



Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie : analyse du savoir à enseigner relatif au développement de la pensée algébrique dans les manuels de 6^e année primaire

Sonia BEN NEJMA

Université de Carthage – Tunisie

sonia.bennejma@fsb.u-carthage.tn

Saïd ABOUHANIFA

CRMEF Casablanca-Settat – Maroc

saidabouhanifa@yahoo.fr

Eugène OKÉ

Université d'Abomey-Calavi – Bénin

eugene.oke@imsp-uac.org

Ridha NAJAR

Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue

ridha.najar@uqat.ca

Hassane SQUALLI

Université de Sherbrooke

hassane.squalli@usherbrooke.ca

Adolphe ADIHOUE

Université de Sherbrooke

adolphe.adihou@usherbrooke.ca

Résumé : Cet article présente des résultats relatifs au développement de la pensée algébrique à la fin du cycle primaire au Bénin, au Maroc et en Tunisie à partir d'une analyse des programmes et des manuels officiels propres à chaque système éducatif. Cette recherche en cours s'inscrit dans le cadre du programme international APPRENDRE et du projet intitulé : « Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie. État des lieux,

Revue [québécoise](#) de didactique des mathématiques, 2022, Numéro thématique 2 (Tome 1), p. 59-95.

comparaison et perspectives de l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre ». L'analyse menée se base sur le Modèle épistémologique de référence de la pensée algébrique (MRPA) (Squalli et al., 2019) et s'appuie sur les travaux développés dans le cadre de l'Observatoire international de la pensée algébrique (OIPA). Cette étude vise à analyser les praxéologies mathématiques développées dans les manuels et à identifier le potentiel des tâches proposées aux élèves pour développer la pensée algébrique avant même l'introduction du symbolisme algébrique. Ces analyses nous ont permis de lever un coin de voile sur la manière dont les programmes de chacun de ces pays préparent les élèves à passer du cycle de l'enseignement primaire vers le cycle de l'enseignement secondaire à propos de l'algèbre.

Mots clés : savoir à enseigner, arithmétique/algèbre, pensée algébrique, modèle épistémologique de référence, manuels.

The primary to secondary school transition in Benin, Morocco and Tunisia: analysis of the knowledge to teach concerning the development of algebraic thinking in 6th grade primary school textbooks

Abstract: This article focuses on the development of algebraic thinking at the end of primary school in Benin, Morocco, and Tunisia, based on an analysis of the official curricula and textbooks of each education system. This ongoing research is part of the international APPRENDRE program, and the project entitled: "The primary-secondary school transition in Bénin, Maroc and Tunisia. State of play, comparison, and perspectives on the teaching of arithmetic and algebra." Our research was based on the epistemological reference model of algebraic thinking (MRPA, Squalli et al., 2019) and draws on research developed by the International Observatory of Algebraic Thinking (OIPA). The study aims to analyze the mathematical praxeologies developed in textbooks in order to identify the potential of tasks to develop algebraic thinking before algebraic symbolism is even introduced. These analyses allowed us to lift a corner of the veil on how the curricula in each of these countries prepare students for the transition from late primary to secondary school in relation to algebra.

Keywords: knowledge to teach, arithmetic / algebra, algebraic thinking, epistemological reference model, textbooks.

Introduction

Cette recherche s'inscrit dans le cadre du projet international « Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie. État des lieux, comparaison et perspectives de l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre » du programme APPRENDRE (Appui à la professionnalisation des pratiques enseignantes et au développement de ressources). Ce projet (Najar et al., 2021) vise à analyser les conditions et les contraintes liées au passage de l'arithmétique enseignée à l'école primaire vers l'algèbre dispensée au collège, et plus particulièrement la manière dont le curriculum de chaque pays prépare les élèves au développement de la pensée algébrique avant l'introduction du formalisme conventionnel. Dans le

cadre de cet article, nous présentons les principaux résultats relatifs aux programmes et manuels de la dernière année du primaire (6^e année du primaire) pour les trois pays concernés par ce projet. Les fondements épistémologiques de cette étude font référence au courant Early Algebra (Kieran et al., 2016) qui vise à offrir aux élèves des opportunités pour soutenir la transition de l'arithmétique à l'algèbre dès l'école primaire et le début du collège. Il s'agit, plus précisément, de caractériser cette approche d'enseignement à partir du potentiel des curricula du Bénin, du Maroc et de la Tunisie à développer la pensée algébrique par le biais de situations d'apprentissage proposées. Ces analyses s'inscrivent dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1997) en articulation avec le modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique (Squalli et al., 2019, Najar et al., 2021) et développé, à son tour, sur la base de certains travaux en didactique de l'algèbre (Bednarz et al., 1996; Grugeon, 1997; Lins et Kaput, 2004; Carraher et Schliemann, 2007; Radford, 2014, 2018). Dans la première partie de cet article, nous présentons les cadres épistémologique et théorique qui nous ont servi de référence à cette étude. La seconde partie porte sur la description de la méthodologie d'analyse suivie pour analyser les manuels scolaires de la 6^e année du primaire, pour les trois contextes institutionnels. La troisième partie est subdivisée en trois sous-parties, chacune d'elle présentant une brève description du contexte d'étude, corpus des données à analyser et système d'enseignement dans chaque pays. Finalement, nous exposons les principaux résultats relatifs à l'analyse des praxéologies mathématiques développées autour de la pensée algébrique. Celle-ci est illustrée par des extraits des manuels relatifs à chaque contexte. Nous présentons ensuite la conclusion de cette étude.

1. Problématique

L'enjeu de l'enseignement des mathématiques au Bénin, Maroc et Tunisie, à ce moment charnière de la scolarité obligatoire primaire/collège réside dans le passage d'un mode arithmétique de pensée à un mode algébrique. Depuis longtemps, plusieurs chercheurs se sont penchés sur cette problématique et se sont focalisés sur les caractéristiques de cette transition conceptuelle d'un domaine à l'autre des mathématiques (Verschaffel et De Corte, 1996, Kieran, 2007) mettant en avant des obstacles qui peuvent être rencontrés par les élèves pour une entrée dans l'algèbre. Vergnaud (1986) évoque une double rupture épistémologique entre l'arithmétique à l'algèbre : d'un côté, une opposition des caractéristiques de la résolution arithmétique avec celles de la résolution algébrique, et de l'autre, une opposition des modes d'appréhension des écritures algébriques et numériques (statut du signe d'égalité, statut des lettres) ainsi que des modes de contrôle dans la transformation des écritures. Pour leur part, Filloy et Rojano (1989) évoquent

une coupure didactique le long de la ligne d'évolution d'une pensée arithmétique à une pensée algébrique.

Ces dernières années, le mouvement Early Algebra, fortement inspiré des travaux de Kaput (1998), a remis en question l'approche classique d'une rupture nécessaire dans l'approche d'enseignement de ces deux domaines pour proposer des perspectives de recherche curriculaires, notamment dans la formation initiale et continue des enseignants. Ce courant met l'accent sur le développement de la pensée algébrique dès les premières années du primaire sans recourir au langage formel de l'algèbre. Selon certains chercheurs (Kaput, 1998; Carraher et Schliemann, 2007; Squalli et al., 2011,) cette nouvelle approche ne doit pas être envisagée comme une préalgèbre, mais plutôt comme un moyen d'enrichir le savoir mathématique à enseigner en développant certains concepts (inconnue, variable, équation, égalité, variation, formule, fonction, etc.). Cette nouvelle approche semble intéresser les curricula de mathématiques du primaire et du collège de plusieurs pays. Ainsi, à la suite des standards du National Council of Teachers in Mathematics (NCTM) de 2000, les curricula en vigueur aux États-Unis proposent le développement de la pensée algébrique dès la maternelle et abordent les fonctions dans les classes du primaire. Cette tendance ne fait pas exception puisque, depuis les années 2000, nous assistons à des innovations dans les programmes de mathématiques pour certains pays, visant de manière explicite le développement précoce de la pensée algébrique. C'est le cas, par exemple, de toutes les provinces canadiennes, sauf le Québec, de plusieurs pays d'Asie (Chine, Singapour, Corée du Sud, etc.), de l'Australie, du Brésil, etc.

À l'instar du programme québécois, dans les programmes qui ne s'inscrivent pas explicitement dans Early Algebra le développement de la pensée algébrique n'est pas absent pour autant (Squalli et al., 2019). C'est dans cette visée que nous nous proposons de fonder une réflexion sur la nature des contenus à enseigner dans les trois pays concernés par ce projet en interrogeant cette dialectique arithmétique/algèbre à travers une analyse des programmes et des manuels du primaire (puis du collège) dans l'objectif de caractériser l'approche d'enseignement choisie dans chaque pays et son positionnement par rapport au courant de Early Algebra. Les travaux réalisés par l'Observatoire international de la pensée algébrique (OIPA) ont déjà abordé cette problématique dans plusieurs pays, par exemple Bronner et Larguier (2018) en France, en Belgique et au Canada. Pour notre part, nous explorons la manière dont les programmes de mathématiques de la fin du cycle primaire au Bénin, au Maroc et en Tunisie envisagent l'entrée dans l'algèbre à partir des situations d'apprentissage proposées. Nous nous limitons, dans le cadre de cet article, à la mettre à l'épreuve dans le curriculum de chaque pays et à dégager le potentiel d'éléments pertinents

pour développer la pensée algébrique avant l'introduction du symbolisme conventionnel. Ainsi, les questions de recherche qui se situent au cœur de notre problématique sont les suivantes :

Comment la dialectique arithmétique-algèbre est-elle envisagée dans chacun des contextes institutionnels (Bénin, Maroc, Tunisie)? Quelles sont les caractéristiques des situations d'apprentissages visant le développement de la pensée algébrique? Ces situations préparent-elles les élèves à l'algèbre dispensée au collège?

Nous commençons par caractériser les aspects d'ordre épistémologiques relatifs au développement de la pensée algébrique à partir d'une synthèse de travaux prenant en compte différentes approches de l'enseignement de l'algèbre et son rapport avec l'arithmétique.

2. La dialectique arithmétique/algèbre dans la scolarité obligatoire

Il ne s'agit pas dans cette partie de dresser un panorama des travaux existants à propos de la nature du travail algébrique, mais d'identifier quelques enjeux de l'enseignement de l'algèbre élémentaire à ce niveau scolaire. Pour chacun de ces enjeux, il s'agit de mettre en avant un certain nombre de points spécifiques à ce domaine qui sont susceptibles de nous renseigner sur la nature des rapports institutionnels développés aux objets de savoir algébriques, à l'entrée au collège. Ces rapports étant clivés entre l'élève et l'enseignant, ils répartissent les rôles, tâches et compétences respectifs de chacun dans l'institution. Nous avons fait le choix de prendre en compte, à partir de travaux en didactique de l'algèbre, certains aspects relatifs à l'enseignement de ce domaine d'étude.

