La situation du barreau : une alternative possible pour l'enseignement de l'intégrale à l'entrée à l'université

Inen AKROUTI
Université de Carthage/Université de Jendouba (ISSH)
LaRINa – Laboratoire en réseaux intelligents et nanotechnologie
inen.akrouti@isste.ucar.tn

Résumé : Cette étude se focalise sur la modélisation mathématique d'un phénomène physique. Les étudiants doivent mettre en place une intégrale pour trouver la force d'attraction gravitationnelle exercée par un barreau sur une masse ponctuelle située dans son prolongement. Nous exploitons l'activité mathématique des étudiants et le raisonnement qu'elle génère. La configuration d'une intégrale dans un problème de physique permet de mettre en œuvre concrètement les étapes de sa conceptualisation : la configuration de l'expression pour une quantité infinitésimale, l'accumulation de la quantité infinitésimale, la détermination de la variable d'intégration et la transformation de l'intégrale en une forme qui peut être évaluée mathématiquement.

Mots-clés : Modélisation mathématique, point matériel, intégrale et phénomène physique

The bar situation: a potential alternative for teaching integral concepts in the first year of university

Abstract: This study focuses on the mathematical modeling of a physical phenomenon. Students must think of the integral procedure to calculate the value of the gravitational force of attraction exerted by the bar on the point mass located in its extension. We explore the mathematical activity of students and the reasoning it generates. The configuration of an integral in a physics problem is a multi-level process that involves accumulating the infinitesimal quantity, determining the variable of integration, and transforming the integral into a form that can be evaluated mathematically.

Keywords: Mathematical modeling, material point, integral and physical phenomenon.

Revue québécoise de didactique des mathématiques, 2022, *Numéro thématique 1* (Tome 1), p. 72-110.

Introduction et problématisation

La question de la compréhension de l'intégrale par les étudiants nous paraît particulièrement importante, car elle sert de base à de nombreuses applications dans de nombreux domaines scientifiques et elle sera utile dans des cours ultérieurs (Akrouti, 2021a). En effet, plusieurs recherches soulignent que les étudiants ont des difficultés à utiliser correctement leurs connaissances sur l'intégration dans des problèmes de mathématiques et que, pour la plupart des acteurs (enseignant et apprenant), l'intégrale est une notion difficile à comprendre (Orton, 1983; Thompson, 1994; Kouropatov et Dreyfus, 2013a, 2013b, 2014). Elle repose sur un formalisme « accru », par rapport aux nouveaux entrants à l'université, ce qui rend compliqué l'utilisation des définitions et des propriétés dans les preuves demandées.

L'enseignement de l'intégrale a fait l'objet de plusieurs recherches, parmi lesquelles nous citons Legrand (1990), Thompson (1994), Haddad (2012), Kouropatov et Dreyfus (2014). Ces travaux ont proposé des alternatives afin de rendre la notion d'intégrale plus accessible aux sujets apprenants. Dans cet article, nous envisageons également de proposer une nouvelle alternative pour l'enseignement de l'intégrale à l'entrée à l'université en nous référant à la théorie des situations didactiques (TSD). Cette alternative se base sur la modélisation mathématique d'un phénomène physique. En effet, du point de vue historico-épistémologique, l'intégrale est une co-construction entre mathématiques et physique (Decroix et Rogalski, 2013). Cela a été exploité par Marc Legrand dans les années 1980 à l'Université de Grenoble afin de proposer une approche qui met en œuvre le recours à un phénomène physique pour définir un concept mathématique. Dans cette même perspective, Legrand souligne que l'on est en train de créer un faux divorce math-physique par l'absence de questions de nature épistémologique sur la mathématisation d'une réalité (Grenier et al., 1986). En Tunisie, l'idée du recours à la physique pour introduire une intégrale a été mise en œuvre bien avant, quand les mathématiques et la physique étaient plus couplées dans leur enseignement dans les réformes des années 1959 et 1970[1] (Haddad, 2006).

Pour mettre en œuvre notre idée, nous considérons le calcul intégral comme la mesure d'une grandeur, et que la structure sous-jacente de l'intégrale n'est que la somme de relations multiplicatives entre $f(x)$ et une partition du domaine d'intégration notée Δx. Legrand (1990) partage la même idée et considère que la

[1] Depuis l'indépendance du pays en 1957, l'enseignement secondaire tunisien a connu cinq réformes à travers lesquelles la notion d'intégrale a été inlassablement révisée et son écosystème sans cesse modifié (Haddad, 2006).

structure de l'intégrale correspond à une relation multiplicative entre deux grandeurs où l'une d'elles est une quantité variable ou plus précisément, il dit qu'il s'agit de « l'assouplissement du modèle linéaire simple produit à une réalité complexe » (p. 208). L'idée de la relation multiplicative n'est pas nouvelle en soi; elle se rattache au calcul infinitésimal et c'est son adaptation qui nous servira de base au développement et à l'expérimentation de l'alternative que nous envisageons pour l'enseignement du concept d'intégrale à l'entrée à l'université. Dans l'approche que nous souhaitons, l'introduction du concept d'intégrale repose sur l'acceptation de la priorité de la compréhension conceptuelle d'un élément de connaissance par rapport à l'acquisition des compétences formelles algorithmiques ou procédurales liées à son application.

Nous pensons que cette proposition est réalisable, car il n'y a pas de raison logique qui interdise la formation du concept avant d'étudier la procédure formelle, comme il est souligné par la TSD. Cela signifie qu'en partant de la procédure ponctuelle « simple produit » les étudiants vont, petit à petit, faire émerger la relation suivante : $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$. En plus, de nombreuses recherches portant sur l'étude de l'intégrale au lycée ou à l'université soulignent que l'approche didactique la plus courante, basée d'abord sur l'étude des compétences calculatoires ne conduit pas, pour la plupart des élèves ou étudiants, à développer une compréhension solide du concept d'intégrale (Kouropatov et Dreyfus, 2013a, 2013b; Rogalski, 2013; Akrouti, 2020, 2021b), car savoir calculer une intégrale c'est tout autre chose que de comprendre la notion d'intégrale (Haddad, 2012). Cela ne veut pas dire que tous les élèves ou les étudiants n'arrivent pas à maîtriser l'intégrale, mais il nous semble que l'approche actuelle n'apporte pas le résultat pédagogique souhaité par la communauté professionnelle des chercheurs et éducateurs dans le domaine de l'enseignement des mathématiques (Akrouti, 2021b). Par ailleurs, si nous considérons que l'un des objectifs d'un tel apprentissage est le développement de connaissances d'ordre conceptuel, force nous est d'admettre que l'approche didactique actuelle, en Tunisie, n'atteint pas tout à fait cet objectif.

Notre point de vue se base sur la structure multiplicative soulignée plus haut et sur la possibilité de rendre le concept d'intégrale expérimentalement accessible, c'est-à-dire développer des situations qui permettent des allers-retours entre le concret et l'abstrait, entre l'intuition et la formalisation. En fait, le concret ne se limite pas ici aux objets matériels, il pourrait bien être constitué d'objets suffisamment familiers pour les apprenants (Dias, 2008; Rogalski, 2010, 2018). Dans ce même ordre d'idées, Rogalski souligne :

> Il est indispensable d’avoir construit le concept mathématique à partir d’un problème de physique, et de comprendre la problématique physique (mesure des grandeurs), pour être ensuite capable de l’utiliser dans cette discipline et en même temps d’en saisir la pertinence mathématique. (Rogalski, 2018, p. 457)

À notre avis, le domaine de Calculus (calcul différentiel et intégral) n'est pas exclusivement un domaine mathématique, il est également un phénomène culturel qui représente le point de vue des individus sur la réalité. D'une façon générale, il est difficile d'imaginer un domaine scientifique moderne qui n'utilise pas le calcul différentiel et intégral (Kouropatov, 2015).

Les étudiants n’arrivent pas facilement à modéliser une mesure de grandeur par une intégrale, c’est-à-dire à saisir que dans ce problème, il s’agit d’une intégrale (Decroix et Rogalski, 2013). Or, nous ne pouvons pas changer les étudiants. Cependant, nous pouvons changer les stratégies d'enseignement. Si la formalisation dans le cas de la notion d’intégrale ne correspond pas exactement à l'idée intuitive, à la perspicacité qui a donné lieu à cette formalisation, nous pouvons quand même nous appuyer sur l’expérience personnelle des étudiants et leurs images intuitives pour développer la signification mathématique dont ils ont besoin[2]. Dans ce même ordre d’idées, Moreno-Armella (2014) souligne qu’il n'est pas judicieux d'introduire une définition formelle qui contredit clairement l'intuition des étudiants. En fait, si cela est fait, les étudiants perçoivent la définition formelle comme quelque chose de déconnecté de leurs expériences, de leur centre d’intérêt : « it is not sensible to introduce a formal definition that clearly contradicts the intuition of students who will feel the introduction of the formal definition as something disconnected from their experiences » (Moreno-Armella, 2014, p. 627). Par ailleurs, Rogalski (2013) précise que :

> ce qu’il faut comprendre est que le sens d’une notion mathématique ne se comprend pas – et surtout du point de vue de son opérationnalité – uniquement par une définition formelle; on a besoin d’un contexte, de motivations, d’intuitions – ici celles de la mesure des grandeurs. (p. 33)

En Tunisie, à l’entrée à l’université, le programme officiel préconise d’introduire la notion d’intégrale à partir des fonctions en escalier, mais aucune construction particulière n’est imposée. Puis, la construction de l’intégrale à partir des fonctions en escalier sera étendue à des fonctions plus générales, telles que les fonctions continues par morceaux, en se basant sur l’idée intuitive de l’intégrale qui consiste

---

[2] En effet l’augmentation du nombre de découpages du domaine d’intégration est une idée intuitive qui sert à rendre la formalisation de l’intégrale plus accessible, car la formalisation n’est que la limite de la somme de la relation multiplicative quand le nombre de découpages tend vers l’infini.

à approcher ces fonctions par des fonctions en escalier. Autrement dit, toute fonction définie et bornée sur un intervalle $[a, b]$ est majorée et minorée par une fonction en escalier. Les sommes de Riemann sont introduites après la définition de l'intégrale de Riemann bien qu'elle constitue le fondement de la théorie d'intégration (Akrouti, 2021b).

Par ailleurs, des recherches soulignent que l'activité mathématique des étudiants, dans le contexte universitaire tunisien, est centrée sur un aspect calculatoire qui met en avant la procédure de primitive et réduit la notion d'intégrale à une simple manipulation de formules algébriques suivant quelques règles connues a priori (Haddad, 2012; Akrouti, 2021a, 2021b).

Notre problématique se focalise sur la conceptualisation de la relation suivante : $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ et comment la mettre en application dans l'activité mathématique des étudiants. Comprendre cette relation et sa place dans le processus d'enseignement-apprentissage à l'entrée à l'université est nécessaire pour concevoir et mettre en place une approche qui permet d'offrir à l'intégrale, et également aux sommes de Riemann, la valeur conceptuelle qu'elles méritent (Rogalski et al., 2001).

Ainsi, nous formulons notre problématique de la manière suivante : en quoi, une approche, basée sur la modélisation mathématique d'un phénomène physique pourrait-elle permettre d'améliorer l'activité mathématique des étudiants dans le cas de l'intégrale Il convient, ici, de remarquer que nous nous intéressons aux processus cognitifs des étudiants et pas simplement à leurs connaissances établies. Par ailleurs, nous rejoignons Brousseau (1998) qui considère que l'apprentissage du sujet est lié à la dimension cognitive et dépend de l'activité qu'il mobilise dans la résolution de problèmes.

Cet article est structuré en trois parties. Dans la première, nous présentons l'objectif de notre recherche en précisant à la fois son originalité et son contexte spécifique, ensuite nous proposons un regard didactique sur l'histoire du développement de l'intégrale. Après avoir présenté la ligne directrice de notre recherche, nous consacrons la deuxième partie au cadre théorique de référence et la méthodologie adaptée. Précisons que, dans une problématique se focalisant sur le processus d'enseignement-apprentissage, la TSD pourrait constituer un cadre conceptuel adéquat. Enfin, dans la dernière partie, nous menons une analyse du déroulement de l'expérimentation en classe. Cette analyse est accompagnée de plusieurs extraits significatifs, d'interventions des étudiants et de l'enseignante, permettant d'appuyer notre point de vue et de renforcer l'étude des données recueillies.

