# Processus d'abstraction et difficultés d'apprentissage en mathématiques : quelques repères théoriques

**Laurie BERGERON**
Université du Québec à Montréal, GEMAS
bergeron.laurie.2@uqam.ca
**Gustavo BARALLOBRES**
Université de Québec à Montréal, GEMAS et
Laboratoire CeDS (Cultures et Diffusion des Savoirs, EA-7440), Bordeaux
barallobres.gustavo@uqam.ca

**Résumé** : Un discours répandu affirme que les difficultés d'abstraction constituent un obstacle majeur à l'apprentissage des mathématiques. Malgré le fait que les institutions porteuses de ces discours omettent de questionner la signification même de l'expression « difficultés d'abstraction », elles vont tout de même effectuer des propositions d'interventions; l'impact de celles-ci sur la nature des savoirs enseignés semble ne pas être interrogé. Cet article, de nature théorique, tente de préciser les différentes significations accordées à l'abstraction, en particulier pour l'apprentissage des mathématiques selon différentes disciplines contributives des sciences de l'éducation afin de se doter de critères pour analyser les discours portant sur les difficultés d'abstraction en mathématiques en éducation.

*Mots clés : abstraction, fondements théoriques, didactique des mathématiques, conceptualisation*

**Abstraction process and learning difficulties in mathematics: some theoretical benchmarks**

**Abstract**: There is an omnipresent discourse asserting that difficulties with abstraction constitute a considerable barrier to mathematics learning. Even though the institutions characterized by these discourses fail to question the very meaning of the expression "abstraction difficulties," they will, all the same, propose interventions, and the impact of these interventions on the nature of the knowledge taught seems not to be questioned. This article, theoretical in nature, attempts to clarify the different meanings assigned to abstraction, in particular for mathematics learning, according to different disciplines that inform education science. The objective is to establish criteria by which to analyze discourses on abstraction difficulties in mathematics in education.

*Keywords: abstraction, theoretical foundations, mathematics education, conceptualization*

## Introduction

Un discours très répandu en adaptation scolaire stipule que les difficultés d’abstraction des élèves sont un obstacle majeur à l’apprentissage des mathématiques. Même si ces difficultés ne sont pas explicitées et définies dans les divers documents qui en font mention[1], elles sont habituellement associées à des problématiques intrinsèques aux élèves (cognitives, affectives, etc.). Compte tenu des orientations partagées que semble adopter le ministère de l’Éducation, les chercheurs s’inspirant de travaux de la psychologie cognitive et des programmes de formation, il est possible de constater la prégnance des idéologies mentalistes en enseignement[2] et plus particulièrement en enseignement auprès d’une population d’élèves en difficulté d’apprentissage (Bergeron, 2017; Bergeron et Barallobres, 2019). L’empreinte des cadres médical et psychologique, qui conçoivent les difficultés d’apprentissage strictement en termes de caractéristiques cognitives des élèves et des défauts dans les processus cognitifs mis en place, est remarquable dans les discours de la noosphère en éducation au Québec. En effet, pour enrayer les « difficultés d’abstraction » que pose l’apprentissage des mathématiques, diverses circulaires ministérielles du Québec et d’autres provinces du Canada (par exemple, Fédération des syndicats de l’enseignement, 2018; Gouvernement de l’Ontario , s. d.; Pelletier et Léger, 2004) proposent de morceler les tâches et de les choisir en fonction de leur lien avec le quotidien (le sensible). Ce que les interventions proposées (inspirées d’une conception empiriste de l’abstraction) ont en commun est la simplification de la complexité de la tâche via la réduction de l’abstraction (ex. la manipulation non nécessairement finalisée d’objets concrets) dans le but, d’une part de centrer l’action sur « le sensible » et, d’autre part, d’alléger la charge cognitive des élèves. En tant que stratégie générale indépendante de la nature du savoir ; cette « concrétisation des savoirs » (Barallobres, 2009; Giroux, 2013; Roiné, 2010) a une

1 Par exemple, la Fédération des syndicats de l’enseignement (2018) mentionne que les difficultés d’abstraction, de généralisation et de conceptualisation sont des manifestations d’une déficience intellectuelle, langagière ou même d’un trouble du spectre de l’autisme. Dans certains cas, la fédération explique l’origine de ces difficultés à un cerveau qui serait plus « concret ».

2 C’est-à-dire que l’apprentissage est considéré comme une appropriation individuelle et non comme une démarche collective, ce qui entraîne ainsi des recommandations orientées sur l’individualisation de l’enseignement et le traitement des capacités cognitives des élèves (Roiné, 2015).

incidence sur le sens des savoirs enseignés, surtout lorsque ce sens s'élabore à l'intérieur même de la discipline, rendant également implicite l'idée que la spécificité des savoirs est un élément secondaire (Bergeron, 2017).