Historiquement, l'arithmétique en tant que discipline mathématique a précédé l'algèbre, ce qui a longtemps influencé les programmes d'enseignement des mathématiques. Considérer l'arithmétique comme prérequis ou levier à l'apprentissage de l'algèbre a souvent été un argument de nature didactique renforçant la dialectique de l'ancien et du nouveau et permettant ainsi de créer, espérait-on, une certaine continuité dans l'enseignement des mathématiques. De nombreuses recherches ont été menées autour des continuités et des ruptures entre l'arithmétique et l'algèbre en vue d'une meilleure compréhension des enjeux institutionnels de l'enseignement de l'algèbre. La connaissance des perspectives d'enseignement de l'algèbre et des problématiques qu'elles peuvent poser permet d'avoir du recul par rapport aux choix des stratégies d'enseignement compte tenu de l'épistémologie du domaine et de l'histoire de son enseignement.

Fruit d'une revue de la littérature de recherche et d'une analyse d'épreuves, ce paragraphe expose certains travaux menés sur l'enseignement de l'algèbre (travaux anglo-saxons, travaux français...) qui témoignent d'une diversité d'entrées possibles dans la pensée algébrique, selon les choix curriculaires de

chaque contexte institutionnel (Ben Nejma, 2004, 2009, 2012, 2020; Coulange et al., 2012). Ces entrées se réalisent selon différentes perspectives d'enseignement évoquées dans les travaux de Bednarz et al. (1996):

L'introduction de l'algèbre élémentaire se réalise selon différentes approches : les règles de transformation et de résolution d'équations (l'enseignement actuel se réduit souvent à cette approche équationnelle), la résolution de problèmes ou de situations problèmes (qui, historiquement, a joué un rôle important dans le développement de l'algèbre et de son enseignement), la généralisation (suscitant l'intérêt de certains programmes), l'introduction plus récente des notions de variable et fonction (apparues bien plus tard historiquement et occupant une place importante dans certains curricula) et l'étude des structures algébriques (qui a marqué l'enseignement des mathématiques dans les années 1960). (Bednarz, et al., 1996, p. 96, traduction libre¹)

La transition institutionnelle primaire/collège est marquée par le problème du passage de l'arithmétique à l'algèbre. Des chercheurs ont distingué la pensée arithmétique (Verschaffel et De Corte, 1996) et la pensée algébrique (Kieran, 2007). La notion d'obstacle épistémologique a émergé dans les travaux de Vergnaud et al. (1988) « une rupture épistémologique importante avec l'arithmétique » (p. 189). L'entrée dans l'algèbre la plus familière est celle par les équations et par la démarche analytique via la mise en équations de problèmes divers. La lettre a alors prioritairement un statut d'inconnue et les objets traités en priorité sont les équations et les inéquations. Dans le mouvement de Early Algebra en vogue dans certains curricula (Russie, États-Unis, Brésil, Canada, etc.), fortement inspiré des travaux de Kaput (1998), cette approche classique est remise en question. Il ne s'agit pas d'une préalgèbre (Squalli, 2015), mais plutôt d'un moyen d'enrichir les contenus mathématiques dispensés au primaire dans le but de développer la pensée algébrique chez les élèves, en consolidant l'acquisition des concepts mathématiques (le concept d'opération, d'égalité, d'équation, de régularité, de formule, de propriété, de variable et de variation, entre autres). La lettre est alors envisagée comme un nombre généralisé et les objets privilégiés sont les formules, qui expriment les régularités. Ce courant de recherche met en avant deux approches complémentaires et interreliées, l'algèbre comme un ensemble

¹ The introduction of school algebra can take many different directions: the rules for transforming and solving equations (to which current teaching often reduces algebra), the solving of specific problems or classes of problems (which has played an important role historically in the development of Algebra and his teaching), the generalization of laws governing numbers (a very strong focus on certain curricula), the more recent introduction of the concepts of variable and function (which appeared much later historically and which occupy a position of growing importance of some programs), and the study of the algebraic structures (which marked the school curriculum in the 1960s under the influence of modern mathematics). (Bednarz et al., 1996, p. 96)

d'activités mathématiques (résolution de problèmes, étude de structures, modélisation, étude de relations fonctionnelles, etc.) et l'algèbre comme un mode de pensée (pensée algébrique), en tant que processus impliqués dans ce type d'activités. Ainsi, deux composantes essentielles de la pensée algébrique fondent cette approche (Squalli et al., 2020), la tendance à généraliser et la tendance à raisonner de manière analytique. Dans cet article, nous analysons les entrées possibles dans l'algèbre en référence au cadre théorique évoqué en se focalisant sur trois approches d'enseignement qui nous semblent à la fois complémentaires et interdépendantes : la généralisation, la résolution de problèmes et la modélisation.

2.1. L'approche généralisation

L'entrée familière de cette approche adoptée par certains curricula est de faire émerger les nombres généralisés comme préconcepts des variables et d'engager les pratiques scolaires dans l'utilisation du symbolisme pour une meilleure mémorisation des propriétés. En effet, comme le souligne Chevallard (1994) « la création du langage algébrique permet de dégager plus nettement la problématique d'étude du numérique, en la posant, sans l'opposer, à côté de la perspective calculatrice » (p. 75). L'utilisation du symbolisme en algèbre, et en particulier les lettres qui désignent des quantités connues ou inconnues, permet de conserver une trace écrite des opérations réalisées et même de mettre au jour de nouvelles connaissances sur l'objet d'étude. L'algèbre utilise ainsi pleinement la valeur « monstrative » de l'expression, contrairement à l'arithmétique qui n'envisage que l'aspect calculatoire du langage numérique. Cette perspective d'enseignement permet ainsi d'engager les élèves dans la rationalité algébrique à travers des situations numériques ou figurales, en particulier par la recherche de « patterns ». Cependant, cette valeur monstrative d'une expression n'est pas une caractéristique de l'expression, mais une propriété émergente chez le sujet, d'où la primauté de la pensée sur la nature de l'ostensif et du symbolisme. Dans ce sens, les travaux réalisés dans le courant Early Algebra (Kieran et al., 2016) mettent en avant la généralisation comme une composante essentielle de la pensée algébrique par l'étude des régularités et des relations. Dans cette perspective, les élèves reconnaissent, décrivent et généralisent des régularités via des situations réelles et sont amenés à construire des modèles mathématiques qui leur permettent de prévoir leurs évolutions. Ainsi, contrairement aux approches d'enseignement classiques, l'objectif n'est pas d'introduire le symbolisme littéral pour donner du sens aux concepts ou faire émerger des propriétés, mais plutôt de développer la généralisation algébrique (généraliser, formuler et justifier les généralisations) en tant que composante essentielle de la pensée algébrique. Bien que la présence d'opérations (lois de composition interne ou externe, binaire ou n-aires) en nombre

fini soit essentielle et assure le caractère algébrique de l'activité, la présence des lettres n'y est pas indispensable.

2.2 L'approche résolution de problèmes

Dans la perspective d'enseignement classique de l'algèbre, cette approche vise à engager les pratiques scolaires dans la mise en équation et la résolution des équations et de faire émerger les concepts d'inconnue et de raisonnement algébrique. L'enjeu principal pour accéder avec celle-ci au raisonnement algébrique est de permettre de dépasser la rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre. Dans la perspective de Early Algebra que nous adoptons dans cette recherche, l'enjeu essentiel de cette approche est d'amener les élèves à raisonner de manière analytique, ce qui diffère d'apprendre à résoudre des équations selon une démarche algébrique. Ainsi, l'objet est le développement d'une pensée algébrique, assez tôt en faisant progresser les moyens sémiotiques dont dispose l'élève dans un contexte de résolution de problèmes. Plusieurs différences fondamentales entre les démarches de résolution de problèmes en arithmétique et en algèbre sont mises en avant. En arithmétique, on part de ce que l'on connaît et l'on avance vers ce que l'on recherche, en progressant dans le connu. Cette démarche relève de la synthèse (Gascón, 1995). En algèbre, des lettres étant choisies pour désigner les nombres cherchés, des relations sont établies entre le connu et l'inconnu, mis sur le même plan. Un traitement formel de ces relations conduit ensuite au résultat cherché. Cette démarche relève de l'analyse et suppose un changement profond des modes de pensée. En outre, dans l'approche classique de l'enseignement de l'algèbre lors d'une résolution arithmétique, les stratégies utilisées sont souvent liées au contexte de la situation évoquée par l'énoncé alors que lors d'une résolution algébrique, la légitimité du traitement formel des relations produites s'appuie sur des règles de calcul algébrique, qui n'ont plus forcément de sens par rapport au contexte de départ, et les calculs sont alors contrôlés par le sens interne des écritures algébriques. Dans la perspective de Early Algebra, cette vision des choses est remise en question, car la démarche algébrique ne se définit pas par l'utilisation du formalisme du langage algébrique conventionnel, l'élève peut raisonner analytiquement tout en restant attaché au contexte. Par exemple, dans les problèmes de partage inéquitable, il peut utiliser la notion de part, liée au contexte, comme substitut à l'inconnue et opérer sur elle pour former l'équation et la résoudre. Dans cette perspective, le développement du raisonnement analytique y constitue une composante essentielle de cette approche dès le primaire, et l'introduction de la mise en équation dans l'enseignement classique peut venir bloquer ce type de raisonnements.

De nombreux travaux ont mis en évidence qu'entre la catégorie des raisonnements non analytiques (degré d'analyticité nul) et celle des raisonnements analytiques

(degré d'analyticité optimal) il existe une autre catégorie de raisonnements riches sur le plan de la pensée mathématique, mais qui ne peuvent être classés comme analytiques ou non analytiques (degré d'analyticité non nul mais non optimal). Nous pouvons citer les travaux de Adihou et al., (2020) ainsi que ceux de Squalli et al., (2020).

2.3 L'approche modélisation

Chevallard (1989) propose une théorisation de l'activité mathématique, à l'aide de la notion de modélisation, en considérant que l'activité mathématique consiste à modéliser des systèmes qui peuvent être aussi bien mathématiques qu'extramathématique (physique, chimie, biologie, économie, démographie, etc.). En effet, le terme «mathématisé» désigne, selon l'auteur, le système mathématique que l'on va modéliser, et le terme «mathématique» pour parler du modèle que l'on fabrique. Des exemples de projets d'enseignement ont été construits en s'appuyant sur cette notion de modélisation par Gascón (1995), qui permettent de montrer que la résolution de problèmes, dont on fait souvent l'essentiel de l'activité mathématique, n'est qu'un aspect de l'activité de modélisation (et n'est donc qu'un aspect de l'activité mathématique). Dans le cadre de cette approche par la modélisation, l'objectif de l'activité mathématique est de produire des connaissances sur des systèmes (mathématiques ou extramathématiques) en construisant des modèles mathématiques de ces systèmes. Selon Gascón (1995), les modèles mathématiques ne sont pas ici le point de départ ni le but de l'étude; ils sont des outils de production de connaissances sur les systèmes modélisés. Dans cette perspective d'enseignement, une grande place est accordée à la flexibilité entre les registres de représentations sémiotiques et les cadres mathématiques. Cette approche est à la base de travaux visant une caractérisation des problèmes qui requièrent une modélisation algébrique (Gascón, 1995; Bednarz et Janvier, 1996; Squalli et al., 2020; Ben Nejma, 2021). Ainsi l'une des principales difficultés à mettre en place cet enseignement est d'arriver, à travers des situations appropriées, à faire distinguer par les élèves le sens de l'inconnue, la variable, le paramètre, la formule, etc., avant même l'introduction du symbolisme algébrique.