1. Caractéristiques épistémologiques

La définition formelle suppose théoriquement que tout le monde soit d’accord et uni sur un seul point de vue. Mais nous contenter de cela nous fait oublier que : enseignant/étudiant et même étudiant/étudiant ne disposent pas d’un même niveau conceptuel. Ainsi, la définition ne serait pas saisie de la même façon par tous les acteurs.

Plusieurs recherches soulignent qu’en mathématiques, les élèves apprennent souvent à suivre un algorithme pour évaluer une intégrale (Kouropatov et Dreyfus, 2012; Akrouti, 2020) et à utiliser des symboles sans se référer à des situations physiques concrètes (Wallace et Chasteen, 2010; Hu et Rebello, 2013). Cependant, la mise en place d’une intégrale dans le contexte de la physique permet aux apprenants de voir concrètement l’application des notions mathématiques sur des phénomènes qui se rapportent à la réalité (Rogalski et al., 2001). Cette mise en place nécessite plusieurs étapes qui font émerger la structure sous-jacente de l’intégrale progressivement : tout d’abord la configuration de l’expression du phénomène physique proposée en une quantité infinitésimale; par exemple : dE, dQ, dF, puis, l’accumulation de cette quantité infinitésimale, ensuite la détermination de la variable d’intégration et enfin, la transformation de l’intégrale en une forme qui peut être évaluée mathématiquement (Rogalski et al., 2001). Par conséquent, le recours à l'intégration en physique permet aux étudiants de comprendre l’intégrale en termes de sommes de Riemann et également en termes de structure de produits où l’un des facteurs est une quantité différentielle. De plus, l’approche offre l’occasion de dépasser le contexte d’aire qui est devenu, pour de nombreux sujets apprenants, une notion synonyme d’intégrale (Akrouti, 2021a). Finalement, cette caractérisation en somme de produits permet d’exprimer les relations entre les grandeurs physiques qui constituent l’expression du phénomène physique proposée, en particulier le différentiel dx.

Par ailleurs, pour donner un sens aux phénomènes physiques, les étudiants utilisent une forme de connaissance intuitive par le biais de leur interaction avec le monde réel. Ce sens intuitif de la connaissance est souvent appelé selon diSessa et Sherin (1998) “phenomenological primitive”. Il pourrait être appliqué directement dans les activités qu’ils entreprennent; cependant, s'il ne s’applique pas correctement, il pourrait mettre les étudiants face à des conflits cognitifs qui se transforment par la suite en obstacles pour la construction des connaissances formelles en physique et en mathématiques.

Le point de vue que nous évoquons dans le cadre de cette approche relève de la procédure intégrale : découpage → somme → encadrement → passage à la limite. Cette procédure met en œuvre les trois étapes suivantes :

- Si f est constante ($f = c$); $\int_{\Omega} f d\text{m} = C \times$ mesure (Ω) avec f une fonction définie sur un domaine Ω;
- l'additivité par rapport au domaine : si $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ avec $\Omega_1 \cap \Omega_2$ de mesure nulle, alors I (Ω,f,m) = I (Ω_1,f,m) + I (Ω_2,f,m);
- la croissance : si $f \leq g$, I (Ω,f,m)$\leq$ I (Ω,g,m).
  (Decroix et Rogalski, 2013, p. 5)

2. Un regard didactique sur le développement historique de l'intégrale

Dans l'histoire, le concept d'intégrale se rattache au développement du calcul infinitésimal qui a ouvert de nouvelles pistes de réflexion dans plusieurs domaines de la science, en particulier en mathématiques. Il a guidé des changements fondamentaux en abordant de nouvelles questions qui n'ont pas été posées avant. Le calcul infinitésimal est considéré comme « l'un des plus formidables accomplissements de l'esprit humain ».

Carnot (1839) considère l'intégrale comme une somme : « Une intégrale est considérée comme la somme des éléments différentiels, on est convenu de la désigner dans le calcul par la caractéristique ∫ qui est regardée comme l'abréviation des mots “somme de” » (p. 100). Alors que de Freycinet (1860) la définit comme un calcul de limite. Il explique son idée en disant : « Les termes des sommes dont le calcul intégral recherche les limites sont toujours supposés de la forme : “$f(x)\Delta x$” » (p. 102). Cette caractérisation en somme de relation multiplicative, entre la fonction à intégrer $f(x)$ et une petite quantité Δx, a été considérée par des chercheurs en didactique des mathématiques (Jones, 2015; Sealy, 2014) et également en didactique de la physique (Meredith et Marrongelle, 2008) comme indispensable à la réussite des étudiants à la compréhension de la notion d'intégrale car elle évoque un raisonnement quantitatif nécessaire au développement des connaissances cohérentes et productives.

En effet, le calcul de la valeur d'une intégrale n'est pas souvent proposé directement tel que les fonctions dont leurs expressions ne rentrent pas sous l'une des formes usuelles des primitives connues (la fonction de Gauss $x \mapsto e^{-x^2}$ par exemple). L'intégrale de ce type de fonction nécessite un travail préliminaire pour transformer les données proposées en d'autres plus simples. Ce travail de transformation est différent du calcul intégral proprement dit. Il rentre dans l'usage de la méthode infinitésimale et c'est le travail le plus important dans l'élaboration de la solution. L'application des règles du calcul intégral est basée sur le principe des quantités infinitésimales; si, à titre d'exemple, on veut chercher l'aire sous une courbe, alors si on augmente l'abscisse x d'une quantité infiniment petite dx, l'aire cherchée augmentera par exemple de celle d'un rectangle infiniment petit qui sera la différentielle de l'aire en question. Le calcul intégral pourrait également être considéré comme une étude de la variation d'un mouvement dans un cadre cinématique qui met en œuvre une approche numérique comprenant des quantités infinitésimales.

Par ailleurs, de nombreux problèmes en physique nécessitent la notion d'intégrale pour calculer des grandeurs physiques à partir d'autres grandeurs non constantes. Les intégrales proposées, pour résoudre ces problèmes, pourraient être évaluées en adaptant la procédure linéaire « simple produit ». Le recours à cette procédure nécessite une modélisation quantitative de la réalité. La conception de mesure de grandeur constitue, ainsi, une interprétation mathématique de l'idée intuitive de grandeur d'un ensemble que l'on obtient par procédé de décomposition, de sommation, d'encadrement et de passage à la limite (Haddad, 2012; Akrouti, 2021b).

Le retour aux problèmes des fondements par les enseignants des mathématiques et la reconnaissance des documents originaux donnent de la vie et de la cohérence à l'enseignement des mathématiques. Notre approche se base sur l'articulation des caractéristiques épistémologiques et des considérations didactiques pour construire un répertoire didactique de la classe (Gibel, 2018) afin de permettre aux apprenants d'élaborer le sens sous-jacent de la notion d'intégrale (Rogalski et al., 2001; Legrand, 1990).

Cette approche permet aux étudiants de se concentrer d'abord sur la relation multiplicative, ensuite sur la somme des produits obtenus. La relation multiplicative évoquée s'obtient par la mesure de deux grandeurs produites en physique où le premier facteur est constant (Legrand, 1990). Il faut noter que cette relation multiplicative représente également le produit de deux composantes sur lesquelles la conception des sommes de Riemann peut être développée (Akrouti, 2020). Ceci signifie qu'il serait peut-être important que le contexte (dans lequel la multiplication entre deux quantités pour en produire une troisième) mis en œuvre soit soigneusement étudié par les étudiants. Nous supposons que ces types de contextes peuvent être utiles, car ils permettent aux étudiants de revoir les sommes de Riemann comme des interprétations conceptuelles possibles de l'intégrale de Riemann, et non comme des techniques de calcul de la convergence de certaines suites (Rogalski et al., 2001).

3. Cadrage théorique, méthodologique et adaptation d'un modèle d'analyse

Pour aborder notre problématique, nous avons choisi de nous placer dans le cadre de la théorie des situations didactiques (TSD) comme cadre conceptuel de référence. La TSD (Brousseau, 1998) propose un modèle d'apprentissage à partir de situations adidactiques ou à potentialité adidactique. Ce modèle se base sur la structuration en niveaux du milieu (Margolinas, 1998; Bloch, 2000, 2006). Ces situations se caractérisent par un système de relations établies entre étudiants, enseignant et milieu mathématique. Ce modèle d'apprentissage organise le travail des étudiants en trois phases.

- La phase d'action (milieu heuristique) : en préparant une situation, l'enseignant organise un milieu qui permet au sujet apprenant sa conduite, c'est-à-dire que le sujet développe une activité en fonction de son répertoire de connaissances : il agit sur les objets auxquels il est confronté. Il se rapproche de ce que Freinet, cité dans Dias (2008), appelle un tâtonnement expérimental[3]. La phase d'action évolue vers un changement du point de vue du sujet apprenant (Allard, 2015).
- La phase de formulation : dans ce milieu, le sujet apprenant produit deux types d'actions : « d'une part une action sur les objets, d'autre part une action sur les conditions de l'action ». (Gibel, 2008, p. 16)
  C'est donc dire que le sujet agit sur les conditions afin de les modifier pour créer des nouvelles conditions d'utilisation des objets. Ces nouvelles conditions apparaissent pour qu'elles soient partagées. En fait, afin d'argumenter les choix d'action, le sujet apprenant doit formuler des connaissances en cours d'acquisition pour interpréter les réponses du milieu (Dias, 2008). Le sujet apprenant évolue ainsi vers un changement de code et de langage (Allard, 2015) : le partage des idées et de l'expérience.
- La phase de validation : Cette phase est consacrée à la discussion par rapport à la vérité des assertions et des théorèmes qui en découlent. Les conjectures étayées sont justifiées par des arguments et des preuves. Les différents participants (sujet apprenant et enseignant) sont responsables de la validation. Ce qui compte ici est l'adéquation entre les connaissances construites et le savoir visé du point de vue de la vérité scientifique. Il s'agit d'une évolution vers un changement de théorie (Allard, 2015) qui permet d'obtenir des théorèmes.

La TSD constitue un cadre favorable pour l'analyse des raisonnements produits par les étudiants en situations d'apprentissage réelles (Lalaude-Labayle, 2016). Elle propose le savoir mathématique et l'activité qu'il génère à être des objets

[3] Le tâtonnement expérimental n'est ni un tâtonnement aveugle ni la méthode expérimentale scientifique. Il se définit comme un processus naturel d'apprentissages personnalisés, d'action et de pensée, chez l'enfant comme chez l'adulte, qui, s'exerçant dans tous les domaines d'activité, mobilise les divers processus cognitifs et opérations mentales habituellement mis en œuvre dans le fonctionnement naturel de l'intelligence humaine. "Tâtonnement expérimental et pédagogie Freinet", édition ICEM n° 35 (cité par Dias, 2008, p. 46).

d'étude avant tout regard focalisé sur l'étudiant ou l'enseignant. Ainsi, la TSD considère les savoirs mathématiques comme le moteur des phénomènes didactiques. Elle suppose que le savoir mathématique n'est accessible qu'à travers les activités qu'il produit.

Le modèle de structuration en niveaux du milieu, d'abord développé par Brousseau, a été enrichi par Margolinas (1994, 1998), puis par Bloch (2000, 2006) afin de tenir compte du rôle de l'enseignant dans les niveaux adidactiques. L'étude du déroulement en classe ne renvoie pas qu'à l'activité cognitive de l'étudiant, mais elle reconnaît également l'importance des interactions entre étudiant/étudiant et également étudiant/enseignant (Bloch, 1999). Les interventions de l'enseignant devraient enrichir le travail des étudiants et son évolution dans le milieu mathématique au cours des phases d'action, de formulation et de validation. Le contrôle épistémologique de la situation par l'enseignant devient donc nécessaire. Dans ce même ordre d'idées, Bloch (1999) souligne que :

> Dans la mesure où le milieu de la situation n'assure pas de façon suffisamment adidactique la production de connaissances, nous nous tournons vers l'activité du professeur et les connaissances qu'il met en œuvre, pour comprendre le fonctionnement de la situation pour l'élève. (p. 138)

Dans le cas de séances de classe ordinaire, les interactions qui se déroulent au sein du système, formé par l'enseignant, les étudiants et le milieu mathématique sont contrôlées par le programme officiel et évoluent en fonction de ses exigences. Donc, dans ces conditions, il est difficile d'imaginer que l'enseignant pourrait perdre le contrôle de la situation, car il s'agit généralement d'un enseignement par ostension. Cependant, la réalité de la classe et les attentes de l'enseignant dans le cas d'une situation adidactique ou à potentialité adidactique sont différentes, et cela nous amène à la recherche d'un outil pour étudier les interactions au sein d'un tel système, comme il est préconisé dans la conception des situations dans la TSD.