Les analyses des discours institutionnels que nous avons menées dévoilent l'absence de questionnement quant à la signification même de l'expression « difficultés d'abstraction en mathématiques » (Bergeron, 2017). De quoi s'agit-il lorsqu'il est fait mention d'abstraction? Que doit-on comprendre par « abstraction en mathématiques » et par « difficulté d'abstraction en mathématiques »?

Dans le cadre de cet article, nous proposons une synthèse de la manière dont la philosophie, les mathématiques, la psychologie et la didactique des mathématiques abordent l'abstraction. Cet élargissement nous permettra d'élaborer un cadre d'analyse des difficultés d'abstraction en mathématiques dépassant le point de vue strictement psychologique.

## 1. Quelques repères théoriques sur les idées abstraites en philosophie

Les problèmes posés par les idées abstraites concernent les rapports entre « le monde matériel, sensible » et « la pensée, l'intuition » qui prennent des formes particulières au sein des différents courants philosophiques (Sylvand, 1999).

D'une part, le réalisme postule l'existence du « réel sensible » et suppose que l'esprit entre en contact immédiat avec le réel sensible par l'intuition sensible et que « l'abstrait », en tant que contenu propre de l'intellect, est « dans » le donné et est obtenu de ce donné par un processus d'analyse. Dans ce contexte, les idées abstraites, étant indépendantes du sujet, renvoient toujours au sensible, car elles apparaissent en tant qu'analyse ou comme un « schéma généralisant » du donné sensible et le sujet est en réceptivité passive puisque les objets et leurs propriétés se présentent à lui (Dondeyne, 1938a). Pour Reymond (1943), le cadre réaliste refuse au sujet toute capacité d'analyse sélective (chargée d'intentions), de généralisation ou même de synthèse constructive en le limitant à la seule capacité d'analyse, en bref, à une pensée passive. L'évolution des sciences et de la critique scientifique conteste cette version naïve de l'objectivité, en particulier les limites du fondement sensible dans la constitution de la connaissance scientifique, qui ne jouit pas de l'intemporalité que l'on souhaite lui attribuer.

À l'extrême opposé, l'idéalisme conteste l'idée d'un sujet réceptif « modelé » par l'objet externe et propose de le concevoir comme un pôle d'activité qui pose lui-même l'objet par des opérations de synthèse plutôt que d'analyse. La synthèse consiste à ajouter un concept à un autre (par l'expérience ou par l'intuition pure : les idées abstraites dépassent ainsi le contenu immédiat du sensible et leur schématisation. Bien que l’idéalisme ait eu le mérite de renverser le point de vue du réalisme en donnant un rôle central à la pensée en acte, il peine à dépasser les « limites du moi constructeur » (Dondeyne, 1938a), à expliquer l’existence de ce qui est « déjà-là » comme « fait » et à donner une place au sensible dans l’explication de la constitution de la connaissance.

D’une part, il est difficile de savoir quel rôle et quel caractère de vérité attribuer à des idées qui ne se fondent pas sur le réel, mais sur des principes de cohérence logique interne et, d’autre part, il n’est pas évident de comprendre comment l’activité intuitive à partir d’un donné concret pourrait servir de fondement pour des affirmations dont la portée dépasse nettement les propriétés immédiates de ce donné (Dondeyne, 1938a) :

> L’expérience nous apprend bien que quelque chose est de telle ou telle manière, mais non point que cela ne peut pas être autrement… Nécessité et stricte universalité sont les marques sûres d’une connaissance à priori. (Kant, 1781, cité dans Dondeyne, 1938a, p. 11)

Dondeyne (1938b) insiste sur le caractère actif et conceptuel de la pensée qui tire des informations d’expériences sensibles ou intuitives antérieures afin de les réintroduire à de nouvelles expériences. Le concept n’est pas le reflet de l’intuition ni des objets, mais il est plutôt une interaction entre sensible et intuition ainsi qu’une possession active, inachevée en constante croissance vers une compréhension totale du réel : « connaître, c’est posséder l’autre activement » (Dondeyne, 1938b, p. 351).

Dans ce déplacement vers la reconnaissance de l’existence de processus intellectuels où la pensée développe « en interaction » avec un certain « réel », des processus appelés d’abstraction prennent des formes différentes.