Ces difficultés sont clairement mises en évidence par l'auteur à travers une analyse du sens donné par les élèves aux représentations symboliques et aux diverses notations sur laquelle se base cette modélisation. Les distinctions qu'il fait entre formule, équation, inconnue, variable, indéterminée, nombre polyvalent dans une expression symbolique permet de mieux situer les différentes approches de l'algèbre, rappelons que ces distinctions ne peuvent être déterminées a priori mais qu'elles sont essentiellement liés à l'activité de l'élève. (Bednarz et al., 1996, p. 10, traduction libre²)

Selon ce point de vue, Early Algebra vise donc à avoir une vision plus large que cette arithmétique généralisée qui remplace pratiquement les nombres par les lettres lors de l'enseignement de l'algèbre. C'est également selon ce point de vue que nous abordons cette recherche à travers une analyse des problèmes proposés à la transition primaire/collège dans ces trois pays.

3. Cadre théorique

La recherche que nous envisageons repose sur des cadres conceptuels de la didactique des mathématiques basée sur la théorie anthropologique du didactique et la proposition d'un modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique pour caractériser l'activité mathématique.

3.1 La notion de praxéologie

La théorie anthropologique du didactique (TAD) permet de modéliser toute pratique humaine ou sociale en termes de praxéologies ou organisations praxéologiques (Chevallard, 1989). Celle-ci permet de décrire et d'analyser toute activité en la décomposant en un quadruplet (tâche, technique, technologie et théorie). Selon ce modèle, les pratiques institutionnelles peuvent être analysées par un découpage en un système de tâches (t) appartenant à des types de tâches (T) (Bosch et Chevallard, 1999). Toute tâche t est accomplie au moyen d'une technique. Chaque technique est justifiée à son tour par une technologie. Celle-ci correspond à un discours rationnel qui permet d'expliquer la technique. Finalement, toute technologie repose elle-même sur les fondements d'une théorie (Chevallard, 1990). Cette décomposition en praxéologies permet de modéliser l'activité mathématique pour en favoriser l'analyse. Par ailleurs, Chevallard (2002) identifie des niveaux de codétermination mathématiques selon les praxéologies à étudier. Un complexe de techniques, de technologies et de théories organisées autour d'un type de tâches

² These difficulties are clearly shown by the author through an analysis of the meaning's students give to symbolic representations and various notations on which this modeling is based. The distinctions he makes among formula, equation, unknown, variable, indeterminate value, and polyvalent noun in a symbolic expression help us to better situate the various approaches to algebra, reminding us that these distinctions cannot be determined a priori but that they are essentially linked to the student's activity. (Bednarz et al., 1996, p. 10)

forme une organisation mathématique ponctuelle (ou praxéologie ponctuelle). L'amalgamation de plusieurs praxéologies ponctuelles créera une praxéologie locale, régionale ou globale selon que l'élément amalgamant est, respectivement, la technologie, la théorie ou la position institutionnelle considérée. Celles-ci lorsqu'elles se regroupent autour d'une technologique déterminée, elles sont nommées praxéologies locales qui, à leur tour, lorsqu'elles font appel à une même théorie, sont qualifiées de praxéologies régionales. Ainsi, une organisation praxéologique globale est par l'agrégation de plusieurs organisations régionales correspondant à plusieurs théories. Dans le contexte de cette étude, cette modélisation est exploitée dans le cadre du développement de la pensée algébrique pour analyser les praxéologies développées à la fin du cycle primaire dans les trois institutions.

3.2 Le modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique pour caractériser l'activité mathématique

Le modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique (MPRPA) (Najar et al., 2021) assez proche des modèles épistémologiques présentés par certains travaux (Bronner et Larguier, 2018; Pilet et Grugeon-Allys, 2020), mais avec une organisation différente proposés dans les travaux de l'OIPA et s'appuyant sur des travaux de recherche en didactique de l'algèbre (Bednarz et al, 1996; Lins et Kaput 2004; Carraher et Schliemann, 2007; Radford, 2010, 2015; Squalli, 2015), servira de base de travail dans ce projet de recherche. Sa mise en fonctionnement nous permet d'analyser le savoir enseigné présente dans les manuels, en lien avec le développement de la pensée algébrique conçue comme une praxéologie mathématique globale. Dans ce modèle, celle-ci s'organise en trois praxéologies mathématiques régionales (PMR) : Généraliser (G), Modéliser (M) et Calculer (C). Chacune d'elle s'organise autour de praxéologies locales. La PMR « Généralisation » se décline en deux PML : généralisation de régularités et généralisation de règles, de formules, de loi et d'algorithmes. La PMR « Modélisation » se décline en trois PML : Modélisation de situations intra ou extramathématiques par des expressions numériques; Modélisation de situations intra ou extramathématiques par des équations et Modélisation de situations intra ou extramathématiques par des fonctions. La PMR « Calcul » se décline quant à elle en deux PML : Calcul sur des expressions numériques et Calcul sur des expressions algébriques. La figure 1 présente l'architecture du MRPAP investi dans le cadre de cette étude.

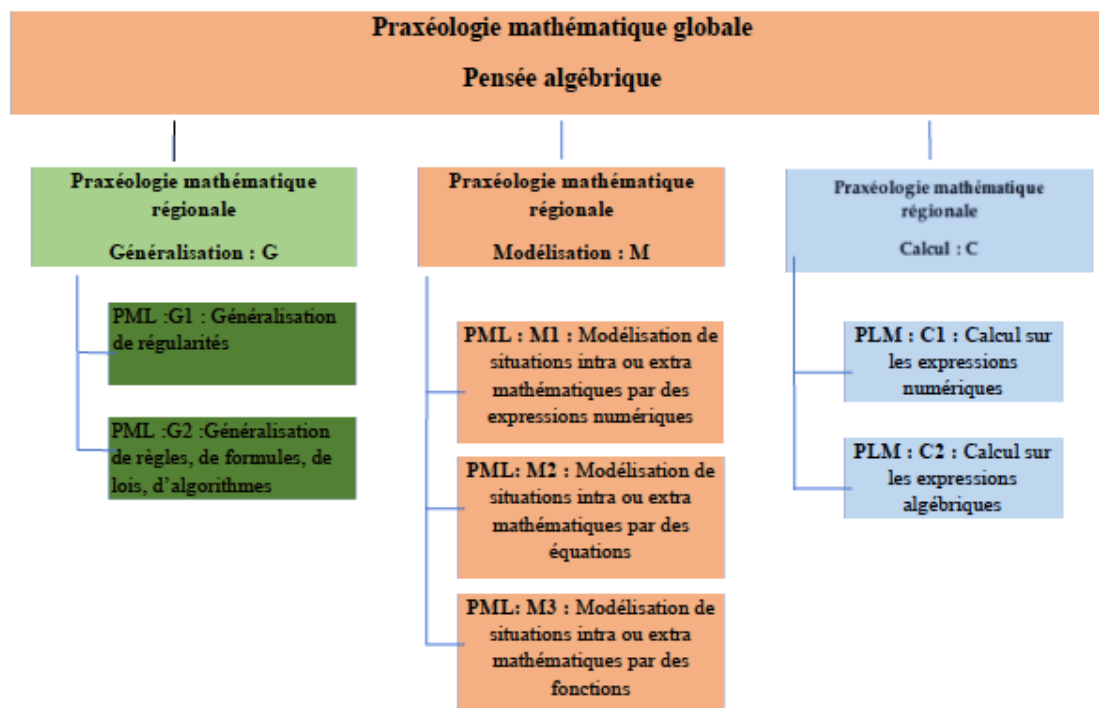


Figure 1. Architecture du MPRPA (Najar et al., 2021, p. 5)

4. Méthodologie

Pour étudier les problèmes de la transition arithmétique-algèbre dans les trois pays concernés par ce projet, nous avons fait l'hypothèse que l'analyse du développement de la pensée algébrique permet d'étudier la transition arithmétique-algèbre. En lien avec le premier objectif, la méthodologie d'analyse du curriculum officiel utilisée dans le réseau OIPA et présentée par Bronner et Larguier (2018) s'inscrit dans la théorie anthropologique du didactique que nous considérons comme pertinente pour étudier et comparer le développement de la pensée algébrique dans divers contextes géographiques, sociaux et politiques. Selon Bronner et Larguier (2018), les étapes de cette méthodologie d'analyse consistent à développer un modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique, repérer les instances et textes officiels et identifier les données à analyser et enfin analyser les éléments relatifs à l'organisation mathématique. Par ailleurs, la réflexion sur le développement de la pensée algébrique du point de vue de la dialectique arithmétique/algèbre soulève des réflexions quant aux techniques possibles à mettre en œuvre par les élèves, indépendamment des attentes institutionnelles, permettant d'accomplir un type de tâches donné. Squalli et al. (2020) instaurent alors la notion de potentiel algébrique d'un point de vue méthodologique pour répondre à cet objectif.

4.1 La notion de potentiel algébrique

La perspective du développement de la pensée algébrique dès l'école primaire soulève des questions de fond en rapport avec les pratiques institutionnelles et les pratiques scolaires pour résoudre les tâches qui leur sont proposées dans le cadre arithmétique ou algébrique. Squalli et al. (2020) partent du fait qu'une tâche potentiellement algébrique peut être résolue par une technique arithmétique ou une technique algébrique. Si l'énoncé de la tâche encourage l'utilisation d'une technique arithmétique, ou si la technique algébrique est hors de portée de l'élève, nous dirons que le degré du potentiel algébrique de la tâche est faible. Dans le cas opposé, si l'énoncé de la tâche encourage l'utilisation d'une technique algébrique, ou si la technique algébrique est accessible à l'élève, nous dirons que le degré du potentiel algébrique de la tâche est fort. Nous avons ainsi une échelle à trois degrés : nul (tâche purement arithmétique), faible et fort. Dans le corpus des tâches obtenu, il s'agit de distinguer entre les tâches potentiellement algébriques et les tâches qui ne le sont pas (purement arithmétiques).

Une tâche est purement arithmétique si les nombres qu'elle implique sont tous déterminés et si le calcul repose uniquement sur la qualité nombrante des nombres (leurs valeurs), si les opérations arithmétiques sont exécutées et, si le raisonnement porte toujours sur des nombres déterminés.

Nous illustrons par des exemples la nuance entre une tâche à potentiel nul et une tâche à potentiel faible :

4.1.1 Exemple de tâche à potentiel nul

Chaque année les parents de Said fêtent son anniversaire, ils préparent un gâteau avec autant de bougies que son âge. Ainsi, à sa première année de naissance, ils ont soufflé une bougie, puis deux à sa deuxième année, trois à sa troisième année et ainsi de suite. À la fin de la fête, la maman de Said lui dit : « depuis ta naissance, nous avons utilisé en tout 78 bougies » quel est l'âge de Said?

Une technique algébrique consiste à trouver la formule de la somme des nombres consécutifs de 1 à n : $n(n + 1) / 2$ et à résoudre l'équation : $n(n + 1) / 2 = 78$. Cette technique est hors de portée des élèves de 6^e année du primaire. Nous accordons donc un potentiel nul à cette tâche.