Le travail des étudiants se développe dans un milieu, c'est-à-dire dans un système de relations constitué d'objets matériels, de connaissances disponibles et d'interactions qui pourraient se produire dans la classe soit avec les autres étudiants soit avec l'enseignant. Gonzalez-Martin et al. (2014) soulignent que l'utilisation du modèle d'apprentissage inscrit dans la TSD au niveau du supérieur permet au chercheur de rendre la part de responsabilité confiée aux étudiants plus grande, ce qui conduit par la suite à un ajustement du rôle de l'enseignant. Dans cette même optique, Ghedamsi (2017) souligne que les fondements, sur lesquels se base ce modèle d'apprentissage, se concentrent sur l'optimisation des interactions au sein du système mentionné afin de donner plus de responsabilités aux étudiants dans la construction de leurs connaissances. L'autrice précise qu'à l'entrée à l'université, les interventions de l'enseignant ne devront pas être négligées, car elles participent au développement des compétences des étudiants.

La structuration ascendante des niveaux de milieux est organisée de M-3 à M0. Dans le cadre de ce travail, nous considérons le milieu M-2 comme constitué du milieu matériel M-3 et du milieu objectif M-2 et nous l'appelons le milieu heuristique ou milieu d'action au sens de Gibel (2008). Il représente l'ensemble des connaissances disponibles que le sujet apprenant puisse concevoir et proposer à partir des raisonnements naturels que la situation leur inspire. Le milieu M-1 est appelé le milieu de référence ou de formulation/validation. Il correspond à l'élaboration des stratégies justifiées par le sujet apprenant. Enfin, le milieu M0 est appelé milieu d'apprentissage. Gibel (2008) le redéfinit en disant « le niveau M0 est celui des assertions » (p.20). C'est ici que commence à émerger l'institutionnalisation après la validation de conjectures proposées. L'étudiant avec l'aide de l'enseignant commence à utiliser des arguments formels spécifiques au domaine mathématique.

Le tableau ci-dessous résume la structuration ascendante des niveaux de milieux de M-3 à M0. Il est à noter que les niveaux de M-3 à M-1 représentent les niveaux adidactiques alors que le niveau M0 représente le niveau didactique.

Tableau 1. La structuration ascendante des milieux

M0 **M-apprentissage**	**E0** **Étudiant**	**P0** **Professeur enseignant**	**S0** **Situation didactique**
M-1 **M- de référence**	E-1 E-apprenant	P-1 Professeur régulateur	S-1 Situation d'apprentissage
M-2 **M-objectif**	E-2 E-agissant	P-2 Professeur observateur	S-2 Situation de référence
M-3 **M-matériel**	E-3 E-objectif		S-3 Situation objective

Pour chaque situation, les attentes de l'enseignant sont différentes de celles de l'étudiant. Gibel (2008) évoque la notion de répertoire didactique de la classe et le définit comme « l'ensemble des moyens que l'enseignant pense pouvoir attendre des étudiants, par suite de son enseignement » (p. 19). Plus précisément : « Le répertoire didactique de la classe est identifiable à la part du répertoire mathématique que l'enseignant a choisi d'expliciter, notamment pour la validation et lors de l'institutionnalisation (Bloch et Gibel, 2011, p. 15). Ainsi, l'enseignant choisit le répertoire didactique de la classe et le considère comme l'ensemble des relations didactiques qu'il juge utiles pour résoudre un problème proposé tout en prenant en compte le savoir déjà institutionnalisé précédemment.

Les chercheurs n'ont pas cessé d'enrichir le modèle de structuration en niveaux de milieu, par d'autres outils théoriques adaptés notamment à des questions relatives au cursus supérieur (Bloch, 2006). À travers ces recherches, il y a eu des aménagements et une revue de la manière d'exploiter ces interactions. Bloch et Gibel (2011) se sont appuyés sur cette structuration (Margolinas, 1994, 1998; Bloch, 2006) pour développer un modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements. Gibel (2018) précise que c'est au niveau de l'articulation entre le milieu heuristique et le milieu de référence qu'apparaît et se développe le raisonnement attendu. Bloch et Gibel ont utilisé les trois catégories de la sémiotique de Peirce : les icônes, les indices et les symboles-arguments. Une icône est un signe qui renvoie à son objet lorsqu'il ressemble à un objet. Elle relève d'une action de l'étudiant confronté à la situation. Lecorre (2016) précise qu'en mathématique, les icônes sont des signes qui évoquent immédiatement pour le mathématicien une théorie sans avoir besoin de la revisiter : par exemple le symbole $\int$ « intégrale » renvoie à la théorie de mesure. Les indices sont les signes qui indiquent un objet. Selon Otte (2006), un indice incorpore une icône et pointe l'objet sans qu'il soit l'objet lui-même. Par exemple, le dessin d'une figure peut être un indice; l'aire sous la courbe est un indice de l'intégrale. Les icônes et les indices sont des signes non symboliques. Ils représentent l'étape intuitive dans le développement d'un raisonnement mathématique. Les symboles-arguments sont les signes qui désignent l'objet au travers des règles et des lois auxquelles se soumet l'objet, en mathématiques, un calcul qui prouve une assertion. Un symbole-argument est assimilé à une preuve de nature pragmatique, sémantique ou syntaxique.

Le modèle de Bloch et Gibel (2011) se compose de trois axes. Le premier axe dépend du milieu de la situation. Bloch et Gibel supposent que les raisonnements développés par les sujets apprenants dépendent du niveau du milieu. Ensuite, le deuxième axe est constitué par l'analyse des fonctions des raisonnements. Il s'agit de l'activité mathématique que les étudiants entreprennent sous forme intuitive ou formelle. Enfin, le troisième axe renvoie au répertoire didactique sous le contrôle du système organisateur.

Le modèle d'analyse des raisonnements a été complété par Lalaude-Labayle (2016) au niveau de l'enseignement supérieur, dans le cadre de l'algèbre linéaire : « à l'aide du treillis ordonné de classe de signes » (p. 127). Les trois axes du modèle initial (Bloch et Gibel, 2011) constituent le socle du modèle proposé par Lalaude-Labayle (2016). Lalaude-Labayle a ajouté une quatrième ligne qui prend en considération les formes des raisonnements. En se basant également sur la sémiotique de Peirce, il suppose que tout raisonnement prend nécessairement l'une des formes suivantes : abduction, induction et déduction. Ces trois formes de raisonnement sont en fait trois types d'argumentation :

- L'argument consiste à découvrir une règle sous forme d'hypothèse. Cette hypothèse est susceptible d'expliquer un fait. On est alors dans l'abduction. Lalaude-Labayle souligne que l'abduction « est une inférence relative à une icône » (p. 154).
- La règle peut résulter des faits; c'est-à-dire qu'on produit une généralité à partir d'un signe particulier. On est alors dans l'induction. Chaque fois qu'il y a de la fumée, il y a du feu! « L'induction est une inférence relative à un index » (p. 154).
- La règle peut être imposée aux faits. On est dans la déduction, c'est-à-dire qu'on produit un signe particulier à partir d'une généralité. Chaque fois qu'il y a un feu rouge, il y a un ordre de s'arrêter! La déduction est une inférence relative à un symbole (p. 155).

Lalaude-Labayle (2016) explique son point de vue en disant que la première action de l'étudiant consiste à trouver un motif, grâce à son répertoire didactique. Il s'agit donc de la notion d'icône. Puis, à partir de cette icône, le système organisateur envisage une décision de calcul : nous nous retrouvons face à un indice. Enfin, le système organisateur permet l'utilisation des symboles et des formules contenus dans le répertoire didactique : nous sommes alors face à un symbole-argument.

Pour analyser le passage du raisonnement intuitif au raisonnement formel, il est nécessaire d'adopter une approche didactique qui permet aux étudiants de donner un sens à leurs déclarations et aux preuves formelles sous-jacentes, en les reliant à d'autres types de discours qui peuvent activer le côté intuitif et la cognition personnelle à un niveau donné. Lecorre (2016) précise qu'il s'agit notamment des moyens de validation qui ne sont que l'abduction, l'induction et la déduction et que ces moyens ne sont que les formes du raisonnement définies par Lalaude-Labayle (2016). Lecorre (2016) propose la rationalité et la définit comme étant un système de contrôle et de production de connaissances non contradictoires ». Le principe de non-contradiction suppose de redéfinir la vérité et la fausseté d'une assertion. Il distingue trois types de vérité : la vérité pragmatique, la vérité empirique et la vérité théorique. Ces trois types de vérité font ressortir trois types de rationalités. D'abord, la rationalité pragmatique où la validation s'impose sous forme de vérification concrète, ensuite la rationalité empirique où la validation se fait par induction et enfin la rationalité théorique où la validation s'obtient par des preuves sous forme de démonstration. Il souligne que rationalité et raisonnement se trouvent côte à côte, plus exactement tous les deux surplombent ces derniers.

La mobilisation d'une rationalité suppose la production, donc des connaissances non contradictoires. Cependant, un sujet pourrait rencontrer « un conflit de rationalité », c'est-à-dire que le sujet se rend compte de l'existence d'une contradiction. Ces conflits qui déstabilisent le sujet apprenant permettent le passage d'un type de rationalité à un autre.

Étant donné que la rationalité est une qualité du raisonnement, il nous semble que le recours à la rationalité nous permet d'aborder certaines difficultés des étudiants liées, soit à des obstacles épistémologiques, soit à des choix didactiques, et nous permet de classer, par la suite, certains conflits cognitifs. Dans ce même ordre d'idées, Brousseau et Gibel (2005) soulignent qu'un raisonnement faux n'est pas toujours dû à une erreur ou une insuffisance du sujet. Lecorre (2016) précise que « Selon Sierpinska, un obstacle est lié à une conviction profonde, à un sentiment d'une vérité évidente, au sentiment que ce qu'on sait sur une question fondamentale est le seul savoir possible » (p. 154). Ici, lorsqu'on demande à l'étudiant de réfléchir à la définition formelle, il nous paraît que ses images intuitives de la masse ponctuelle créent des obstacles. Par ailleurs, Legrand (1990) souligne que l'obstacle rencontré dans l'enseignement de l'intégrale n'est pas tout à fait didactique, mais il est plutôt de nature épistémologique. Il suppose que l'acquisition de l'intégrale par les étudiants correspond à un saut épistémologique. Il existe d'autres causes qui pourraient le produire. Pour ces raisons, nous avons ajouté une ligne, qui identifie les types de rationalité, au modèle complété par Lalaude-Labayle (2016). Nous avons enrichi les cases du tableau par des critères liés au concept d'intégrale. Le tableau ci-dessous résume le modèle d'analyse qu'on a adopté :

Tableau 2. Adaptation du modèle de Bloch et Gibel (2011) pour analyser des interventions des étudiants dans le cas de la notion d'intégrale

	Milieu M-2	**Milieu M-1**	**Milieu M0**
Fonctions des raisonnements	R1.1 SEM - Choix du contexte (physique, mathématique). - Décision de transformation de l'énoncé (registre sémiotique), de conversion entre registres - Décision de choisir une conception particulière (primitive, mesure d'une grandeur pour le contexte mathématique et la mise en équation pour le contexte physique). - Décision de calcul.	R1.2 SYN/SEM - Calculs génériques. - Formulation de conjectures étayées - Décision sur un objet mathématique.	R1.3 SYN En lien avec l'enseignant : - Organiser les signes pour obtenir un objet calculable. - Formulation et certification de validations, de preuves. - Formalisation des preuves dans la théorie mathématique requise.