Delaunay (2016) distingue quatre formes de ce processus reflétant un travail formel de structuration du donné : l’abstraction par simplification permettant de négliger toutes les particularités d’un acte, de se détourner de toute considération concrète afin d’en retenir, par induction, une nature constante, une valeur, un sujet, une forme. L’abstraction par généralisation (constitutive de la conceptualisation), dans le cadre de laquelle l’esprit part des propriétés d’un objet (même complexes) pour remonter vers des propriétés plus générales, se fonde sur la logique des classes. L’abstraction par sélection consiste à isoler de l’intégralité du donné un aspect fragmentaire, un trait particulier. Par exemple, à partir d’une feuille de papier, il est possible de n’en retenir que l’aspect blanc en écartant son aspect rectangulaire et sa texture. L’abstraction par schématisation permet une modélisation d’un donné et sa formalisation, c’est-à-dire la décomposition et la recomposition d’un système de données permettant d’extraire du sensible, des éléments de forme (de l'information), à partir desquels, par abstractions successives, se construiraient des niveaux de complexité formés par des représentations de plus en plus symboliques donc détachées du sensible.

L'abstraction consiste ainsi à penser à part ce qui ne peut être donné à part (Reymond, 1943); dans cet acte, le langage joue un rôle fondamental, étant « le véhicule social de la pensée […] parce que la pensée est essentiellement sociale et communicable » (Dondeyne, 1938b, p. 346). Gonseth (1890-1975) représente ce processus comme « une synthèse dialectique entre appréhension d'une situation donnée et la façon dont on l'exprime » (cité dans Bkouche, 2012, s. p.). En parlant de « situation » et non d'objet, l'auteur souhaite souligner le fait que l'élaboration d'objets purement intellectuels (abstraits) n'est nullement indépendante des besoins propres à la situation : ces objets sont des outils pour l'appréhension de la situation. Les processus intellectuels d'abstraction sont conçus comme se développant à l'intérieur de situations (des exigences contextuelles, des finalités), dans le cadre d'une culture (mathématique, physique, etc.), et ce, par le biais du langage.

Prenons l'exemple donné par Bkouche (2012) : une expérience simple montre les ambigüités et les limites de la connaissance sensorielle dans la définition des idées de « chaud » et « froid » comme sensation captée par les sens. Devant trois récipients, le premier rempli d'eau froide, le second rempli d'eau chaude et, le troisième, d'eau tiède, une personne met sa main gauche dans le premier récipient et sa main droite dans le second, puis elle retire ses mains et les met toutes deux dans le troisième récipient. La main gauche aura une sensation de chaud, alors que la main droite aura une sensation de froid bien qu'elles plongent dans la même eau. Afin de préciser cette notion, on « invente » un concept pour déterminer le degré de chaleur d'un corps, la température et des appareils pour la mesurer. Le concept qui précise ce qui est chaud et ce qui est froid est loin d'être le précurseur de l'appareil qui le mesure, il est défini grâce à la construction de l'appareil. La notion sensorielle de chaleur disparaît et se précise ainsi derrière une notion « abstraite » définie de manière arbitraire qui devient un outil opératoire pour appréhender la problématique en question. C'est ainsi « l'abstrait » qui permet de mieux cerner « le concret » (et non pas quelque chose qui serait « extrait » du concret) et qui émerge d'un contexte spécifique.

## 2. L'abstraction en mathématiques

La question de l'abstrait en mathématiques est intimement liée à la nature même de cette discipline. Si plusieurs concepts en mathématiques se développent en lien avec des problématiques externes aux mathématiques, une dynamique d'enrichissement s'installe dans l'activité mathématicienne, caractérisée par l'obtention de résultats plus précis et plus sophistiqués nécessitant l'élaboration de définitions et d'arguments qui s'éloignent, peu à peu, des intuitions et des problèmes « réels » qui étaient sous-jacents à la construction de la théorisation. Autrement dit, les « situations » (dans le sens de Gonseth) au sein desquelles les objets mathématiques se produisent peuvent être internes aux mathématiques mêmes.

Les niveaux de théorisation sont habituellement accompagnés de formalisations axiomatiques à l'intérieur desquelles les objets originaux sont effacés ou mis de côté, au risque de considérer la connaissance mathématique comme un ensemble de formules symboliques dépourvues de significations. Cependant, comme Patras (2001) l'affirme, la revendication d'une fidélité inconditionnelle aux origines est dangereuse, car les contenus que les théorisations véhiculent risquent de cesser d'avoir du sens.