4.1.2 Exemple de tâche à potentiel faible

Un agriculteur est allé au souk avec un montant de 2 143,50 dhs dans son portefeuille. Il a vendu 17 moutons à 48 600 dhs et 5 chèvres à 3 775 dhs. Il a acheté deux vaches à 44 125 dhs et des fourrages à 785,75 dhs. Quel est le montant restant chez l'agriculteur?

Une modélisation numérique de ce problème est :

$$[2143,50 + (48\,600 + 3\,775)] - (44\,125 + 785,75)$$

Le problème étant connecté, c'est-à-dire qu'il existe un moyen d'obtenir la valeur de l'inconnue en opérant uniquement sur des nombres et des relations connus. Nous constatons dans ce cas qu'une technique arithmétique est facilement accessible et fait obstacle à toute technique algébrique. Nous accordons donc un potentiel faible à cette tâche.

Il nous a ainsi semblé important, à la lumière de la problématique, d'analyser le potentiel du développement de la pensée algébrique dans la transition primaire/collège dans ces trois pays (à l'Annexe 1 nous présentons les niveaux scolaires concernés par l'étude et les tranches d'âges selon les systèmes scolaires (France, Québec, Maroc, Bénin et Tunisie).

4.2 Corpus de données et méthodologie d'analyse

Le protocole d'analyse, mis en place pour mener les analyses des manuels scolaires et les guides de l'enseignant dans les trois pays, a porté sur l'identification des tâches mathématiques et leur caractérisation selon le MPRPA ainsi que le degré du potentiel algébrique des tâches proposées. Une tâche mathématique se présente, ici, sous forme d'un exercice, un problème ou une question isolée ou non. Elle peut être composée de sous-tâches ou faire partie d'un problème comportant plusieurs tâches. Il s'agit de faire d'abord une lecture des tâches présentes dans les manuels officiels des trois pays, pour la dernière année du cycle primaire. Nous sélectionnons, ensuite, les tâches qui relèvent des quatre domaines : nombres et calcul, grandeurs et mesures, géométrie et organisation et gestion de données faisant entre autres intervenir une ou plusieurs opérations de l'arithmétique. Nous menons une analyse a priori des situations d'apprentissage proposées dans le manuel scolaire pour chacun des pays concernés par l'étude en vue d'identifier la nature des praxéologies régionales et locales ainsi que le genre de tâches en lien avec chaque praxéologie locale. Nous identifions, à partir des techniques permettant d'accomplir ce genre de tâches, le degré du potentiel algébrique de la tâche. Par ailleurs, la caractérisation du degré de potentialité algébrique des situations proposées dépend du statut de la tâche proposée et donc des moments de l'étude qui caractérisent les praxéologies didactiques qui accompagnent la mise en œuvre des praxéologies mathématiques développées dans ces manuels.

Nous commençons par présenter une brève description des contextes institutionnels (béninois, marocains et tunisiens) et des choix opérés par chaque noosphère pour préparer les élèves à l'algèbre avant l'usage du formalisme conventionnel, puis nous présentons les principaux résultats relatifs à l'analyse des manuels de la 6^e année du primaire dans chaque institution. Nous illustrons

nos analyses a priori par quelques extraits de manuels permettant d'expliciter la méthodologie suivie.

5. La transition primaire/collège au Bénin, au Maroc et en Tunisie

Nous nous intéressons aux caractéristiques de la transition institutionnelle primaire /collège dans les trois pays Maroc Tunisie et Bénin du point de vue des rapports entre l'arithmétique et l'algèbre. En particulier, nous analysons la manière dont chacun des pays prépare les élèves à l'algèbre et au développement de la pensée algébrique.

5.1. Description du contexte institutionnel et aperçu sur les choix d'entrées à l'enseignement de l'algèbre au collège

Dans ce paragraphe nous présentons une brève description du contexte institutionnel relatif à chacun des pays concernés par la recherche ainsi que les approches d'enseignement adoptées par chacun des pays pour une entrée dans la pensée algébrique.

5.1.1 Au Bénin

Au Bénin c'est une approche par compétences qui est prescrite dans tout le système éducatif. Les domaines d'étude du programme en classe de 6^e année du primaire en mathématiques s'organisent autour de l'arithmétique, la mesure et la géométrie. Les principes de la numération décimale sont à consolider. Les activités de construction, de comparaison, de composition et décomposition, d'ordre, d'arrondissement, d'estimation et d'opération sur les nombres doivent toujours prendre appui sur les ordres et les classes. Ainsi, les thèmes développés en arithmétique tout au long du primaire sont : nombres entiers (à partir du CI³); fractions (à partir du CE2⁴); nombres décimaux (à partir du CM1⁵). Le cadre des grandeurs (mesures de longueur, d'aire, de volume, de temps, les monnaies) et l'organisation des données (proportionnalité, pourcentage, échelle et statistiques) sont aussi progressivement introduits à partir du CP⁶. Le programme d'études béninois au primaire ne fait pas référence explicitement à l'algèbre. On peut donc dire que le programme ne positionne pas l'algèbre comme domaine, mais que les contenus des domaines mis en évidence explicitement, ainsi que les activités suggérées, prépareraient les élèves à l'apprentissage de l'algèbre. Un seul manuel officiel est prescrit : La Mathématique au cours moyen Deuxième année (Ministère des enseignements maternel et primaire du Bénin, 2004a). Au collège, apparaît

³ Cours d'initiation ou première année du primaire.

⁴ Cours élémentaire deuxième année ou quatrième année du primaire.

⁵ Cours moyen première année ou 5^e année du primaire.

⁶ Cours préparatoire ou 2^e année du primaire.

clairement le calcul littéral qui introduit implicitement l'algèbre dans le programme de première année de collège. Les activités de la géométrie ont plus de place que les activités numériques. Deux manuels sont prescrits officiellement. Le premier manuel est édité en 2006, *Conquête de compétences*. Le deuxième manuel est édité en 2017, *Réussir en mathématiques*. Dans ce deuxième manuel, les tâches nous semblent plus contextualisées et favorisent davantage l'approche pédagogique prescrite. Les situations d'apprentissage sont souvent accompagnées de figures, dessins, schémas, etc. De ce fait elles devraient permettre aux élèves de se représenter les données et les relations et de faire émerger des techniques de résolution de nature algébrique sans forcément passer par le symbolisme algébrique.

5.1.2 Au Maroc

Au Maroc, l'algèbre est introduite comme une arithmétique généralisée; la structure du programme de collège est basée sur l'extension des systèmes de nombres et l'établissement du calcul algébrique sur ces domaines de calcul dont la maîtrise par les élèves est l'un des objectifs essentiels du curriculum d'algèbre à ce niveau (ministère de l'Éducation nationale du Maroc, 1991). Selon le curriculum du secondaire collégial, les mathématiques y occupent une place importante justifiée par leur contribution efficace au développement de la pensée logique et au développement de diverses capacités de l'apprenant (ministère de l'Éducation nationale du Maroc, 2009). Les directives des orientations pédagogiques (ministère de l'Éducation nationale du Maroc, 2009) présupposent que l'enseignement des mathématiques soit adapté à la réalité de l'élève, en harmonie avec le contexte culturel, social et économique de son pays, ouvert aux évolutions qu'il connaît aujourd'hui de manière à lui permettre de s'adapter en permanence aux nouveaux développements de la connaissance et de la technologie. Avant 2019, le curriculum du primaire est réduit à la présentation d'un programme d'études dans chaque niveau scolaire de la première année à la 6^e année (ministère de l'Éducation nationale du Maroc, 2011). La discipline mathématique y est présentée de manière indépendante des autres disciplines (ministère de l'Éducation nationale du Maroc, 2011). La situation a changé en 2020, dans le nouveau curriculum (ministère de l'Éducation nationale du Maroc, 2020) on voit l'apparition du domaine : mathématiques, sciences et techniques. Par ailleurs, le programme de mathématiques reste présenté en domaines d'études. En plus des trois domaines mathématiques de l'ancien programme : Nombres et calculs, mesure, et Géométrie, un nouveau domaine vient s'ajouter, sous le titre : Organisation et traitement des données. La résolution des problèmes reste une composante importante dans les deux programmes. Dans le nouveau curriculum (ministère de l'Éducation nationale du Maroc, 2020), le nouveau programme est toujours basé

sur une approche par compétences. L'objectif principal de l'enseignement des mathématiques est d'exploiter les compétences acquises dans la recherche, la modélisation, le raisonnement, la résolution de problèmes, la communication et l'autoformation. Nous avons opté pour le choix d'un manuel scolaire (Ministère de l'Éducation nationale du Maroc, 2020a) pour la 6^e année du primaire, en langue arabe et d'un manuel scolaire (Ministère de l'Éducation nationale du Maroc, 2020b) pour la 1^{re} année du collège, en langue française, ainsi que pour les guides de l'enseignant qui leur sont associés. Dans ce contexte, chaque établissement scolaire ou direction provinciale, après concertation au niveau du conseil pédagogique, choisit le manuel que les élèves vont utiliser durant l'année scolaire. Ces manuels s'adressent principalement à l'élève, mais leur utilisation se fait sous la supervision de l'enseignant et selon ses choix de transposition didactique.

5.1.3 En Tunisie

Le système éducatif scolaire tunisien est composé de deux cycles d'enseignement, l'enseignement de base d'une durée de 9 ans (6 ans de primaire et 3 ans de collège) et l'enseignement secondaire d'une durée de 4 ans sanctionné par l'examen national du baccalauréat à la fin de la 4^e année. L'enseignement de base constitue un cycle complet qui s'étale sur neuf années accueillant des élèves de première année (6 ans) jusqu'à la 9^e année (14-15 ans). Il se compose à son tour de deux cycles complémentaires, le premier cycle (cycle primaire) dispensé dans les écoles primaires et d'une durée de six ans, subdivisés en trois degrés de deux ans chacun, et le second cycle (cycle préparatoire) dispensé dans les collèges et d'une durée de trois ans. L'examen de fin d'études de l'enseignement de base est organisé au terme de la 9^e année et sanctionné par le diplôme de fin d'études de l'enseignement de base (DFEB). La transition primaire/collège est accompagnée d'un changement dans la désignation des lettres et du sens de l'écriture symbolique. En effet, Jusqu'en 6^e année le symbolisme s'appuie sur l'alphabet arabe pour désigner des figures géométriques et les unités de mesure (grandeurs et temps). Le sens des opérations suit celui des textes arabes, c'est-à-dire de droite à gauche. À partir de la 7^e année de base, la langue naturelle en usage à l'écrit et à l'oral en mathématiques est la langue arabe, que ce soit au primaire ou au collège. L'enseignement de base repose sur une approche par compétences qui vise à développer chez l'élève la résolution de problèmes dans une perspective interdisciplinaire permettant l'intégration dans l'enseignement secondaire, la formation professionnelle ou l'insertion dans la société. Le programme de mathématiques vise le développement des concepts de nombres naturels, des nombres décimaux et des nombres rationnels ainsi que les opérations sur ces nombres et la notion de proportionnalité. L'apprentissage comporte également

différents usages des représentations de ces nombres faisant appel à des registres de représentations sémiotiques variés (numériques, géométriques, graphiques) et leur utilisation dans la résolution de problèmes contextualisés essentiellement par des techniques de nature arithmétique. Par ailleurs, dans ce contexte nous disposons, pour chaque niveau d'enseignement, d'un manuel officiel unique qui représente la principale référence à suivre par l'enseignant et ses élèves et traduit en quelque sorte les objectifs du programme officiel (Ministère de l'Éducation nationale de Tunisie, 2020a). Celui-ci s'organise autour de directives officielles des concepteurs sans explicitation des pratiques institutionnelles à mettre en œuvre. Seul le cycle primaire compte un livre du maître en tant que ressource supplémentaire d'accompagnement des pratiques enseignantes multidisciplinaires au niveau de leur formation initiale.