	- Moyen heuristique. - Exhibition d'un exemple ou d'un contre-exemple.		
Niveaux d'utilisation des signes	R2.1 SEM Icônes ou indices dépendant du contexte (schémas, intuition), (procédure simple, modèle ponctuel $f(x) \times x\ldots$).	R2.2 SYNT/SEM Arguments locaux, génériques, opératoires : indices, calculs, modèle local $f(x_i) \times \Delta x$.	R2.3 SYNT Arguments formels spécifiques du domaine mathématique de la situation, modèle global $f(x_i) \times dx$.
Usage et actualisation du répertoire	R3.1 SYNT/SEM - Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes. - Enrichissement au niveau heuristique : calculs, connaissances ponctuelles (modèle de base, raisonnement ponctuel).	R3.2 SYNT/SEM - Enrichissement au niveau argumentaire : - des énoncés; - du système organisateur (modèle local, raisonnement covariationnel simple).	R3.3 SYNT - Formulation des preuves. - Introduction d'ostensifs organisés. - Intégrations des éléments théoriques du domaine maths (raisonnement covariationnel complexe.
Type de raisonnement	R4.1 FORMES Déductif, inductif, abductif	R4.2 FORMES Déductif, inductif	R4.3 FORMES Déductif
Types de rationalités	R5.1 Rationalité Pragmatique, empirique, théorique	R5.2 Rationalité Empirique, théorique	R5.3 Rationalité Théorique

Nous entendons par SEM le mot sémantique et par SYN le mot syntaxique.

La situation a été proposée en février 2020 à un groupe d'étudiants inscrits en première année préparatoire de filière Maths-physique (MP) à l'Institut préparatoire aux écoles d'ingénieurs de Tunis (IPEIT). Nous soulignons que ces étudiants ont tous eu un bac « section Maths ». Dix-huit étudiants ont participé à l'expérimentation. Le déroulement de la séance a été enregistré sur dictaphone, puis retranscrit.

Avant de proposer la situation en classe, nous avons discuté avec l'enseignante du déroulement prévu pendant deux mois à raison de deux heures par semaine afin qu'elle se convainque de la pertinence de la situation et de son utilité pour confronter les étudiants à la problématique de l'intégrale. La situation lui semble nouvelle et présente le risque qu'elle ne soit pas facilement acceptée par les étudiants. Après ces discussions, nous nous sommes mis d'accord sur le fait que l'expérimentation se déroulerait en une seule séance de deux heures et demie en raison de la surcharge qu'elle impose au programme. Nous avons discuté des scénarios possibles et de la façon dont elle pourrait gérer la situation en cas de bifurcation ou dans le cas où les étudiants penseraient à d'autres stratégies qui ne font pas partie des objectifs envisagés, comme la recherche d'une primitive.

Notons également que des modifications mineures ont été effectuées sur les interventions des étudiants, et parfois sur celles de l'enseignante, pour en faciliter la lecture. Par exemple, les mots en arabe ont été traduits en français et la construction de quelques phrases a été revue. Cependant, nous avons renoncé à ce type de rectification chaque fois qu'on a senti qu'il pourrait altérer le contenu de l'intervention.

Le problème consiste donc à chercher la valeur de la force d'attraction gravitationnelle exercée par un barreau homogène de longueur défini sur une masse ponctuelle située dans son prolongement à une distance donnée. Il a été proposé pour la première fois, comme une situation fondamentale pour l'introduction de l'intégrale de Riemann en 1985 par une équipe de recherche à l'Université de Grenoble (Grenier et al., 1986). L'objectif de la situation est de mettre les étudiants face à un problème dont la résolution nécessite le recours à un processus d'approximation des produits infinitésimaux. La valeur de l'intensité du phénomène physique, qui est à la base du problème proposé, ne peut s'obtenir qu'à l'issue d'une procédure intégrale (Rogalski et al., 2001). L'organisation de la situation repose sur une structuration très fine du milieu didactique et permet de prévoir ce que les étudiants peuvent concevoir et proposer à partir des raisonnements naturels que la situation leur inspire : on imagine les décisions qu'ils allaient pouvoir prendre seuls, sans être plus ou moins discrètement invités, poussés, contraints par l'enseignant à aller dans le sens du savoir institutionnel visé par l'étude. La situation est connue sous le nom de « la situation du barreau » (figure 1).

> Connaissant la loi d'attraction de deux masses ponctuelles **m** et **M** : $\mathbf{F} = \mathbf{mMG}\frac{\mathbf{1}}{r^2}\boldsymbol{dr}$, déterminer la force exercée par un barreau homogène de longueur L = 6m et de masse M = 18 kg sur une masse ponctuelle de masse m = 2 kg située en son prolongement à une distance l = 3 m.

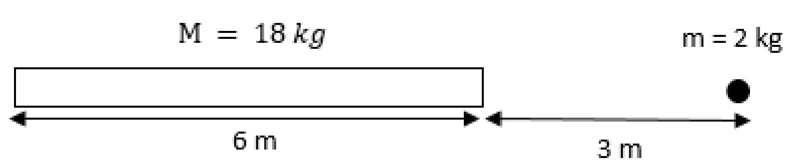

Figure 1. La situation du barreau

Nous avons envisagé que la situation se compose de trois phases. Dans la première phase, on s'attendait à ce que les étudiants procèdent en appliquant la procédure ponctuelle « simple produit » en concentrant la masse du barreau en son centre de gravité comme le montre la figure 2 ci-dessous.

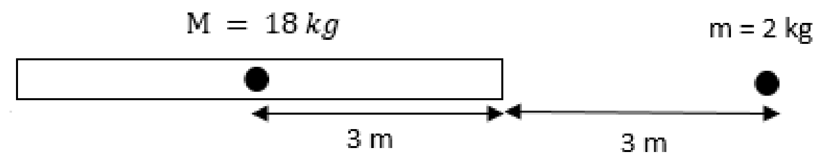

Figure 2. Exemple de procédure ponctuelle « simple produit »

Les étudiants passent du contexte physique dans lequel la situation est proposée au contexte mathématique. Ensuite, dans l’étape suivante, on s’attendait à ce qu’ils effectuent le produit de $f(r_i)$ par Δr. Ici, les étudiants devraient être capables de comprendre la signification de chaque facteur de cette étape produit, ainsi que la façon dont ces facteurs contribuent au produit. Les difficultés dans cette étape ne sont pas nécessairement liées à l'opération de multiplication et à l'exécution du calcul, mais elles sont généralement liées à la compréhension de la façon dont le produit est formé et à la façon d'utiliser chaque facteur au sein du produit.

La deuxième phase de l’expérimentation a trait à l’étape de la somme. La force cherchée est la somme des forces partielles sur chaque partie découpée du barreau. Bien que les étudiants ne l'aient probablement jamais exprimé explicitement, ils devraient nécessairement savoir que le domaine en jeu (constitué de la longueur du barreau et de la distance qui le sépare de la masse ponctuelle) est une réunion de ses parties (les petits morceaux obtenus après le découpage, voir figure 3).

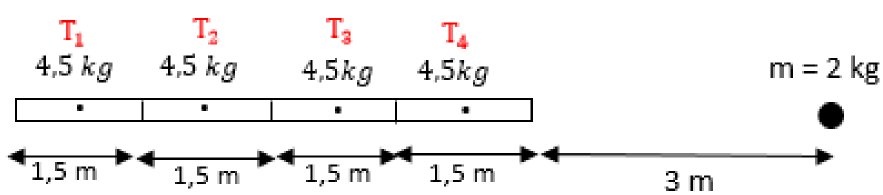

Figure 3. Réunion des parties du domaine en jeu

Cela pourrait être implicitement reconnu par leur confort avec l'idée de décomposer le domaine en différentes partitions, puis d'obtenir les sommes à partir des forces partielles. Pour la formule de la distance, il devrait être évident pour les étudiants que la distance totale est égale à la somme des parties de toutes les plus petites distances. Cependant, il ne sera peut-être pas aussi facile pour eux de comprendre que la force exercée par le barreau sur la masse ponctuelle pouvait être décomposée en forces partielles, en raison de leur méconnaissance du phénomène physique qu’ils sont en train de manipuler.

La troisième phase est basée sur l'encadrement de forces partielles. Les étudiants devraient appliquer le principe de somme sur les minorants d'une part, et sur les majorants des fonctions partielles d'autre part. Ils obtiendraient un encadrement de F par des sommes inférieures et des sommes supérieures. En passant à la limite, ils remarqueraient que les deux encadrements convergent vers la même valeur. Ainsi, ils obtiendraient la valeur cherchée. Lorsque les étudiants discuteraient, entre eux ou avec l'enseignant, la façon de trouver une meilleure approximation pour une intégrale donnée, ils travailleraient alors au sein de l'étape limite et participeraient au processus d'obtention d'approximations qui sont progressivement plus proches de la valeur de l'intégrale définie. La traduction de tout ce débat en un langage formel, par l'enseignant, sollicite un passage du mode sémantique au mode syntaxique.

4. Analyse a priori

Lorsque la situation est proposée à des étudiants qui n'ont pas tous l'idée qu'il s'agit de la notion d'intégrale, la première réaction attendue, après un temps de réflexion, est qu'ils remplacent le barreau par son centre de gravité, situé en son milieu en y concentrant toute sa masse, et ils déduisent alors que la valeur de la force $F = \frac{Mm}{r^2} G = \frac{18 \times 2}{36} G = G$.

Le recours au principe du centre de gravité place les étudiants dans une rationalité pragmatique et c'est une position confortable dans laquelle ils peuvent chercher ce qui leur apparaît a priori pertinent et valide, et fait partie de leur expérience personnelle. Ensuite, chacun devrait présenter à la classe ses idées et conjectures qu'il a d'abord élaborées seul ou avec les autres, en adoptant une forme d'expression telle que le groupe complet puisse s'en saisir comme d'une idée générale qui pourrait, après étude collective, s'insérer dans la théorie de la classe. Legrand (1990) appelle ces échanges en classe le débat scientifique qui consiste à proposer au tableau un problème que les étudiants peuvent résoudre avec leurs seules connaissances antérieures. Ensuite, après un temps de réflexion, ils proposent leurs conjectures. Puis, l'enseignant organise un débat pour voir la position des étudiants face à ce qui est exposé. Enfin, il effectue la synthèse des résultats obtenus et institutionnalise ce qui devrait être retenu.

Dans cette étape, le problème est situé dans un contexte physique. Le recours au principe du centre de gravité est une utilisation ponctuelle des connaissances anciennes qui se base sur la procédure ponctuelle « simple produit » et qui fonctionne comme une icône. La validation est basée sur des cas concrets ce qui sollicite une rationalité pragmatique.

Quelqu'un pourrait constater que la force obtenue à la suite du découpage en deux est différente de la force initiale, ce qui contredit le principe du centre de gravité. Dans ce cas, l'enseignant invite chaque étudiant à exercer un travail de preuve et de réfutation scientifique sur cette idée initialement portée par cet étudiant; de cette façon cette idée devient, pendant le temps de la résolution de la conjecture énoncée, la propriété intellectuelle de toute la classe : interroger son éventuelle ambiguïté, lui trouver un contre-exemple ou l'arranger pour qu'on puisse montrer qu'il ne peut y en avoir. Cette étape de la situation fait déplacer la classe d'une rationalité pragmatique à une rationalité empirique de type réfutationniste. Il faut souligner, si aucun étudiant n'en fait le constat, que le découpage sera alors proposé par l'enseignant.

