9-24.

Legendre, M.-F. (2006). *L'épistémologie de Piaget*. <https://www.fondationjeanpiaget.ch>

Matheron, Y. (2000). Analyser les praxéologies. Quelques exemples d'organisations mathématiques. *Petit x*, 54, 51-78.

Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse. (s. d.). *J'enseigne au cycle 4*. Éduscol.

Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse. (2022). *Ressources d'accompagnement du programme de mathématiques (cycle 4)*. Éduscol.

Musquer, A. (2017). *Cadrage, inducteurs, interventions de l'enseignant* [communication orale]. 14^e colloque du réseau Probléma, Nantes.

Orange, C. (2005). Problème et problématisation dans l'enseignement scientifique. *ASTER*, 40, 3-12.

Orange, C. (2012). *Enseigner les sciences : problèmes, débats et savoirs scientifiques en classe*. De Boeck.

Passaro, V. (2009). Obstacle à l'acquisition du concept de covariation et l'introduction de la représentation graphique en deuxième secondaire. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 14, 61-77.

Passaro, V. (2013). Jouer avec le concept de fonction ou explorer la fonction par l'étude covariationnelle. *Bulletin AMQ*, LIII(3), 73-86.

Passaro, V. (2016). *Analyse du raisonnement covariationnel et des situations qui en favorisent le déploiement chez des élèves de 15 à 18 ans au Québec. Enjeux et débats en didactique des mathématiques* [communication orale]. XVIII^e école d'été de didactique des mathématiques, Enseignement et apprentissage de l'analyse, Brest.

Perrin-Glorian, M.-J. et Hersant, M. (2003). Milieu et contrat didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 23(2), 217-276.

Piaget, J. et Garcia, R. (1983). *Psychogenèse et histoire des sciences*. Flammarion.

Rayou, P. (2020). Des registres pour apprendre. *Éducation et didactique*, 14(2), 49-64. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.6737>

Rogalski, M. (2001). Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres de Régine Douady. *Actes de la journée en hommage à Régine Douady* (p. 13-30). IREM de Paris 7.