5.2. Analyse des manuels officiels de la 6^e année du primaire dans les trois pays

Dans cette section, nous présentons une analyse des manuels officiels de mathématiques de 6^{ème} année primaire relatifs au Bénin, Maroc et Tunisie. Nous analysons l'ensemble des tâches proposées selon le modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique et nous illustrons cette analyse par des extraits de problèmes proposés dans ces manuels.

5.2.1 Cas du Bénin

En 6^e année du primaire, les tâches du corpus sont des problèmes et situations problèmes relevant du domaine de l'arithmétique directement ou d'autres domaines tels que la géométrie, les grandeurs et la statistique. Ces tâches concernent principalement les nombres entiers naturels, les fractions et les nombres décimaux. Elles articulent toutes les opérations entre ces nombres selon le domaine de contextualisation de la tâche. Les résultats selon les genres de tâches sont présentés dans le tableau suivant.

Tableau 1 : Totaux des tâches selon leurs genres et le degré du potentiel algébrique

Praxéologie régionale	Généralisation	Modélisation	Calcul	Total
Effectifs	3	53	240	296
Fréquences	1,01 %	17,91 %	81,08 %	100 %
A (potentiel nul)	1,01 % (3)	1,01 % (3)	73,65 % (218)	75,68 % (224)
B (potentiel faible)	0 % (0)	16,89 % (50)	7,43 % (22)	24,32 % (72)
C (potentiel fort)	0 % (0)	0 % (0)	0 % (0)	0 % (0)

Ce tableau permet de constater que la praxéologie « Calculer » occupe une bonne partie des tâches du manuel et que les autres praxéologies sont très peu présentes. Les taux de potentiel algébrique obtenus nous amènent à dire que l'algèbre est quasiment absente ou que la transition vers l'algèbre est très peu perceptible. Le manuel scolaire du primaire assez représentatif des programmes officiels accorde une large importance à la praxéologie mathématique régionale (PMR) « Calculer » (plus de 81 %). La PMR « Généraliser » est quasiment absente.

Nous présentons quelques exemples dans le corpus du manuel La mathématique au cours moyen Deuxième année (Ministère des enseignements maternel et primaire du Bénin, 2004a):

5.2.1.1 Exemple de tâche relevant de la PMR « Généraliser » (en page 27)

Recopie et complète chaque suite

(A) : 2; 5; 7; 12; 19; ...; ...; ...; ...; ...; ...; ...; ...; ...; ...;

(B) : 1,4; 2,8; 5,6; 11,2; ...; ...; ...; 179,2

(C) : 1; 3; 9; 27; ...; ...; ...; ...; ...; ...; ...; ...; ...;

Pour compléter la chaîne de suite (A), il faudrait remarquer qu'après les deux premiers termes, chaque terme est obtenu en faisant la somme des deux qui le précèdent. Pour compléter la chaîne de suite (B), il faudrait constater qu'à part le premier terme, chaque terme est le double du terme qui le précède. Enfin pour la chaîne (C), après le premier terme, chaque terme est le triple du terme qui le précède.

Cette tâche est du type G1.1 dans la PML G1 car la régularité de chacune des suites à partir des informations de l'énoncé est bien établie. Le degré du potentiel algébrique de cette tâche est nul car cette tâche n'oblige pas à un raisonnement algébrique pour la résoudre. On peut opérer directement par des opérations arithmétiques pour compléter chaque suite.

5.2.1.2 Exemple de tâche relevant de la PMR « Modéliser » (en page 13)

Trois associés se partagent une certaine somme. Le premier prend les $\frac{12}{30}$ le second prend les $\frac{8}{30}$. Quelle fraction de cette somme revient à la troisième personne?

Cette tâche se situe aussi dans le genre de tâches M2.1 avec un degré du potentiel algébrique faible car on pourrait faire apparaître de façon implicite une inconnue pour déterminer la part de la troisième personne.

5.2.1.3 Exemple de tâche relevant de la PMR « Calculer »

Donne une fraction de dénominateur 100 équivalente à chaque fraction :

(A) $3/5$; (B) $1/4$

Dans cette tâche, c'est la transformation d'une expression en des expressions qui lui sont équivalentes. Son degré de potentiel algébrique est nul.

5.2.1.3 Exemple de tâche relevant de la PMR « Calculer »

Dans chaque cas, remplace le [] par la fraction qui convient.

(A) $4/38 + [] = 26/38$; (B) $[] - 64/102 = 35/102$; (C) $[] \times 9 = 45/172$

Ici, c'est la résolution d'une équation algébrique dont l'inconnue est explicite. La résolution est nécessairement algébrique puisqu'il faut manipuler l'égalité comme une relation d'équivalence et il faut penser à retrancher membre à membre et/ou diviser membre à membre afin de trouver la solution de l'équation. Même si on peut penser que l'élève va déduire par des opérations arithmétiques, celles-ci ne sont pas définies par un sens arithmétique dans l'équation. Résoudre des opérations à trou en utilisant les règles de conservation de l'égalité n'est pas à la portée des élèves de 6^e année du primaire au Bénin. Nous en déduisons que le degré du PA est faible.

L'analyse du manuel officiel au CM2 a permis de se rendre compte que les trois praxéologies régionales identifiées pour la pensée algébrique sont présentes dans le manuel avec des proportions très déséquilibrées. La praxéologie « Calculer » contient le plus grand nombre de tâches 81,08 % (240 tâches sur 296) avec un taux de degré du potentiel algébrique nul très élevé 75,68 % (224 tâches sur 296). Cela nous fait dire que l'arithmétique occupe encore une place prépondérante dans le programme d'étude du CM2 au cours primaire.

Nous conjecturons que c'est le caractère transversal de l'arithmétique qui a pris le pas sur les autres domaines, notamment celui de l'algèbre. La transition vers l'algèbre est très peu amorcée. En effet, cela se justifie par la faiblesse du nombre de tâches de la praxéologie « Modélisation » et surtout de « Généralisation ». Il nous semble que ce constat n'est qu'une interprétation du programme. En effet, celui-ci est muet sur les manières de développer l'enseignement et l'apprentissage des objets de savoirs en jeu. Les énoncés de certaines compétences semblent propices au développement de la modélisation et de la généralisation, mais la mise en œuvre proposée par le manuel nous semble en inadéquation. Par exemple, l'énoncé d'une compétence est « raisonner à l'aide de concept et de processus mathématique ». Cette compétence est explicitée comme suit : « c'est établir des liens entre des objets, des idées, des faits en vue de produire une vérité non apparente » (Ministère des enseignements maternel et primaire du Bénin, 2004b, p. 99). Nous pensons que ces précisions du programme peuvent aider à enseigner l'arithmétique en faisant évoluer l'apprentissage vers l'algèbre (sans que les sens des nombres et des opérations ne soient utilisés au cours de l'activité de l'élève).

Nous conjecturons également que ce constat peut révéler une priorité accordée à la praxéologie « Calcul » par l'institution pour faire opérer davantage les utilisateurs du manuel sur les nombres. Cela confirme que l'algèbre n'est pas objet d'enseignement-apprentissage.

5.2.2 Cas du Maroc

Dans le corpus des tâches retenues dans ce manuel, nous avons dégagé, comme le montre le tableau 2, un nombre total de 608 tâches. Elles sont réparties selon les trois praxéologies mathématiques régionales de la praxéologie globale de la pensée algébrique qui sont, généraliser, modéliser et calculer.

Le tableau 2 suivant illustre les densités relatives des tâches selon leurs genres et le degré du potentiel algébrique.

Tableau 2 : Totaux des tâches selon leurs genres et le degré du potentiel algébrique

Praxéologie régionale	Généralisation	Modélisation	Calcul	Total
Effectifs	83	273	252	608
Fréquences	13,65%	44,90 %	41,45 %	100 %
A (potentiel nul)	53,01 % (44)	57,14 % (156)	75,40 % (190)	64,14 % (390)
B (potentiel faible)	27,71 % (23)	27,11 % (74)	18,65 % (47)	23,68 % (144)
C (potentiel fort)	19,28 % (16)	15,75 % (43)	5,95 % (15)	12,17 % (74)

La praxéologie régionale « généraliser » représente 13,65 % (83), la praxéologie régionale « modéliser » représente 44,90 % (273) et la praxéologie régionale « calculer » représente 41,45 % (252). Quant au potentiel des activités de ce manuel, 64,14 % (390) représentent un potentiel nul, 23,68 % (144) représentent un potentiel faible et 12,17 % (74) représentent un potentiel fort.

Dans ce manuel scolaire, l'importance accordée aux PMR « Calculer » et « Modéliser » et de la faible représentation de la PMR « Généraliser » peuvent être expliquées en partie par la voie choisie pour l'entrée à l'algèbre et, par ailleurs, par la compréhension donnée à cette entrée par les concepteurs du manuel. En effet, l'importance de la PMR « Calculer » est prévisible étant donné que la voie d'introduction de l'algèbre est fondée sur le calcul algébrique. Cela explique aussi, a contrario, la faible importance de la PMR « Généraliser » : la généralisation n'est pas une voie privilégiée de façon explicite pour l'introduction de l'algèbre. Selon les orientations curriculaires, la modélisation en mathématiques vise à développer chez les apprenants des modèles de mode de pensée dans le cadre de résolution de problèmes, dans trois domaines : nombres et calcul, grandeurs et mesures et organisation et gestion de données. Le manuel scolaire du primaire accorde une importance aux PMR « Calculer » et « Modéliser ».

Les activités qui permettent d'associer des expressions numériques et/ou les expressions algébriques dans différents modes de représentations sont absentes dans ce manuel. Dans ce manuel, la motivation des expressions algébriques dans des problèmes relevant de l'algèbre est démesurée. La raison d'être de la distributivité comme propriété pour prouver l'équivalence de programmes de calcul ou d'expressions algébriques y est peu visible.

5.2.2.1 Exemple de tâches relevant de la PMR « Généraliser ».

Les tâches 2, 3, 4 et 5 de la page 22 et la page 124 du guide de l'enseignant représentent des activités du domaine calcul et nombres et qui relèvent de la phase de la découverte.