La difficulté attendue est au niveau du caractère variable de la distance qui sépare le point d'application de la force d'attraction ponctuelle et la masse ponctuelle. Nous nous attendons à ce que la majorité des étudiants ne puissent pas arriver à voir que la distance est variable et saisir la contradiction pointée avec l'hypothèse initiale qui suppose qu'il s'agit d'une force d'attraction entre deux quantités constantes. Cette difficulté pourrait constituer un obstacle crucial que les étudiants devraient dépasser à l'aide des interventions de l'enseignant. Dans cette même perspective, Bloch (1999) souligne que le rôle de l'enseignant est « de gérer de véritables interactions entre connaissances des élèves, critères mathématiques reconnus, connaissances mathématiques de l'enseignant, et le milieu support de la situation » (p. 167). Il devrait investir le conflit sur le caractère variable de la distance pour structurer un débat en classe, et c'est à l'aide de ce débat que les étudiants seront capables d'évoluer dans les niveaux du milieu de la situation. En fait, l'enseignant est la seule personne qui possède les connaissances épistémologiques qui permettent d'assumer cette position. Chaque étudiant doit donc tenter de formuler ses idées propres en termes de conjectures. Il appartient alors à l'enseignant de voir comment ordonner le traitement collectif de ces propositions initialement individuelles pour que le débat sur chaque idée puisse apporter un éclairage (souvent décisif) dans la compréhension de la situation. Par ce choix d'introduction des idées personnelles, les idées fortes qui émergent ici et là ne sont plus mises de côté, elles suscitent un fort débat, alors que les idées informulables dans une certaine rationalité indiquent d'elles-mêmes à leurs auteurs qu'ils doivent trouver une autre façon de les exprimer.

Dès que les étudiants se rendent compte qu'il ne s'agit pas de la stratégie du centre de gravité, ils se trouvent face à un blocage. La première phase de la situation permet d'établir (a priori) la première étape de la procédure intégrale : $f(x) \times \Delta x$. Or, cette formule ne s'applique qu'à des situations dans lesquelles les deux grandeurs, qui constituent la relation multiplicative, sont constantes. Cela amène implicitement l'idée de décomposer le barreau en plusieurs morceaux, puis à appliquer à chaque morceau la relation multiplicative localement pour enfin calculer à chaque nombre de découpages la somme correspondante.

Après la mise en place de la procédure de somme, les étudiants seront amenés à procéder à des encadrements de plus en plus fins. Pour ce faire, il s’agit de :

1) mettre à leur disposition les matériaux nécessaires leur permettant de procéder à un calcul simple et rapide de ces termes;
2) les amener à se rendre compte de l’efficacité des sommes construites pour encadrer la valeur de la force d’attraction entre deux sommes inférieures et supérieures en considérant la distance r aussi petite que l’on veut.

Ici, dans la situation du barreau, un détour s’impose peu à peu de façon adidactique : comme sur chacune des parties on peut facilement majorer et minorer ce qui peut advenir sur la partie entière, il se peut qu’en diminuant ces parties, non seulement les encadrements locaux, mais aussi leur somme se resserrent au point de faire apparaître une valeur limite de ces sommes qui devient par construction l’évaluation exacte de la grandeur recherchée.

L’obstacle que les étudiants peuvent rencontrer à cette étape est la ponctualisation des morceaux découpés du barreau (Legrand, 1990; Rogalski et al., 2001; Decroix et Rogalski, 2013; Rogalski, 2018). Comment les étudiants vont-ils saisir cette idée? Tout d’abord, il faut se rappeler de la masse ponctuelle de 2 kg qui pourrait s’imposer fortement et faire obstacle chez quelques étudiants à l’acceptation du découpage à l’infini. Ensuite, si on accepte que la masse ponctuelle soit de 2 kg, le découpage en 9 va amener de la même façon à avoir des petits barreaux dont chacun a une masse 2 kg. En fait, l’augmentation du nombre de découpages est un exemple de réflexion sur la limite en termes de meilleure approximation. Cet obstacle nous amène à penser au dernier obstacle que pourraient rencontrer les étudiants : comment faire la somme des quantités de l’ordre infinitésimal; la somme de quantités presque nulles?

En fait, l’obstacle central que l’intégration doit surmonter est la ponctualisation du barreau, c’est-à-dire comment rendre le barreau comme un ensemble de points alignés. Ici, il faut placer les étudiants dans une position où ils peuvent chercher ce qui leur apparaît a priori pertinent et valide dans une rationalité pragmatique. Ensuite, ils auront à présenter à la communauté classe les idées personnelles qu’ils ont d’abord élaborées seuls ou avec quelques pairs, en adoptant une forme d’expression telle que le groupe complet puisse s’en saisir comme d’une idée générale qui pourrait, après étude collective, s’insérer dans la théorie de la classe.

L'obstacle didactique majeur que nous nous attendons de rencontrer dans les débats spontanés que l'enseignant suscitera au cours de ces phases adidactiques, c'est qu'en réalité, dans un vrai débat de classe, ce n'est pas la classe tout entière qui voit arriver les interventions critiques qui fusent ici ou là. Elles contiennent en germe ce que le recours à une rationalité théorique pourra faire fructifier si on se donne les moyens intellectuels de prendre conscience des multiples imprécisions/contradictions que contiennent ces propositions « spontanées » qui s'expriment le plus souvent en langage courant.

Nous nous attendons à ce que lorsque l'enseignant donne la parole aux étudiants, pour qu'ils énoncent ce qu'ils conçoivent dans leur rationalité propre, seules quelques interventions critiques apparaissent parmi les propositions plus ou moins pertinentes qui arrivent dans le désordre. Ces interventions « à remarquer » indiquent clairement que leurs auteurs sont en train de buter sur le ou les obstacles épistémologiques qui caractérisent le savoir visé : le problème c'est que la force change avec la distance (Legrand, 1990; Rogalski et al., 2001; Decroix et Rogalski, 2013; Rogalski, 2018).

En fait, pour réussir à provoquer la rencontre avec ces obstacles épistémologiques, on a discuté avec l'enseignante du fait qu'elle va devoir affronter l'obstacle didactique majeur : faire apparaître in vivo dans une rationalité théorique ce qui est au cœur des formulations « naïves » des étudiants. On mise donc ici sur le fait que par une analyse a priori adaptée au savoir étudié, l'étudiant sera amené à ressentir la nécessité d'effectuer les sauts cognitifs souhaités, devra se rapprocher des changements de rationalité attendus : passage du pragmatique à l'empirique, puis au théorique. Ces transitions seront ensuite reprises et institutionnalisées par l'enseignant qui y reviendra en cours pour les clarifier dans les séances qui suivent.

5. Analyse a posteriori

La composition de la structure de l'intégrale dans le cadre de cette situation avait le potentiel d'approfondir la compréhension des étudiants de la signification des différentiels, des intégrales définies et, dans une certaine mesure, de la somme de Riemann au-delà de ce qui a été vu dans l'approche d'enseignement usuel. Cependant, il faut souligner que la signification de la différentielle dx est un peu ambiguë : elle a été interprétée de plusieurs manières par les étudiants. La perspective ici, qui est cohérente avec les applications en physique et dans d'autres domaines, est que dx est défini comme un changement infinitésimal de la quantité x, semblable à la limite du changement de x pour les produits dans une somme de Riemann $\Delta x = \frac{b-a}{n}$; ($dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}$). La différentielle représente ainsi pour eux une quantité infinitésimale ou «un changement infinitésimal d'une quantité physique».

La démarche dans laquelle le processus de conceptualisation est ancré, le partage de responsabilité, la part confiée aux étudiants au cours de la séance et le débat établi constituent des observables qui permettent une entrée adéquate à notre analyse. En plus de ces observables, nous développons nos réflexions suivant d'autres indicateurs dans une perspective d'analyse multidimensionnelle.

Au cours de l'expérimentation, nous avons remarqué que les étudiants possèdent des images intuitives, de la différentielle dx, basées sur des métaphores spécifiques et que ces images intuitives peuvent devenir un obstacle à l'accès au niveau formel tel que, par exemple, les deux interventions suivantes :

> 165 Dhia : On peut considérer la tige comme si elle est un ensemble de points (masses ponctuelles)
>
> 230 Marouene : Moi j'ai fait ce choix parce que les morceaux de la tige vont être assimilés à des points matériels. On aura neuf points et on fait la somme, on trouve la valeur exacte. [Il fait un petit intervalle entre son pouce et son index sur le schéma du barreau au tableau]

Nous entendons par « métaphore » le mécanisme par lequel un concept abstrait est interprété en termes d'objets réels. Conceptuellement, la métaphore nous permet de raisonner sur un type d'objet comme s'il en était un autre. Ainsi, une métaphore n'est pas seulement une expression linguistique mais aussi un mécanisme de pensée, mais elle peut être complètement inappropriée quand, pour le physicien – et pour les étudiants – l'intégrale est de la forme $0 \times \infty$ ($dx = 0$ et les sommes de Riemann sont en nombre « infinie »).

Parmi les échanges en classe, nous avons choisi les quelques extraits suivants.

5.1 Premier extrait

Le premier extrait relève de la première phase où il s'agit de développer la relation multiplicative et de l'appliquer localement : $f(x)\Delta x$. Les étudiants évoquent un raisonnement qui traduit la mise en perspective de deux niveaux de milieu : le milieu de référence (cadre numérique dans lequel la conjecture a été produite) et le milieu objectif, constitué des figures, qui constitue le cadre géométrique : (R1.2), (R1.2), (R2.2) (Bloch et Gibel, 2011, p. 29). Il s'agit du début de l'entrée au niveau M0. C'est un raisonnement correspondant à la formulation d'une preuve.

> 78 Hedi : La distance n'est pas toujours la même.
>
> 79 Marouene : On ne peut pas calculer la force parce qu'on ne connaît pas la distance. On connaît F, on connaît la distance entre l'extrémité droite du barreau et la masse ponctuelle qui est 3 m, mais la longueur du barreau qu'on va considérer est inconnue.

80 P[4] : Comment on va s'en sortir?

92 Chahd : On ne peut pas calculer exactement cette force!

93 P : Pourquoi tu ne peux pas la calculer?

94 Chahd : Parce que chaque point du barreau correspond à une valeur bien déterminée.

95 Dhia : On va arriver à l'intégrale[5]. On va faire des sommes.

96 Sana : Mais non, qu'est-ce que tu viens de dire? L'idée, c'est clair! C'est pour cela qu'on doit appliquer le centre de gravité.

97 Chahd : Peut-être! Je ne sais pas. Bon, on applique le centre de gravité.

98 P : Que pensez-vous?

Tableau 3. Analyse du premier extrait

Nature et fonction/milieu	Signes et répertoire	FR/TR*
M-1 : Décision sur un objet physique (R2.1). Formulation de conjectures étayées (R2.1). L'enseignante demande une décision du reste de la classe à propos des interventions de Chahd et Sana.	Enrichissement du système organisateur au niveau argumentaire : Sana semble transposer le problème de la force d'attraction de deux masses ponctuelles à la situation proposée et elle en déduit qu'il s'agit du centre de gravité; c'est une intervention de nature sémantique (R2.2). De même pour Chahd.	Le raisonnement prend la forme déductive. Le raisonnement de Sana se base sur un cas concret : le barreau est assimilé à une masse ponctuelle. De même que pour Chahd, elle prend sa décision parce que son camarade a pris la même : il s'agit d'un raisonnement abductif qui mobilise une rationalité pragmatique.

*FR/TR : Forme de raisonnement/type de rationalité dans ce tableau et dans la suite.

Hedi évoque un indice très important : la distance change! C'est une intervention cruciale sur l'obstacle qui justifie la création du concept d'intégrale, mais qui va rester privée, excepté pour Chahd et peut-être pour d'autres. Marouene partage le même problème sur la valeur de la distance à considérer.

L'intervention de l'enseignante (98 P) ne semble pas mesurer l'importance épistémique de ce qui est en jeu. Elle aurait dû établir un débat à propos de l'idée de Marouene et demander plus de clarifications. Elle aurait également dû proposer à la classe de s'arrêter dans la recherche d'autres idées pour se concentrer sur une

---

4 Nous soulignons que P, dans tous les extraits choisis, renvoie au professeur.

5 Il est à noter qu'en classe terminale, les élèves de la section Maths ont vu le chapitre d'intégrale définie qui est introduit à partir de la notion de primitive et qu'ils ont rencontré la méthode de rectangles comme une technique pour approcher ce type d'intégrale.

idée précise. Elle aurait invité le groupe (la classe) à valider telle ou telle conjecture, par exemple, elle aurait invité chacun à exercer un travail de preuve et de réfutation scientifique sur une idée initialement portée par un étudiant seul; de cette façon cette idée devient pendant le temps de la résolution de la conjecture énoncée la propriété intellectuelle de tous : interroger son éventuelle ambiguïté, lui trouver un contre-exemple ou l'arranger pour qu'on puisse montrer qu'il ne peut y en avoir. Mais, sans raison apparente, elle change de problème.