Un débat essentiel concernant la nature des objets mathématiques fait écho à celui de la philosophie : les mathématiques ne peuvent être réduites à une science empirique ni à un ensemble de règles et d'axiomes. Certains empiristes comme Mill (1843) considèrent que les notions mathématiques sont des notions empiriques qui portent sur des faits physiques, et que les propositions des mathématiques se fondent sur l'expérience; l'affirmation 3 = 2 + 1 porte sur le fait suivant : la totalité composée de trois éléments peut être divisée en une totalité de deux éléments et une autre d'un élément. Frege notera bien la difficulté de cette conception de l'arithmétique, en particulier en ce qui concerne la notion de nombre : si le nombre dénote la totalité, quelle dénotation attribuer à 0?

À l'opposé de l'empirisme radical, l'idéalisme de Leibniz (1646-1716) postule que les notions mathématiques sont de pures créations de l'esprit humain, des vérités de la raison. Ces notions n'ont pas de contenu factuel et on n'a nullement besoin de recourir à l'observation du monde extérieur pour les valider : elles sont des vérités nécessaires et a priori. La position rationaliste n'est pas exempte de difficultés : comment expliquer ce qui fait d'une proposition mathématique une vérité de raison accessible indépendamment de toute expérience?

Sortant de cette dichotomie, Bonnay et Dubucs (2011) proposent de considérer l'existence d'une certaine « expérience mathématique », de nature différente à l'expérience matérielle donnant lieu à des généralisations empiriques, et affirment que Kant (1724-1804) a cherché à construire une voie intermédiaire entre empirisme et rationalisme, en reconnaissant un rôle à l'intuition[3], mais sans que

3 Intuition pour Kant : représentation singulière, immédiate de quelque chose (si l'on met la main sur le feu, ce que l'on sent immédiatement est une intuition); toujours particulière, toujours

cette intuition fasse dépendre les vérités mathématiques des contenus empiriques :

> À nouveau, tout le problème est de comprendre comment nous pouvons nous appuyer sur une intuition apparemment empirique pour établir une connaissance qui, elle, n'est pas empirique… La solution de Kant est de supposer l'existence d'une intuition pure, l'intuition pure des formes de la sensibilité. L'idée de forme de la sensibilité repose sur la distinction de deux aspects des phénomènes : leur forme, qui correspond à la manière dont sont ordonnés les phénomènes les uns relativement aux autres, et leur matière, qui correspond à la sensation. Les formes de la sensibilité, que sont le temps et l'espace, sont a priori : elles ne dépendent pas d'une expérience, elles fondent au contraire la possibilité de l'expérience. (Bonnay et Dubucs, 2011, p. 5)

La thèse de Kant s'oppose à celle d'Hume (1711-1776) qui considérait que les mathématiques étaient des vérités analytiques distinguant les connaissances qui portent sur la réalité concrète, et les connaissances logiques et mathématiques, qui elles portent sur les idées de notre esprit et leur mise en relation. Les premières connaissances sont des vérités synthétiques a posteriori: elles sont variables, peuvent changer de statut de vérité et on a besoin de les vérifier, de recourir à l'expérience. Les connaissances logiques et mathématiques sont des vérités analytiques : elles ne portent pas sur le monde, elles ne sont pas sujettes à changement. Elles sont a priori et nécessaires. Kant affirme, pourtant, que les mathématiques sont a priori, mais pas analytiques. La logique, pour Kant, est purement formelle : science de la forme de penser en général, incapable de dire jamais quoi que ce soit sur le contenu ou la matière de pensée (Patras, 1996). Les mathématiques sont, par contre, une science d'objets et elles se réfèrent à des contenus de connaissances ; elles ne peuvent alors se réduire à la logique formelle.

Le programme intuitionniste de Kant (ainsi que l'empirisme de Mill) rencontre l'opposition de Frege et Russell pour qui les mathématiques peuvent être dérivées de la logique. L'approche logiciste, prétend que les mathématiques parlent de « tous les objets », mais accepte en même temps l'existence d'objets propres aux mathématiques et distincts des autres entités (les distinguant des formalistes). Russel et Frege partagent l'idée que les énoncés mathématiques ont un contenu

---

immédiate. Il y a deux types d'intuitions pour Kant : empiriques et pures. Les intuitions pures sont a priori, c'est-à-dire indépendamment de tout contenu empirique : il s'agit de la capacité à recevoir des intuitions qui tiennent à la forme de notre sensibilité. C'est la « structure d'accueil », la réceptivité, la condition a priori de toute intuition. Toute intuition empirique se plie à la forme de notre intuition. Le temps et l'espace sont des intuitions a priori (nous n'avons pas l'intuition de l'espace, l'espace est une intuition pure qui est la condition de toute autre intuition).