Calculer et comparer :

Déduire

Figure 2. Généralisation de règles. Extrait du manuel scolaire
(Ministère de l'Éducation nationale du Maroc, 2020a, p, 22)

Ces activités sont proposées dans ce manuel pour « Justifier » la commutativité, l'associativité pour l'addition et la distributivité (lois), ainsi que pour justifier la généralisation de la règle $a - b = a + c - b - c$. L'argumentation est empirique, se base sur le calcul et uniquement sur les caractéristiques des nombres. La technique de généralisation est basée sur le calcul arithmétique. Nous l'avons qualifiée de potentiel nul.

5.2.2.2 Exemple de tâche relevant de la PMR « Modéliser »

Il s'agit dans cet exemple de modéliser un problème par une expression numérique.

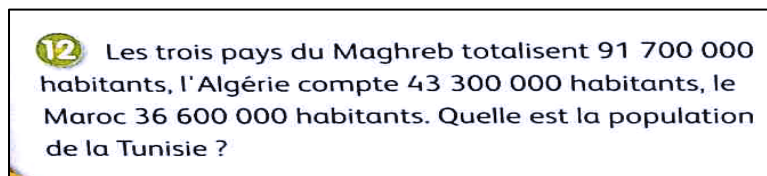


Figure 3. Modélisation par une expression numérique. Extrait du manuel scolaire (Ministère de l'Éducation nationale du Maroc, 2020a, p. 23)

Ce problème est de nature connectée dans la mesure où une technique arithmétique est facilement accessible. Dans le guide, l'attente des concepteurs est de présenter la solution donnée : le nombre d'habitants de la Tunisie : $91\,700\,000 - (43\,300\,000 + 36\,600\,000) = 11\,800\,000$. De ce fait son potentiel algébrique est nul.

Un autre exemple qui consiste à trouver le nombre de parallélépipèdes qu'on peut construire avec 168 cubes, l'arête de chacun étant de 1 cm, et préciser leurs dimensions et leurs volumes :

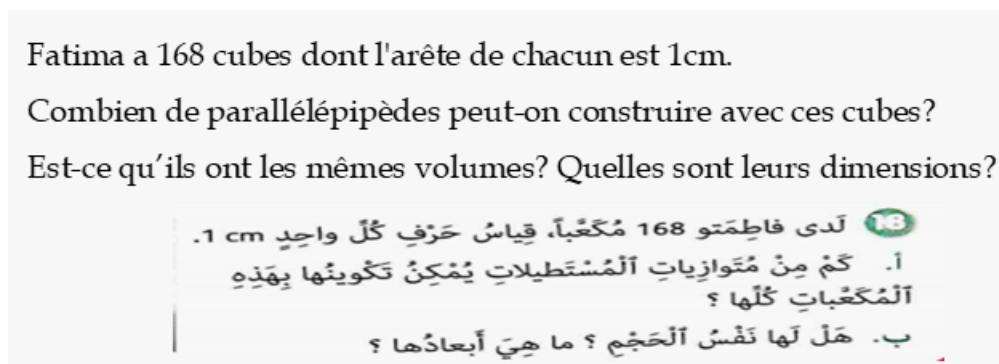


Figure 4. Déterminer et représenter dans un registre donné une relation fonctionnelle modélisant une situation. Extrait du manuel scolaire (Ministère de l'Éducation nationale du Maroc, 2020a, p. 82)

Cette activité consiste à trouver le nombre de parallélépipèdes qu'on peut construire avec 168 cubes dont l'arête de chacun est 1cm et préciser leurs dimensions et leurs volumes. Dans ce genre de tâches, le registre de représentation de la relation fonctionnelle est formulé dans l'énoncé de la tâche.

La tâche ne consiste pas uniquement à transformer une expression numérique pour effectuer des calculs sur le calcul des dimensions et des volumes des parallélépipèdes construits, mais d'opérer sur l'expression de modélisation de la situation dans l'optique de dégager des connaissances sur cette situation.

Nous avons accordé un potentiel fort à cette tâche, car elle pourra amener l'élève à reconnaître une relation fonctionnelle modélisant une situation.

5.2.2.3 Exemple de tâche relevant de la PMR « Calculer »

Pour ce manuel scolaire le calcul en ligne est une méthode alternative au calcul posé et pour favoriser davantage le calcul mental. Les calculs réfléchis multiplicatifs et additifs reposent sur la décomposition canonique d'un des deux nombres. Le calcul réfléchi est peu développé dans ce manuel.

Calculer : 20 أَحْسِبْ مَا يَلِي :

$$25 \times 12 \ ; \ 3,85 \times 7 \ ; \ 6 \times 1,25 \ ; \ 2,75 \times 43$$

Figure 5. Calcul réfléchi. Extrait du manuel scolaire
(Ministère de l'Éducation nationale du Maroc, 2020a, p. 6)

C'est une tâche qui relève du domaine « nombres et calcul », donnée dans la phase de l'évaluation des apprentissages. Cette tâche, selon le modèle épistémologique de référence de la pensée algébrique (MERPA), doit consister à trouver la valeur d'une expression numérique en utilisant un calcul réfléchi.

L'intention visée est le calcul de la multiplication de deux décimaux (le calcul en ligne peut- être réfléchi, car la méthode n'est pas imposée). Dans le guide de l'enseignant du manuel scolaire (Ministère de l'Éducation nationale du Maroc, 2020a), les concepteurs du manuel donnent la consigne suivante : « pour calculer ce produit, il est nécessaire d'exécuter l'opération de façon habituelle » (p. 102). La demande des concepteurs se dirige vers l'exploitation d'un calcul posé. En effet, les concepteurs défavorisent le recours à une technique algébrique, ils encouragent l'usage d'une technique arithmétique ce qui nous amène à accorder un potentiel nul à cette tâche.

Observer l'exemple suivant et effectuer les calculs :

15/ Observer l'exemple suivant :

En suite effectuer :

15 أَلَا حِظْ أَلْمِثَالِ أَلْتَالِي :

$$\begin{aligned} 376 \times 145 &= (376 \times 100) + (376 \times 40) + (376 \times 5) \quad \text{مِثَال :} \\ &= (37\ 600) + (15\ 040) + (1\ 880) \\ &= 54\ 520 \end{aligned}$$

تَمَّ أَنْجِزْ مَا يَلِي :

$$\begin{aligned} &762 \times 125 \ ; \ 928 \times 375 \ ; \ 329 \times 36 \\ &452 \times 411 \ ; \ 674 \times 101 \ ; \ 109 \times 49 \end{aligned}$$

Figure 6. Calcul réfléchi et reconnaissance de règles. Extrait du manuel scolaire
(Ministère de l'Éducation nationale du Maroc, 2020a, p. 15)

Dans le manuel scolaire, cette tâche est qualifiée des activités d'entraînements relevant du domaine nombres et calcul. Elle consiste à trouver la valeur d'une expression numérique en utilisant un calcul réfléchi.

Cette activité vise une routine sur le calcul en ligne, ce calcul s'appuie sur l'égalité comme relation d'équivalence et la propriété de distributivité simple, la décomposition canonique d'un facteur (distributivité) traduite par calcul en ligne, ce qui se rapproche de son usage en algèbre. Ceci nous amène à accorder un potentiel fort à cette tâche. Cependant, dans le guide, cette activité vise à faire prendre conscience à l'apprenant de l'importance de la propriété de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans le calcul de la multiplication de deux nombres, par une décomposition des nombres en écrivant une association dans le système de numérotation décimale, puis en faisant le calcul, comme illustré par l'exemple : $762 \times 125 = 762 \times (100 + 20 + 5) = (762 \times 100) + (762 \times 20) + (762 \times 5) = 76\,200 + 15\,240 + 3\,810 = 95\,250$.

Le calcul réfléchi est amorcé dans ce manuel à travers l'usage de décomposition de nombres. Toutefois, quelques exercices portent sur le groupement de termes d'une somme écrite en ligne pour faciliter les calculs. Ce guide de l'enseignant propose une correction de l'activité sans éléments sur la mise en œuvre de cette décomposition. En effet, le manuel est accompagné par un guide de l'enseignant, et il est important de voir si des consignes orientent la gestion de l'enseignant vers une technique algébrique.

5.2.3 Cas de la Tunisie

Dans le corpus des tâches retenues dans l'unique manuel officiel de 6^e année du primaire, intitulé « Mathématiques pour les élèves de 6^{ème} année de l'enseignement de base » (Ministère de l'Éducation nationale de Tunisie, 2020b), nous avons identifié 316 tâches qui renvoient à des activités et des exercices qui sont proposés en rapport avec le domaine de l'arithmétique, celui des grandeurs et la géométrie. Ces tâches sont classées selon les trois praxéologies mathématiques régionales retenues dans le MERPA. L'analyse a priori a permis de caractériser le degré du potentiel algébrique associé à ces tâches que nous résumons dans le tableau suivant.

Tableau 3 : Totaux des tâches selon leurs genres et le degré du potentiel algébrique

Praxéologies régionales	Généralisation	Modélisation	Calcul	Total
Effectif	17	203	96	316
Fréquences	5,38 %	64,24 %	30,38 %	100 %
A (potentiel nul)	4 (1,26 %)	16 (5,06 %)	47 (14,88 %)	67 (21,20 %)
B (potentiel faible)	8 (2,53 %)	39 (12,34 %)	13 (4,11 %)	60 (19 %)
C (potentiel fort)	5 (1,58 %)	148 (46,83 %)	36 (11,4 %)	189 (59,8 %)

Les analyses des activités proposées font apparaître le pourcentage important des problèmes de modélisation (64,24 %). La praxéologie régionale « modélisation » apparaît comme un enjeu d'enseignement explicite qui répond aux choix institutionnels selon lesquels les situations problèmes et les problèmes de modélisation sont au cœur des mathématiques et la résolution des situations problèmes constitue la compétence principale de l'enseignement des mathématiques au niveau de de l'enseignement primaire. Les résultats obtenus renforcent la perspective des programmes officiels que la modélisation peut constituer une niche pour l'initiation des élèves à la pensée algébrique vu l'importance du nombre des activités de modélisation ayant un potentiel algébrique fort. En fait, 148 parmi les 203 activités classées dans la catégorie de genre de tâche « modélisation » et cela constitue 46,83 % de l'ensemble des activités étudiées dans le manuel. Cependant les situations proposées renvoient souvent à une pseudo-modélisation dans la mesure où le modèle en question est souvent préétabli. Le contexte de la situation apparaît plus comme un habillage du problème qu'un moyen de développer un processus de modélisation. La répartition de ces activités selon les types de tâches proposés dans le MPRPA fait apparaître l'importance des activités du type « Résoudre une situation extra-mathématique se modélisant par une expression numérique ». Cela peut s'expliquer en partie par l'absence de la notion d'équation et des aspects fonctionnels pour ce niveau scolaire.

5.2.3.1 Exemple de tâche relevant de la PMR « Généraliser »

Les activités proposées dans ce manuel visent à identifier ou à décrire des régularités telles que la suite des multiples d'un entier donné ou encore à énoncer une règle générale (activité : la somme de deux multiples d'un entier est un multiple de cet entier). Dans cet exemple, il s'agit plus précisément du type de tâche : Justifier/prouver une régularité dans une suite numérique ou non numérique à motif répété.