5.2 Deuxième extrait

99 Marouene : F = G.

100 P : Tout le monde est d'accord avec ce résultat? Y-a-t-il d'autres propositions?

101 Slim : Oui.

Tableau 4. Analyse du deuxième extrait

Nature et fonction/milieu	Signes et répertoire	FR/TR
M-1 : La réponse de Marouene est attendue pour cette étape de l'expérimentation. L'enseignante s'interroge sur la valeur proposée afin de mettre la classe d'accord sur un seul résultat. La réponse de Slim est prise comme une décision collective de toute la classe.	L'enseignante veut mettre toute la classe au même niveau de connaissances pour qu'elle puisse passer à l'étape suivante sans difficulté : les réponses des étudiants sont conformes à ses attentes.	La décision de Marouene est faite suite à un cas concret : il s'agit d'un raisonnement abductif qui mobilise une rationalité pragmatique.

Dans la réalité d'une classe, ceux qui voient, entendent et remarquent ce qui a une réelle consistance épistémologique dans ces diverses propositions d'apparence semblable ne constituent pas l'ensemble des étudiants, mais seulement quelques sujets épistémiques en avance, ou décalés par rapport au groupe. Ils ne sont d'ailleurs pas forcément très conscients du degré de profondeur en termes de pertinence et de contradiction potentielle que contient leur idée propre ou celle de leur pair. En fait, seule l'enseignante possède les connaissances épistémologiques qui permettent d'avoir rapidement cette perception. L'enseignante aurait dû établir un débat à propos de l'idée de Marouene et demander plus de clarifications. Il nous semble qu'elle a été prisonnière de la position adidactique qu'elle devrait occuper (selon les consignes qu'on lui a données) et qui lui interdit d'intervenir sur le fond dans le débat : comment ne pas orienter très fortement le débat s'il fait systématiquement ressortir les endroits où il y a matière à réfléchir très fort ensemble? C'est à ce niveau, ainsi que le dit Legrand (1990), que l'instauration d'une communauté scientifique classe pourra jouer un rôle didactique décisif dans la pratique de ces débats spontanés. Dans un tel apprentissage des théories et des techniques, les techniques peuvent alors devenir en conscience l'opérationnalisation d'un traitement rationnel de la réalité.

5.3 Troisième extrait

> 165 Dhia : On peut considérer la tige comme si elle est un ensemble de points (masses ponctuelles). Chaque point du barreau possède une masse ponctuelle qui va exercer une force sur la masse m. La force qu'on cherche est la somme des forces élémentaires exercées par chaque point du barreau sur la masse ponctuelle.
>
> 166 P : Tu passes au tableau et tu nous expliques ton idée.
>
> 167 Dhia : c'est comme si on a coupé le barreau initial en une infinité de barreaux très petits. On fait la même chose que la situation initiale avec chaque petit barreau : la masse est distribuée uniformément. Donc, chaque petit barreau possède une masse M divisée par le nombre total des barreaux.

Tableau 5. Analyse du troisième extrait

Nature et fonction/milieu	Signes et répertoire	FR/TR
M-1 : Début de l'entrée M0. Raisonnement correspondant à la formulation d'une preuve. Dhia comprend qu'à chaque point du barreau correspond une distance et que la masse est distribuée uniformément. La valeur de F est la somme totale des valeurs partielles : émergence du modèle global.	Raisonnement qui traduit la mise en perspective de deux niveaux de milieu : le milieu de référence (cadre numérique dans lequel la conjecture a été produite) et le milieu objectif, constitué des figures, qui constitue le cadre géométrique : (R1.2), (R2.2) (Bloch et Gibel, 2011, p. 29).	Raisonnement inductif / rationalité empirique. L'interprétation l'identifie à une déduction avec une conséquence nécessaire.

Au début, Dhia a commencé à parler de « la somme des forces élémentaires », ce qui montre qu'il s'est rendu compte que la force totale est la somme de petites forces. Un intérêt particulier à cet extrait est qu'il y a deux types de phrases qui émergent dans la réponse : la force à chaque point et la force ponctuelle ou élémentaire. L'étudiant a utilisé les deux phrases de manière réciproque dans son intervention lorsqu'il explique sa conception pour la notion de différentielle, et il nous semble qu'il n'est pas conscient que les deux phrases comportent deux idées différentes. La force à chaque point signifie l'ensemble de forces situées sur chaque position du barreau, tandis que la force élémentaire ou ponctuelle consiste à considérer une certaine quantité du barreau comme une quantité ponctuelle sans aucune taille physique et qui exerce une force sur la masse ponctuelle initiale.

Nous avons également remarqué que les étudiants utilisent souvent les expressions « un ensemble de masse ponctuelle » et « chaque point du barreau ». Il semble que les étudiants aient lié les deux termes au terme différentiel dm, ce qui nous permet de dire qu'ils pensent que dm représente une petite quantité de masse avec une taille physique négligeable. Il faut souligner qu'en physique, lorsque la taille d'un objet peut être négligée par rapport à la distance au point de référence, l'objet est souvent considéré comme un point pour des raisons de simplicité (Rogalski et al., 2001; Decroix et Rogalski, 2013; Rogalski, 2018). Par exemple, en mécanique newtonienne, nous utilisons souvent un point pour représenter l'objet et dessiner les forces agissant sur ce point : la loi de Newton, qui définit la force électrostatique entre deux masses ponctuelles. Ainsi, nous concluons que les étudiants ont utilisé la notion de masse ponctuelle de deux manières différentes : le terme différentiel dx est vu comme un emplacement géométrique dans l'espace et dm représente une petite quantité du barreau avec des dimensions physiques négligeables. Or, lorsqu'ils considèrent l'objet comme composé de points, ils ne parviennent pas souvent à relier ces points aux dimensions physiques. Lorsqu'ils parlent de la masse à chaque point, les étudiants semblent relier la masse en un point au rapport entre la masse totale et la longueur du barreau. En fait, il y a des étudiants qui considèrent les objets physiques comme un ensemble de points séparés (discontinus). En mathématiques, les différentielles telles que le différentiel dx portent la signification d'une quantité infinitésimale. Pour construire le processus qui amène à concevoir des quantités infinitésimales, l'étudiant considère les quantités différentielles comme un point sur une ligne droite.

Les étudiants ont découpé le barreau en petits barreaux, puis ils ont cherché la force élémentaire exercée par chaque barreau sur la masse ponctuelle. En considérant la longueur totale du barreau comme composée de très petits segments, les étudiants ont pu construire des rapports des termes différentiels ou infinitésimaux pour le barreau ainsi pour la masse du barreau : $\mathrm{dm} = \mathrm{M/L}$.

L'idée fondamentale de l'intégration consiste à découper l'objet initial en petits morceaux, puis à appliquer la somme. Les petits morceaux correspondent aux constructions géométriques et physiques de l'objet. La considération géométrique fait référence au fait que les morceaux découpés sont constitués par les mêmes grandeurs que l'objet initial : une ligne est coupée en petits segments, une surface est coupée en petites surfaces. L'utilisation de la notion de petite quantité et de métaphore d'objet a aidé les étudiants à construire la notion de différentielle en termes de choses concrètes avec lesquelles ils ont une expérience directe. L'aspect physique détermine comment l'objet doit être découpé. Cela a conduit les étudiants à donner un sens aux mathématiques dans des scénarios physiques.

L'étudiant utilise des barreaux infiniment petits pour évoquer la notion de différentielle. Hu (2010) appelle cette conception pour les différentielles la conception de petites quantités.

Cette conception de petites quantités fonctionne comme une icône. Elle décrit la transformation de la notion de différentielle d'un objet concret dans le contexte initial (l'expérience physique) au contexte mathématique abstrait. Ici, l'étudiant considère le petit segment découpé comme un différentiel dx. Il associe la notion de différentiel à une petite quantité d'une quantité physique beaucoup plus grande.

5.4 Quatrième extrait

170 P : Mais en fait, un point c'est que F. Newton, qu'est-ce qu'il veut dire par ce F-là, c'est-à-dire la distance sur quel ensemble? D'après-vous, la distance… ponctuelle … entre deux points…. Ce n'est pas la distance entre point et droite…

171 Dhia : C'est l'idée que j'avais déjà dite tout à l'heure ! C'est comme si on a divisé le barreau initial en une infinité de barreaux très petits. On fait la même chose que la situation initiale avec chaque petit barreau : la masse est distribuée uniformément, donc chaque petit barreau possède une masse M divisée par le nombre total des barreaux.

172 P : Maintenant, si vous comparez les valeurs trouvées pour le barreau entier, puis découpé en deux, puis en quatre. Qu'est-ce que vous remarquez?

173 Sana : Plus le découpage est grand, plus la force est grande. [Il faut noter que l'étudiant veut dire que plus on découpe le barreau, plus la valeur de la force augmente].

174 Dhia : La force $F_1 \leq F_2 \leq F_3$.

175 P : Donc, qu'est-ce qu'on va faire?

176 Dhia : On va chercher un encadrement.

Tableau 6. Analyse du quatrième extrait choisi

Nature et fonction/milieu	Signes et répertoire	FR/TR
M-2 : Il s'agit du calcul générique qui sera par la suite généralisé. Exhibition d'un exemple par Dhia (174).	Enrichissement au niveau heuristique (R3.1). L'intervention de Sana est de type sémantique.	Manipulation des cas concrets. Il y a un arrangement de preuves de nature physique : il s'agit d'un pragmatisme mobilisé par une abduction.

L'intervention de Dhia (171) représente l'approche de l'obstacle central que l'intégrale doit surmonter. La manipulation des cas concrets aide à déterminer des propriétés spécifiques, comme le souligne Lecorre (2016). Ici, il s'agit d'une correspondance avec le milieu objectif. Nous sommes dans le mode sémantique.

Du point de vue des fonctions des raisonnements : l'intervention de Sana correspond à une formulation de conjectures étayées (R1,2). En fait, il y a de l'ordre de l'évidence physique comme dans le mot « grand » ainsi que le dit Lecorre (2016). Il s'agit d'une rationalité pragmatique. La réponse de Dhia (176) à la question de l'enseignante propose la nouvelle règle que les étudiants doivent suivre : la recherche des encadrements est le meilleur choix dans cette étape de situation.

5.5 Cinquième extrait

> 212 Tarek : Si on découpe la tige en n parties, on aura la valeur exacte. Chaque partie devient infiniment petite et on peut appliquer le principe du centre de gravité.
>
> 213 P : Oui, c'est une bonne idée, on découpe infiniment petit. On va tendre vers l'infini et la masse sera ponctuelle.

Tableau 7. Analyse du cinquième extrait

Nature et fonction/milieu	Signes et répertoire	FR/TR
M-1 : L'idée de Tarek est idoine. L'enseignante la reformule avec le vocabulaire convenable.	L'intervention de Tarek s'appuie sur des représentations sémantiques pour mettre en œuvre le processus d'approximation dont il a besoin. L'enseignante profite de ces déclarations pour faire émerger le raisonnement syntaxique dont elle a besoin. L'enseignante a la volonté de modifier le système organisateur des étudiants relatif à l'intégrale définie (Bloch et al. 2007) : niveau R2.3	

Bloch (1999) précise que l'enseignant observe les actions des sujets apprenants afin d'anticiper les interventions qu'il devra faire. Cette position lui permet d'intervenir dans le débat, non pour prendre parti et pousser discrètement la classe vers sa solution, mais pour faire en sorte que les points de vue les plus décisifs (vrai/faux, pertinent ou non) qui font barrage à l'entrée dans la problématique scientifique visée servent au contraire à devenir des points de passage/d'introduction vers ce que tout le monde doit pouvoir prendre en compte (par exemple, faire la conjecture que tout morceau de barreau de 2 kg peut être traité comme une masse ponctuelle). L'essentiel est que ces propositions critiques ne se perdent pas, ne soient pas seulement traitées comme une remarque surprenante/gênante d'un sujet épistémique particulier qu'on ne veut ni encourager ni décourager, comme une idée sans importance qui risque alors d'être discrètement balayée et étouffée dans la discussion par l'arrivée d'autres remarques moins dérangeantes. Pour que ces idées cruciales puissent être débattues et fassent évoluer la rationalité du groupe (la classe), il doit donc exister une sorte d'exigence coutumière qui consiste à tenter de ne pas rester trop vague et imprécis sur la thèse qu'on semble défendre (sinon, à partir des mêmes raisons, chacun pourra in fine adopter sur chaque thèse un point de vue ou le point de vue contraire).