(5) أبحث عن المضاعفات الخمسة الأولى لعدد أختاره.
 أ- أثبت أن مجموع مضاعفين من هذه المضاعفات هو مضاعف للعدد الذي اخترته.
 ب- أثبت أن الفرق بين مضاعفين من هذه المضاعفات هو مضاعف للعدد الذي اخترته.

5) Je cherche les cinq premiers multiples d'un nombre que je choisis.
 a. Prouver que la somme de deux de ces multiples est un multiple du nombre choisi.
 b. Prouver que la différence entre deux de ces multiples est un multiple du nombre choisi

Figure 7. Généralisation. Extrait de Mathématiques pour les élèves de 6^e année de l'enseignement de base (Ministère de l'Éducation nationale de Tunisie, 2020b, p. 36)

Il ne s'agit pas ici de réaliser une preuve mathématique, mais plutôt d'une validation pragmatique d'une règle à travers l'utilisation des termes de la suite des

multiples du nombre choisi. Aucune précision n'est donnée, donc l'élève peut vérifier la règle sur la base d'exemples, donc par essai-erreurs, mais la tâche permet de développer la pensée algébrique chez l'élève. De ce fait, nous considérons le potentiel algébrique de l'activité comme fort dans la mesure où l'on opère sur un nombre généralisé qui peut prendre n'importe quelle valeur dans l'ensemble des entiers naturels non nuls.

5.2.3.2 Exemple de tâche relevant de la PMR « Modéliser »

L'activité suivante proposée dans le manuel officiel renvoie au type de tâches : Déterminer et représenter une expression numérique modélisant une situation extra-mathématique donnée).

1. غرست عائلتنا في حديقة المنزل 8 شجيرات تفاح و6 شجيرات برتقال و7 شجيرات خوخ و3 شجيرات كروم. ■ أكتب الأعداد الكسرية المثلثة لكل نوع من الشجيرات المغروسة بالنسبة إلى عدد الأشجار المغروسة. ■ أكتب الأعداد الكسرية المكونة والقرينة. ■ أرتب سلسلة الأعداد الكسرية المكونة تصاعدياً. ■ أوجد لكل عدد كسري كونه 3 كتابات كسرية أخرى. ■ أكتب كل عدد كسري كونه إلى مجموع عددين كسريين أو أكثر. 	Notre famille a planté 8 pommiers, 6 orangers, 7 pêchers et 3 vignes dans le jardin. - Donner les nombres rationnels représentant chaque type d'arbustes plantés par rapport au nombre d'arbres plantés - Ecrire et lire ces nombres rationnels - Ranger la série de nombres rationnels formés dans l'ordre croissant - Trouver pour chacun de ces nombres rationnels trois autres écritures - Décomposer chacun de ces nombres rationnels en somme de deux nombres rationnels ou plus
---	---

Figure 8. Modélisation. Extrait de Mathématiques pour les élèves de 6^e année de l'enseignement de base (Ministère de l'Éducation nationale de Tunisie, 2020b, p. 117)

Il s'agit de trouver les nombres rationnels modélisant les situations associées (le nombre d'arbustes de chaque type par rapport au nombre total d'arbres plantés) puis d'ordonner ces nombres et de les représenter par différentes écritures. La dernière question convoque les opérations à effectuer entre ces nombres par le biais d'une décomposition en somme. Cette tâche, même si elle est dans un contexte numérique-arithmétique, possède un potentiel algébrique plutôt fort puisqu'elle permet d'initier les élèves à l'idée d'équivalence entre différentes représentations d'un nombre en dépassant la conception du signe « = » comme l'annonce d'un résultat.

5.2.3.3 Exemple de tâche relevant de la PMR « Calculer »

Par ailleurs, la praxéologie mathématique régionale « Calcul » occupe une place importante après celle de « Modélisation ». La présence des nombres décimaux et des nombres rationnels comme un objet explicite d'enseignement à ce niveau peut expliquer l'importance accordée à ces activités. L'extrait suivant illustre l'exemple

d'une tâche dont l'objectif est d'amener les élèves à manipuler les opérations entre les nombres à travers les différentes écritures d'un nombre rationnel.

7 أعوض كل نقطة بالعدد المناسب :

Remplacer chaque point par le nombre qui convient

$\frac{\cdot}{\cdot} = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{2}{9}$	$\frac{\cdot}{\cdot} + \frac{9}{17} = \frac{13}{17}$
$\frac{\cdot}{\cdot} = \frac{3}{5} + 8$	$\frac{\cdot}{\cdot} + 4 = \frac{19}{4}$
$\frac{9}{7} = \frac{\cdot}{7} + 1$	$\frac{4}{5} + \cdot = \frac{9}{5}$

Figure 9. Calcul et différentes écritures d'un nombre rationnel.

Extrait de Mathématiques pour les élèves de 6^e année de l'enseignement de base
(Ministère de l'Éducation nationale de Tunisie, 2020b, p. 57)

Dans cette activité, les élèves sont amenés à transformer un nombre rationnel en une somme de deux nombres rationnels ayant le même dénominateur dans le cas d'un nombre rationnel inférieur à 1 ou en la somme d'un nombre rationnel et d'un entier naturel dans le cas où le nombre rationnel donné est supérieur à 1. La technique permettant d'accomplir cette tâche peut renvoyer à la résolution d'une équation (opération à trous) et permet de motiver des stratégies de nature algébrique par la détermination des valeurs « inconnues ». Cependant, les variables didactiques relatives au choix des nombres proposés peuvent détourner cet objectif et conduire les élèves à des techniques de nature arithmétiques qui se basent essentiellement sur les opérations inverses de l'addition ou des essais erreurs conduisant à la réponse attendue. De ce fait, nous considérons cette tâche comme ayant un potentiel algébrique faible.

Par ailleurs, l'activité suivante renvoie au type de tâche : Repérer une règle, une loi, un algorithme) et convoque l'identification d'une règle relative à la multiplication de deux nombres décimaux en précisant le nombre de chiffres après la virgule du produit.

3) ألاحظ الجداء التالي :

10,9 × 15,08

أحد الأعداد التالية يمثل النتيجة المناسبة للجداء المكتوب داخل الإطار :

150 - 164,372 - 1643,72

أحدد العدد المناسب دون إجراء العملية.

أعرض التمثيل الذي اعتمدته في تحديد هذا العدد.

3) Remarquer le produit suivant :

10,9 × 15,08

L'un des nombres suivants représente le résultat correspondant au produit encadré :

1643,72 - 164,372 - 150

-Déterminer le nombre correspondant sans faire de calcul

-Expliciter la démarche suivie pour identifier ce nombre.

Figure 10. Reconnaître un produit sans calcul, avec justification.

Extrait de Mathématiques pour les élèves de 6^e année de l'enseignement de base
(Ministère de l'Éducation nationale de Tunisie, 2020b, p. 36)

Dans cette activité, sans à avoir à calculer explicitement le produit, il s'agit de justifier la démarche adoptée pour reconnaître la valeur du produit correspondant à la multiplication des décimaux. Cependant la technique qui peut être mobilisée par les élèves peut être purement intuitive en raison des choix des valeurs attribuées (variables didactiques). Par exemple, les élèves peuvent remarquer que les deux nombres dépassent 15 et 10 et donc leur produit dépasse forcément 150 et ne peut jamais atteindre mille. Par conséquent, la première et la dernière proposition sont à rejeter. Il déduit alors la réponse valide sans avoir nécessairement recours à une justification (rationalité algébrique). De ce fait, nous considérons le degré du potentiel algébrique de cette activité comme nul puisque les techniques de nature algébrique sont loin d'être attendues.

5.3 Bilan des analyses pour les trois pays

Les analyses des manuels réalisées dans ces trois pays conduisent à des constats intéressants pour la poursuite de ce travail.

Le premier constat concerne la représentativité des trois praxéologies mathématiques locales, G; M et C mises en avant dans le MPRPA dans ces trois pays, ce qui constitue un indicateur de la perspective curriculaire commune de l'enseignement des mathématiques du primaire à prendre en compte les aspects relatifs au développement de la pensée algébrique.

Le deuxième constat est relatif à l'importance accordée aux PMR « Calculer » et « Modéliser » et la faible représentation de la PMR « Généraliser ». Même si dans le contexte tunisien la PMR « modélisation » vient en première position par rapport à celle du Calcul dominant dans les contextes béninois et marocains, cette modélisation renvoie plus à une résolution de problèmes contextualisés qui est l'approche d'enseignement des mathématiques privilégiée dans le système d'enseignement. De plus, les problèmes posés au primaire ne requièrent pas de démarches de nature algébrique et sont souvent de nature connectée, leur potentiel algébrique est nul ou faible.

Le troisième constat est en rapport avec la PMR « Calculer »; les types de tâches proposés dans les manuels des trois pays sont quasiment similaires. Cela s'explique en partie par la voie d'entrée à l'algèbre choisie dans des contextes variés qui se base sur le calcul sur les nombres et le travail sur les changements conceptuels en rapport avec le statut des lettres sans qu'elles soient symbolisées et celui de l'égalité. Les variations de points de vue liées à un concept se trouvent ainsi dans la variété des situations. Cela rejoint l'idée des chercheurs (Kaput, 2008. Squalli et al., 2011) à développer une pensée algébrique dès l'école primaire – puisque cette pensée peut s'affranchir des notations formelles – dont l'objectif n'est pas d'introduire précocement l'algèbre, mais d'approfondir dès l'école

primaire la compréhension de concepts mathématiques fondamentaux comme le sens des opérations ou de l'égalité, eux-mêmes liés au développement de la pensée algébrique.

Le quatrième constat renvoie à la classification des tâches proposées dans les manuels des trois pays et leur potentiel algébrique. Les analyses montrent la faible proportion des activités relatives à la généralisation. Cela renforce l'idée que l'école primaire ne prépare pas suffisamment les élèves à développer le processus de généralisation algébrique. L'analyse fait apparaître que les procédures de résolution visées font appel à des généralisations empiriques basées sur quelques exemples numériques.