5.6 Sixième extrait

> 205 Marouene : Pourquoi on ne découpe pas la tige en neuf parties égales? Chaque partie de la tige aura une masse de 2 kg, elle représente un point matériel et la longueur de chaque partie est $\frac{6}{9}$ de la longueur du barreau. Puis, on calcule la distance entre chaque partie de la tige et la masse ponctuelle m. Après, on calcule la force d'attraction de chaque partie en se basant sur le principe du centre de gravité et on fait la somme on trouve la valeur de F.
>
> 206 P : Pourquoi précisément neuf?
>
> 207 Marouene : Après le découpage en neuf, chaque partie possède une masse de 2 kg qui est supposée, dès le début, être comme une masse ponctuelle !
>
> 208 P : Mais la masse de chaque partie du barreau n'est pas ponctuelle pour 9!
>
> 209 Marouene : Si on découpe en neuf parties, chaque morceau aura une masse de 2 kg qui est une masse ponctuelle.
>
> 210 Sana : Il a voulu la rendre égale à m, la masse ponctuelle!
>
> 211 Marouene : Oui, par rapport à la masse m, ils ont la même masse!

Tableau 8. Analyse du sixième extrait

Nature et fonction/milieu	Signes et répertoire	FR/TR
M-2 : Décision de transformation de l'énoncé (R1.1).	Utilisation ponctuelle des connaissances anciennes (R3.1).	Donnée : m = 2 kg, m est associé à une masse ponctuelle. Axiome : donc, toute masse de 2 kg est une masse ponctuelle. Raisonnement déductif mais faux.

Le raisonnement de Marouene se réfère au milieu objectif de départ : le découpage du barreau en neuf parties; chaque partie est considérée comme un point matériel. La justification des étapes du raisonnement doit favoriser les utilisations des énoncés en tant qu'éléments du système organisateur (Bloch et Gibel, 2011).

Marouene pense que le découpage en neuf permet de rendre les parties découpées des points matériels, car la masse de chaque partie est de 2 kg. Elle est égale à celle de la masse ponctuelle. Il s'agit d'une conception erronée de la définition d'un point matériel. En fait, un point matériel est un point de l'espace physique auquel on associe une grandeur scalaire positive, mesurable appelée masse. C'est dire qu'un pont matériel possède une masse mais un volume nul. Ici se pose un problème qui montre que le recours à la physique n'est pas toujours évident. Le concept du point matériel est un concept utile en physique, mais on s'éloigne alors du concret censé faciliter le passage vers l'abstrait!

Les déclarations de Marouene semblent être des tentatives « naïves » comme le définit Lecorre (2016) : « les tentatives "naïves " provenant des conceptions des élèves qui trouvent dans la situation un terrain naturel d'application et doivent être questionnées par les rétroactions du milieu. Le savoir visé doit être contenu dans la situation comme la seule stratégie accessible optimale de résolution » (Lecorre, 2016, p. 142). Nous remarquons que le problème des encadrements est toujours absent de l'enseignante, alors qu'il faudrait faire tendre vers la notion des sommes de Darboux ainsi que le dit (Rogalski et al., 2001).

5.7 Septième extrait

> 219 Bilel : On a un problème, lorsqu'on découpe notre tige en n points, combien ça sera la masse de chaque point?
>
> 220 Raed : Zéro ! Tendre vers zéro.
>
> 221 Bilel : Elle va tendre vers zéro! C'est M/n.
>
> 222 P : Si on découpe uniformément, la masse est M/n.
>
> 223 Raed : n tend vers l'infini.
>
> 224 Bilel : Lorsqu'on découpe en une infinité de points, elle tend vers zéro. Comment on va calculer? Lorsque n tend vers l'infini, la masse se rapproche de zéro, ainsi la somme devient nulle!

Tableau 9. Analyse du septième extrait

Nature et fonction / milieu	Signes et répertoire	FR/FR
M-1 : Bilel semble avoir une confusion entre la somme infinie de termes de la suite et le comportement de la suite suivante $\lim_{n\to\infty} \frac{A}{n}$ avec A une constante ≠ 0.	Les interventions sont de nature sémantique (R2.1).	Raisonnement inductif. Rationalité empirique

Bilel (219) semble avoir des difficultés au niveau de la somme infinie des quantités infinitésimales. En fait, c'est le second obstacle épistémologique qui apparaît. Il faut noter que c'est la somme des encadrements locaux par simple produit de tous les produits; ce n'est pas la somme de longueurs des morceaux découpés. Il nous semble que le problème se pose, car les séries numériques ne sont pas encore abordées. Il s'agit d'une confusion entre la limite d'une suite qui converge vers 0 et la somme d'une infinité de termes de cette suite.

5.8 Huitième extrait

Après avoir faire émerger des encadrements de plus en plus fins dans le niveau M-1 et que les discussions aient amené à la formulation de procédures de plus en plus efficaces, un étudiant a demandé d'intervenir.

> 230 Marouene : Vous m'avez posé la question : pourquoi tu as fait le découpage en neuf parties? Dans la première situation et la deuxième situation, lorsqu'on a découpé en deux, les tiges ne sont pas des points matériels. Moi, j'ai fait ce choix parce que les morceaux de la tige vont être assimilés à des points matériels. On aura neuf points et on fait la somme, on trouve la valeur exacte. [Il fait un petit intervalle entre son pouce et son index sur le schéma du barreau au tableau].
>
> 231 Sana : Réellement lorsqu'on découpe en 9 on va avoir la même masse que la masse ponctuelle. Physiquement, il voit que le découpage est très petit et chaque partie s'approche d'un point matériel, mais mathématiquement, il n'est pas le cas. Plus qu'on découpe plus qu'on se rapproche de la valeur réelle.
>
> 232 Marouene : Par le découpage en neuf, on va rendre les parties des points matériels et on fait des calculs exacts!

Tableau 10. Analyse du huitième extrait

Nature et fonction/milieu	Signes et répertoire	FR/TR
M-2 : Retour vers le milieu M-2. Moyen heuristique : E106 essaie d'expliquer le raisonnement de son collègue (R1.1).	Marouene prend des décisions à partir du milieu matériel : la masse du barreau qui est neuf fois plus grande que la masse ponctuelle représente une icône ou un indice dépendant du contexte (R2.1). Utilisation ponctuelle des connaissances anciennes qui ne sont pas dans leur contexte, ce qui produit un raisonnement erroné (R3.1). Sana (231) essaie d'expliquer la justification de son collègue en se basant sur la différence entre le contexte mathématique/physique. Elle considère que les arguments de nature physique ne s'appliquent pas pour « les mathématiques ». Chaque contexte possède ses arguments spécifiques qui ne sont pas valides dans l'autre contexte : explications et justifications visant à	Argumentation pragmatique/ raisonnement déductif.

	définir les règles du jeu de la preuve et leurs usages (R1.3).

L'idée de Marouene rebondit de nouveau. En fait, il s'agit d'un conflit cognitif en lien avec des connaissances physiques et qui peut poser des obstacles épistémologiques ultérieurement. Du point de vue de la rationalité mobilisée, il s'agit de la rationalité empirique qui possède un ordre de vérité limité. Cette rationalité est valide sous certaines conditions, mais elle ne se généralise pas. En fait, Sana a utilisé « des petits morceaux » et « des tiges assimilées à des points matériels » pour parler des quantités différentielles. Outre les explications verbales, Marouene a également utilisé des gestes pour démontrer une petite dissection de la ligne en faisant un petit intervalle entre son pouce et son index sur le schéma du barreau au tableau. Les étudiants construisent la notion abstraite de différentiels en termes d'objets concrets tels qu'une petite partie d'une quantité. Il faut dire qu'une petite quantité fait référence à une petite partie d'un objet physique. Cette métaphore (icône) d'objet est souvent évoquée lorsqu'il s'agit du recours à une petite quantité d'un ensemble plus grand. Elle permet aux étudiants d'associer les notions mathématiques complexes à leur connaissance expérimentale des objets physiques.

5.9 Neuvième extrait

247 Marouene : Pour neuf, on trouve la même masse que la masse ponctuelle.

248 P : Mais deux kilos, la tige n'est pas ponctuelle.

250 P : Quelqu'un passe au tableau pour nous faire un résumé.

251 Dhia : Madame, si on divise infiniment jusqu'à obtenir des morceaux très fins de longueurs négligeables, c'est comme si on a de petites lignes ou segments et on fait la somme des forces sans chercher un encadrement parce que le barreau est très petit de façon qu'on peut confondre F min et F max de chaque petit morceau avec la force exercée par le petit barreau.

Tableau 11. Analyse du neuvième extrait

Nature et fonction/milieu	Signes et répertoire	FR/TR
M-1 : Reformulation et résumé des étapes précédentes, ce qui va permettre l'entrée au milieu M0. Apparition d'une nouvelle conception.	Cette reformulation est demandée pour maintenir l'adidacticité de la situation.	Raisonnement inductif. Rationalité empirique

« Heureusement » que Marouene insiste sur son idée, peut-être que beaucoup pensent comme lui et ne peuvent s'associer pour dire qu'ils refusent la « fausse complexité » dans laquelle l'organisation du débat tend à les amener! En fait, il nous semble que le problème crucial est « bien » posé par Dhia (251), mais le paradoxe reste caché : il semble échapper à l'enseignante.

La théorie de l'intégrale dont l'organisation a été conduite par l'enseignante a pu in fine opérationnaliser tout ce travail d'approche très concret, mais aussi très laborieux d'une réalité insaisissable. En reliant dans la suite du cours ce processus d'approximation et de passage à la limite au calcul d'une primitive, on accède à ce processus hautement signifiant auquel toutes les sciences ont recours pour évaluer leurs grandeurs insaisissables, le détour intégral devient rationnellement (et non pas magiquement) opérationnel.

Par un simple calcul de primitive on obtient une estimation dont la théorie nous assure qu'elle est l'évaluation rigoureusement exacte du phénomène étudié (à l'issue d'un processus très coûteux en calculs si on devait les effectuer). Pour affiner nos approximations, on a dû augmenter le nombre d'erreurs commises à chaque étape et dans les cas favorables (fonctions intégrables) on est paradoxalement parvenu à faire diminuer leur somme jusqu'à la faire disparaître à la limite. Ensuite, quand la théorie sera achevée, un unique calcul de primitive nous fournira une estimation qui ne comporte plus aucune erreur.

Ce fait remarquable qui donne toute son importance au TFA et explique une partie de la synergie naturelle math-sciences appliquées n'est actuellement perçu dans sa signification propre que par une infime minorité des étudiants scientifiques, quel que soit leur niveau d'études. Ceci est le bas, bien qu'ils aient été par ailleurs largement entraînés à pratiquer une heuristique des primitives qui ne servira probablement qu'à une infime minorité d'entre eux par la suite. (Nombreux sont ceux de tout niveau qui pensent après coup que par la procédure intégrale le résultat final demeure un calcul approché dont ils ignorent bien sûr la précision).

Conclusion

Les débats, dont l'organisation a été conduite par l'enseignante d'une façon sympathique en respectant l'expression des idées qui se sont formées dans une rationalité pragmatique (les seules idées qu'on peut imaginer et produire seul spontanément) ont trouvé des difficultés à passer rationnellement et collectivement du pragmatique vers le théorique. Cette position didactique (consistant à ne pas perdre l'adidacticité de la situation) n'a pas permis à l'enseignante de mieux structurer les débats et de marquer des étapes dans l'évolution des interventions erratiques, ou même de ne pas enseigner en acte une prise de conscience des savoirs « métamathématiques » qu'on vient de côtoyer. Il aurait fallu regarder après coup ce qui a été décisif à certains moments cruciaux dans l'action scientifique menée ensemble, en particulier comprendre en quoi l'apparition de telle ou telle contradiction, de tel échec qu'on a pris en compte au lieu de le « glisser sous le tapis » a obligé le groupe à prendre une distance salutaire et à faire un saut cognitif pour nous faire sortir d'une appréhension trop rustre de la situation.