Conclusions et discussions

L'analyse réalisée, dans le cadre de cette étude, sur les manuels de 6^e année, primaire pour les trois contextes institutionnels (Bénin, Maroc, Tunisie) a permis d'explorer les approches d'enseignement adoptées dans chaque contexte pour favoriser le développement de la pensée algébrique chez les élèves, à la transition au cycle collégial. Cette étude se prolonge en première année du collège en vue d'analyser l'évolution des pratiques algébriques en référence au MPRPA. Il en ressort que les trois praxéologies régionales et locales de ce modèle sont représentées dans ces manuels même si certains genres de tâches n'y figurent pas. Cela témoigne d'une prise en compte, pour ces trois institutions, de la diversité d'entrées possibles dans la pensée algébrique et des éléments constitutifs de ce mode de pensée. Cependant, les situations d'apprentissages proposées ne permettent pas toujours de rompre avec les techniques de nature arithmétique pour amorcer un raisonnement de nature algébrique, même si les activités analysées fournissent des contextes qui permettent de donner du sens aux trois praxéologies mathématiques régionales (calcul, modélisation et généralisation) définies dans ce modèle. Bien que nous ayons identifié un nombre non négligeable de tâches pouvant être résolues selon un raisonnement algébrique, les données (valeurs des nombres) proposées font souvent obstacle à l'émergence de raisonnement analytique. Ainsi, le choix des variables didactiques dans la plupart des situations d'apprentissages proposées à ce niveau scolaire impacte les techniques à mobiliser et est susceptible d'engendrer des pratiques détournées par rapport aux pratiques institutionnelles attendues. C'est le cas, par exemple, de la PMR « Généraliser », les tâches proposées nous semblent fort intéressantes à exploiter à condition de convoquer au niveau des praxéologies installées un degré d'analyticité plus important. Il s'agit de générer chez les élèves un processus de généralisation en dépassant le repérage de régularités ou la représentation du modèle dans un ensemble d'entiers dénombrable ou assez petit. Souvent, les situations posées ne permettent pas de dépasser la technique arithmétique de

comptage et d'aller vers la création du modèle de généralisation approprié ou à sa justification par des techniques guidées. Il semble que l'instauration plus fréquente de cette praxéologie permettrait de donner plus de sens aux formules et aux propriétés introduites en première année de collège par le biais d'exemples numériques. De même, pour la PMR « modélisation », même si certaines tâches renvoient à une résolution de problèmes contextualisés se ramenant le plus souvent à des expressions numériques, celles-ci peuvent être réinvesties de manière à rompre avec une perspective d'arithmétique généralisée et de promouvoir la découverte par les élèves du modèle approprié pour sa résolution. Il est possible également pour la PMR « calcul » de dépasser le réductionnisme d'une simple exécution d'un programme de calcul pour aller vers une généralisation de propriétés sans attendre l'avènement du formalisme algébrique en première année de collège, comme le souligne Squalli (2015) « voir une expression numérique comme un objet en soi et non uniquement comme une chaîne de calcul et des manières d'opérer sur ces représentations » (p. 349). Ainsi une préparation préalable au processus d'algébrisation par le biais des activités préalgébriques comme le calcul réfléchi, le calcul en ligne, l'équivalence entre expressions numériques est susceptible, selon nous, de développer un potentiel algébrique plus important que ceux relevés dans les situations d'apprentissages proposées pour ces trois contextes institutionnels.

Références

- Adihou, A., Larguier, M. et Bronner, A. (2020). Raisonnements lors de la résolution de problèmes déconnectés : exemples prototypiques et analyse de productions d'élèves. Dans H. Squalli, I. Oliveira, A. Bronner et M. Larguier (dir.), *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires* (p. 133-161). Livres en ligne du CRIRES. <https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches>
- Bednarz, N. et Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. Dans N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (p. 115-136). Kluwer Academic Publishers.
- Bednarz, N., Kieran, C. et Lee, L. (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*. Kluwer Academic Publishers.
- Ben Nejma, S. (2004). *La mise en équations en première année de l'enseignement secondaire tunisien : transition collège/lycée* [mémoire de DEA inédit]. Université de Tunis.

Ben Nejma, S. (2009). *D'une réforme à ses effets sur les pratiques enseignantes. Une étude de cas : l'enseignement de l'algèbre dans le système scolaire tunisien* [thèse de doctorat, Université Paris VII et Université de Tunis]. TEL. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01267461>

Ben Nejma, S. (2012). Pratiques enseignantes et changements curriculaires : une étude de cas en algèbre élémentaire. Dans J.-L. Dorier et S. Coutat (dir.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^e siècle. Actes du colloque EMF2012* (p. 1133-1142). Université de Genève.

Ben Nejma, S. (2020). Exploitation de l'histoire dans une analyse didactique du développement de la pensée fonctionnelle au début de l'enseignement secondaire tunisien. *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, 1, 38-69.

Ben Nejma, S. (2021). La place de la modélisation dans l'enseignement de l'algèbre élémentaire : Pratiques institutionnelles et pratiques enseignantes dans le système éducatif tunisien. *ITM Web of Conférences*, 39, 01004. <https://doi.org/10.1051/itmconf/20213901009>

Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 77-124.

Bronner, A. et Larguier, M., (2018). Éléments d'analyse du curriculum officiel à propos de la pensée algébrique. Dans M. Abboud (dir.), *Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines. Actes du colloque EMF2018* (p. 236-245). Université de Paris.

Carraher, D. W. et Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. Dans F. Lester (dir.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 669-705). Information Age Publishing.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, 19, 43-75.

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie. Voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x*, 23, 5-38.

Chevallard, Y. (1994) Nouveaux objets, nouveaux problèmes en didactique des mathématiques. Dans M. Artigue, R. Gras, C. Laborde et P. Tavnignot (dir.) *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (p. 313-320). Éditions la Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1997). Familère et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques*, 17(3), 17-54.

- Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude 3. Écologie & régulation. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot et R. Floris (dir.), *Actes de la 11^e école d'été de didactique des mathématiques* (p. 41-46). Éditions la Pensée sauvage.
- Coulange, L., Ben Nejma, S., Constantin, C. et Lenfant-Corbin, A. (2012). Des pratiques enseignantes aux apprentissages des élèves en algèbre. Dans L. Coulange, P. Drouhard, J.-L. Dorier et A. Robert (dir.), *Enseignement de l'algèbre, Bilan et perspectives, RDM- Recherches en didactique des mathématiques-H-S* (p. 57-79). Éditions La Pensée Sauvage.
- Filloy, E. et Rojano, T. (1989). Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9, 19-25.
- Gascón, J. (1995). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée ». *Petit x*, 37, 43-63.
- Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, 17(2), 167-210.
- Kaput, J. (1998). Representations, inscriptions, descriptions, and learning: A kaleidoscope of windows. *The journal of mathematical behavior*, 17(2), 265-281.
- Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? Dans J. J. Kaput, D. W. Carraher et M. L. Blanton (dir.), *Algebra in the early grades* (p. 5-17). Routledge.
- Kieran, C. (2007) Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: building meaning for symbols and their manipulation. Dans F. K. Lester (dir.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. (p. 707-762). Information Age.
- Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. et Ng, S. F. (2016). Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching. Dans G. Kaiser (dir.), *ICME-13 Topical surveys*. Springer Open.
- Lins, R. C. et Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. Dans H. Chick, K. Stacey et J. Vincent (dir.), *The future of the teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (p. 47-70). The University of Melbourne.
- Najar, R., Squalli, H., Adihou, A. et Abouhanifa, S. (2021). Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie : Pour un état des lieux, comparaison et perspectives de l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre. *ITM Web of Conferences*, 39, 01004. <http://dx.doi.org/10.1051/itmconf/20213901004>

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards*. NCTM.

Pilet, J. et Grugeon-Allys, B., (2020) Quelles potentialités du calcul en ligne dans l'enseignement primaire en France pour favoriser une entrée précoce dans l'algèbre? Dans H. Squalli, I. Oliveira, A. Bronner et M. Larguier (dir.), *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires*. Livres en ligne du CRIRES. <https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches>

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1-19. <https://doi.org/10.1080/14794800903569741>

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26(2), 257-277. <https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2>

Radford, L. (2015). La pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation. *Actes du colloque EMF2015. Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* (p. 334-345). Université d'Alger.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. Dans C. Kieran (dir.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds. The global evolution of an emerging field of research and practice* (p. 3-26). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_1

Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque EMF2015* (p. 346-356). Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene.

Squalli, H., Mary, C. et Marchand, P. (2011). Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre : cas du Québec et de l'Ontario. Dans J. Lebeaume, A. Hasni et I. Harlé (dir.), *Recherches et expertises pour l'enseignement scientifique* (p. 65-78). De Boeck.

Squalli, H., Jeannotte, D., Koudogbo, J. et Robert, V. (2019, juillet). *Analyse du potentiel du développement de la pensée algébrique dans le programme de formation de l'école québécoise* [communication]. CIEAEM 71. Connections and understanding in mathematics education: making sense of a complex world, University of Minho, Braga, Portugal.

Squalli, H., Larguier, M., Bronner, A. et Adihou, A. (2020). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 22(1), 36-62. <https://doi.org/10.7202/1070024ar>

Vergnaud, G. (1986). A tentative conclusion. Dans C. Janvier (dir.), *Problems of representation in teaching and learning mathematics* (p. 227-232). Lawrence Erlbaum Associates.

Vergnaud, G., Cortes, A. et Favre-Artigue, P. (1988). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. Dans G. Vergnaud, G. Brousseau et M. Hulin (dir.), *Didactique et acquisition des concepts scientifiques. Actes du Colloque de Sèvres* (p. 259-279). Éditions la Pensée sauvage.

Verschaffel, L. et De Corte, E. (1996). Number and Arithmetic. Dans A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick et C. Laborde (dir.), *International Handbook of Mathematics Education* (p. 99-137). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_4

Documents officiels selon les pays

Bénin

Ministère des enseignements maternel et primaire du Bénin. (2004a). *La Mathématique au Cours Moyen Deuxième Année*. Nouvelle Presse Publications.

Ministère des enseignements maternel et primaire du Bénin. (2004b). *Programmes d'études de mathématiques au Cours Moyen Deuxième Année*. Direction de l'Enseignement Primaire.

Maroc

Ministère de l'Éducation nationale du Maroc. (2020a). *Manuel scolaire de mathématiques de Al Jaid Fi Arriyadiat, 6^e primaire*. Edition Librairie nationale.

Ministère de l'Éducation nationale du Maroc. (2020b). *Manuel scolaire de mathématiques d'Al Moufid, 1^e année du secondaire collégial*. Edition Librairie nationale

Ministère de l'Éducation nationale du Maroc. (1991). *Programmes et orientations pédagogiques de l'enseignement des mathématiques au premier et deuxième cycle de l'enseignement fondamental*. Direction de l'enseignement secondaire.

Ministère de l'Éducation nationale du Maroc. (2009). *Orientations pédagogiques du secondaire collégial*.

Ministère de l'Éducation nationale du Maroc. (2011). *Curriculum de l'enseignement primaire*.

Ministère de l'Éducation nationale du Maroc. (2020). *Curriculum de l'enseignement primaire*.

Tunisie

Ministère de l'Éducation nationale de Tunisie. (2020a). *Programmes officiels de l'enseignement primaire 2020* <http://www.education.gov.tn/?p=500&lang=fr>

Ministère de l'Éducation nationale de Tunisie. (2020b). *Mathématiques pour les élèves de 6^e année de l'enseignement de base*. Centre National Pédagogique. <http://cnp.com.tn/arabic/PDF/102609P00.pdf>

Annexe 1

Niveaux scolaires concernés par l'étude et Répartition des tranches d'âges selon les systèmes scolaires (France, Québec, Maroc, Bénin et Tunisie)

		Année terminale du primaire	Début du collège
Canada	Niveaux	6 ^e	1 ^{re} secondaire
	Âge des élèves	11-12 ans	12-13 ans
France	Niveaux	CM2	6 ^e collège
	Âge des élèves	11-12 ans	11-12 ans
Maroc	Niveaux	6 ^e	1 ^{re} secondaire collégial
	Âge des élèves	11-12 ans	12-13 ans
Bénin	Niveaux	CM2	6 ^e secondaire
	Âge des élèves	9 -11 ans	10-12 ans
Tunisie	Niveaux	6 ^e année de base	7 ^e année de base (1 ^{re} année de collège)
	Âge des élèves	11-12 ans	12-13 ans