À la lecture de la transcription des échanges, on s'aperçoit qu'à de nombreux moments les étudiants abordent les vrais obstacles, mais que ces approches à la fois très pertinentes et très naïves, qui sont en train d'être timidement abordées par quelques-uns seulement, mettent par contre l'enseignante en grand danger de perte d'adidacticité, car elle ne dispose pas des outils « didactiques » nécessaires qui lui permettraient de garder son rôle d'enseigner en partageant à la classe entière les transitions de rationalité de l'étude.

Or, nous pensons que c'est la prise de conscience par tous de sa propre évolution rationnelle qui démontrera à chacun ce que tout le monde peut commencer à comprendre sur le fond. En fait, si nous construisons de façon erratique, des procédures puissantes et complexes comme celle de l'intégrale, personne ne peut les inventer « ex nihilo ». C'est l'exemple même d'adaptation progressive d'une volonté pratique d'évaluer ce qui est présent dans la réalité envisagée. En particulier, la façon dont chaque élément du barreau pourra être appréhendé comme élément constitutif de la force globale F est bien cachée.

Un tel « trésor d'idées précieuses » ne livre son sens profond que si on lui applique cette volonté scientifique de ne pas tricher avec la réalité quand la complexité de « la réalité » se dévoile en s'opposant à toutes nos tentatives de simplifications immédiates.

Il faut donc que les étudiants puissent comprendre comment on pourrait s'y prendre pour déjouer le piège du « deus ex machina » du centre de gravité. En effet, en quoi l'étude de cette simplification qui ne résiste pas à l'étude rationnelle d'un morceau de barreau peut-elle nous aider à prendre conscience que finalement « ce que l'on souhaite tous à tout prix en découpant » c'est de trouver un morceau de barreau pour lequel la force exercée soit directement calculable.

Il s'agit alors de prendre conscience du paradoxe de l'intention infinitésimale (que peu de sujets bien instruits de l'intégrale maîtrisent) : avec les outils de calcul dont nous disposons, pour faire un calcul exact, il faudrait ponctualiser les bouts de barreau. Puisque « ça bouge tout le temps », il faudrait, pour empêcher de varier, prendre un morceau de barreau de longueur nulle, donc sans masse et alors…. Que vaut une somme infinie de quantités toutes nulles!

La prise de conscience douloureuse qu'aucun calcul exact n'est directement possible à partir des renseignements qui nous ont été fournis pour mathématiser la situation nous semble nécessaire. En effet, c'est elle qui nous contraindra à aller vers ce à quoi notre rationalité naturelle répugne : « majorer/minorer », puis passer, à la limite, sur des résultats qui ne sont jamais exacts en espérant néanmoins arriver à un résultat final exact, mais en un sens inaccessible, c'est-à-dire au niveau « méta ». Ainsi, pour être certain de ne pas dire n'importe quoi, il faut accepter de faire un détour par des approximations de plus en plus nombreuses qu'on poursuit indéfiniment alors qu'en voulant donner une estimation directe, ce qu'on obtiendra sera illusoirement exact, car ne reposant en fait sur rien de certain.

Notre étude a examiné le processus du raisonnement que les étudiants évoquent pour résoudre un problème physique qui revient à une problématique d'intégration. Le groupe d'étudiants n'a pas initialement appris à mathématiser ses idées naïves. Une question qui se pose alors est : comment accéder de cette façon au niveau théorique si on n'a pas initialement appris à traduire ses idées intéressantes en conjectures que l'on tentera ensuite d'améliorer, de « réparer » ensemble quand elles s'avèrent trop irréalistes et fausses?

Références

Akrouti, I. (2020). Conceptions de l'intégrale de Riemann des étudiants en Classe préparatoire. Dans T. Hausberger, M. Bosch et F. Chelloughi (dir.), *Proceedings of the 3rd conference of INDRUM* (p. 53-62). University of Carthage and INDRUM.

Akrouti, I. (2021a). Que représente le concept d'intégrale définie pour les étudiants à l'entrée à l'université? *Web of Conferences*, 39(01010). https://doi.org/10.1051/itmconf/20213901010

Akrouti, I. (2021b). *L'enseignement de l'intégral à l'entrée à l'université en Tunisie. Quelle approche? Quelle alternative?* [thèse, Université Virtuelle de Tunis (ISEFC)].

Allard, C. (2015). *Étude du processus d'institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions*. [thèse de doctorat, Université Paris Diderot]. TEL. https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01249807/document

Bloch, I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en Première scientifique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(2), 135-193.

Bloch, I. (2000). *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université* [thèse de doctorat, Université Bordeaux I]. TEL. https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01222400/document

Bloch, I. (2006). *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur* [note de synthèse pour une habilitation à diriger des recherches, Université Paris 7]. TEL. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00012153

Bloch, I. et Gibel, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en didactique des mathématiques, 31*(2), 191-228.

Bloch, I., Chiocca, C.-M., Job, P. et Schneider, M. (2007) Du numérique aux limites : quelle forme prend la transition secondaire/supérieur dans le champ des nombres et de l'analyse? Dans A. Rouchier et I. Bloch (dir.), *Perspectives en didactique des mathématiques, Actes de la XIIIème école d'été (Cédérom).* Éditions La Pensée sauvage.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Éditions la Pensée sauvage.

Brousseau, G. et Gibel, P. (2005). Didactical handling of students' reasoning processes in problem solving situations. *Educational Studies in Mathematics*, *59*, 13-58. https://doi.org/10.1007/0-387-30451-7_2

Carnot, L. (1839). *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*. Bachelier.

Decroix, A. A. et Rogalski, M. (2013). L'intégrale, de la physique aux mathématiques. Dans F. Vandebrouck (dir.), *La réforme des programmes du lycée et alors ?Actes de Colloque IREM* (p. 157-170). IREM.

de Freycinet, M. C. (1860). *De l'analyse infinitésimale. Étude sur la métaphysique du haut calcul*. Mallet-Bachelier.

Dias, T. (2008). *La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage* [thèse de doctorat, Université Lyon 1]. TEL. https://theses.hal.science/tel-00635724/document

diSessa, A. A. et Sherin, B. L. (1998). What changes in conceptual change? *International Journal of Science Education*, *20*(10), 1155-1191. http://dx.doi.org/10.1080/0950069980201002

Ghedamsi, I. (2017). A micro-model of didactical variables to explore the mathematical organization of complex numbers at upper secondary level. Dans T. Dooley et G. Gueudet (dir.), *Proceedings of the Tenth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 10*) (p. 2065-2072). DCU Institute of Education.

Gibel, P. (2008). Analyse en théorie des situations d'une séquence destinée à développer les pratiques du raisonnement en classe de mathématiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 13*, 5-39.

Gibel, P. (2018). *Élaboration et usages d'un modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques* [note de synthèse pour une habilitation à diriger des recherches, Université de Pau et des Pays de l'Adour]. TEL. https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01919188

González-Martín, A., Bloch, I., Durand-Guerrier, V. et Maschietto, M. (2014). Didactic situations and didactical engineering in university mathematics: cases from the study of Calculus and proof. *Research in Mathematics Education*, *16*(2), 117-134.

Grenier, D., Legrand, M. et Richard, F. (1986). Une séquence d'enseignement sur l'intégrale en DEUG A première année, *Cahiers de didactique des mathématiques, 22*.

Haddad, S. (2006). *Enseignement de l'intégrale entre la classe terminale et la première année de l'enseignement supérieur* [mémoire de maitrise inédit]. Université de Tunis.

Haddad, S. (2012). *L'enseignement de l'intégrale en classe terminale de l'enseignement tunisien* [thèse de doctorat, Université Virtuelle de Tunis (ISEFC) et Université Paris Diderot (Paris 7)]. TEL. https://theses.hal.science/tel-01087840

Hu, D. (2010). *Understanding introductory students' application of integrals in physics from multiple perspectives* [thèse de doctorat, Kansas State University]. K-Rex. https://krex.k-state.edu/dspace/handle/2097/16190

Hu, D. et Rebello, N. S. (2013). Understanding student use of differentials in physics integration problems. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research,* 9, 020108. http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.9.020108

Jones, S. R. (2015). Areas, anti-derivatives, and adding up pieces: Definite integrals in pure mathematics and applied science contexts. *International Journal of*

Mathematical Education in Science and Technology, 46(5), 721-736. http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2014.1001454 .

Kouropatov, A. et Dreyfus, T. (2012). The idea of accumulation as a core concept for an integral calculus curriculum for high school. Dans S. J. Cho (dir.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (p. 2740-2749). ICME.

Kouropatov, A. et Dreyfus, T. (2013a). Constructing the integral concept on the basis of the idea of accumulation: Suggestion for a high school curriculum. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44, 641-651.

Kouropatov, A. et Dreyfus, T. (2013b). Constructing the Fundamental Theorem of Calculus. Dans A. Heinze et A. Lind Meier (dir.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Methodology and Methods in Mathematics Education* (p. 201-209). IGPME.

Kouropatov, A. et Dreyfus, T. (2014). Learning the integral concept by constructing knowledge about accumulation. *ZDM Mathematics Education, 46*, 533–548. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0571-5

Kouropatov, A. (2015). *The Integral Concept in High School: Constructing Knowledge about Accumulation*. [Thèse de doctorat, Université de Tel Aviv]. Macam. http://library.macam.ac.il/study/pdf_files/d13002.pdf

Lalaude-Labayle, M. (2016). *L'enseignement de l'algèbre au niveau universitaire. Étude épistémologique et didactique*. [Thèse de doctorat, Université de Pau et des Pays de l'Adour]. TEL. https://theses.hal.science/tel-01419021/document

Lecorre, T. (2016). Rationality and concept of limit. Dans E. Nardi, C. Winsløw et T. Hausberger (dir.), *Proceedings of the First Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (p. 83-92). Université de Montpellier.

Legrand, M. (1990). Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *3*(9), 365-406.

Margolinas, C. (1994). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. Dans C. Margolinas (dir.), *Les débats de didactique des mathématiques* (p. 89-102). Éditions la Pensée sauvage.

Margolinas, C. (1998). Étude de situations didactiques ordinaires à l'aide du concept de milieu : détermination d'une situation du professeur. *Actes de la 8e École d'été de didactique des mathématiques,* 35-43.

Meredith, D. C. et Marrongelle, K. A. (2008). How students use mathematical resources in an electrostatics context. *American Journal of Physics, 76*, 570-578.

Moreno-Armella, L. (2014). An essential tension in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 46*, 621–633. http://dx.doi.org/10.1007%2Fs11858-014-0580-4

Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(1), 1-18.

Otte, M. (2006). Proof and explanation from a semiotical point of view. *Revista Latino-Americana de Matematica, Numero especial*, 23-43.

Rogalski, M., Pouyanne, N. et Robert, A. (2001). *Carrefours entre analyse, algèbre, géométrie*. Ellipses.

Rogalski, M. (2010). *Le rôle des mathématiques dans la mise en équation différentielle en physique : les procédures de l'accroissement différentiel dans les deux disciplines*. Laboratoire de Didactique André Revuz.

Rogalski, M. (2013). Quelques compléments à l'article de Hervé Quéffelec sur l'enseignement de l'intégration et de la mesure de Lebesgue : faire simple et pédagogique? *Gazette des mathématiciens*, *137*, 31- 42.

Rogalski, M. (2018). De quelques difficultés de l'interdisciplinarité. Dans M. Abboud (dir.) *Actes du colloque EMF 2018 Paris* (p. 451-459) .IREM de Paris.

Sealy, V. (2014). A framework for characterizing student understanding of Riemann sums and definite integrals. *The Journal of Mathematical Behavior*, 33(1), 230–245.

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 229-274.

Wallace, C. S et Chasteen, S. V. (2010). Upper-division students' difficulties with Ampère's law. *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.*, *6,* 020115.