sémantique; une réalité externe au sujet qui n'est pas la réalité physique. Pour Frege, le contenu mathématique est une réalité en soi et c'est de leur adéquation à cette réalité que les règles tirent leur légitimation (les nombres sont des objets abstraits, existant indépendamment de nous). Les énoncés mathématiques cherchent ainsi à décrire une « réalité » que nous n'avons pas à construire ; ils sont vrais lorsque les objets auxquels ils se réfèrent ont bien les propriétés qu'ils leur attribuent (Dubucs, 2010). Le programme logiciste de Frege conduit cependant à une impasse lorsque Russell découvre un paradoxe : la solidité de l'édifice mathématique semble mise en question. Le risque de perte de certitude garantie par cette discipline favorise l'émergence de programmes alternatifs tendant à garantir la solidité de l'édifice mathématique comme le formalisme.

Pour le formalisme, l'important ce sont les règles auxquelles les objets mathématiques sont soumis et non la nature de ces objets. Le formalisme nie l'existence de toute autre entité que les signes concrets qui sont l'objet des manipulations du mathématicien. Pour Hilbert (1892-1943), les mathématiques sont simplement une manipulation symbolique, un jeu formel : tout est réductible à des symboles dépourvus de contenu. Ce qui importe pour le mathématicien formaliste n'est pas ce qu'exprime un énoncé, mais la recherche d'une démonstration respectant des règles précises et formulées à l'avance. Dans ce contexte, le développement de symbolismes à chaque fois plus puissants conduit les mathématiciens à explorer des mondes « abstraits » de divers ordres, abandonnant le type d'intuition auquel s'attachait Kant. Cependant, la constitution d'objets mathématiques par « manipulation symbolique » atteint ses limites lorsque le progrès de l'abstraction aboutit à l'introduction d'objets paradoxaux. À cette époque, Gödel (1906-1978) montre l'impossibilité de formaliser entièrement les mathématiques, et donc, l'impossibilité de les réduire à la logique. Pour Gödel, nos idées empiriques contiennent des éléments abstraits « qualitativement distincts des sensations » qui ne peuvent avoir leur origine dans les sensations. La perception sensible est pour Gödel une relation entre concepts et objet particulier perçu, alors que la perception mathématique est une relation entre concepts. Il établit l'impossibilité de construire les mathématiques de manière strictement syntaxique et affirme l'existence d'objets mathématiques, indépendants des actes et des dispositions de l'esprit humain, qui décrivent une réalité non sensible.

Les limites du formalisme qui suit l'échec des propositions kantiennes et du logicisme ouvrent de nouvelles voies à une épistémologie des mathématiques qui, tout en refusant de réduire les mathématiques à une science empirique, dépasse les questions des fondements et s'intéresse à l'analyse des traces constitutives de la pensée mathématique. Selon Patras (1996), la phénoménologie de Husserl a exploité la possibilité de construire une épistémologie postkantienne permettant d'expliquer comment les mathématiques peuvent, tout à la fois et sans contradiction, être une science axiomatique susceptible de descriptions formelles et en même temps, une science d'intuitions très diverses (intuitions sensibles, intuitions plus abstraites). L'analyse de la structure propre des actes en jeu dans l'expérience mathématique (ensemble d'actes à travers lesquels on a accès aux objets mathématiques) devient un enjeu fondamental dans cette nouvelle épistémologie. Ces analyses montrent qu'une seule couche d'actes ne suffit pas à rendre pleinement déterminée la connaissance des objets mathématiques : il n'y a rien d'analogue à la composante « sensorielle » de la perception sensible dans l'expérience mathématique (Bonnay et Dubucs, 2011). La question de l'abstraction émerge, dans cette perspective, de l'analyse des couches constitutives du contenu mathématique développée par le mathématicien dans le contexte d'une pratique culturelle spécifique. Il s'agit d'une posture qui réclame un contenu sémantique aux mathématiques, mais qui conçoit la réalité mathématique comme étant dépendante du mathématicien, de ses constructions, de l'activité, de l'expérience du sujet à l'intérieur d'une culture.

Si, pour Frege, une fois le concept construit, la façon dont nous formons le concept est effacée, pour Husserl, la pensée mathématique se construit par des abstractions successives, par idéalisation. L'étude de ces couches d'abstraction devrait pouvoir éclaircir ce que sont les mathématiques. Cependant, le progrès mathématique n'a pas montré la linéarité que Husserl imaginait et certains aspects de l'argument de Frege sont restés tout à fait pertinents : une fois les idéalités mathématiques constituées, elles existent par elles-mêmes et deviennent indépendantes du moment de constitution, réutilisables dans d'autres contextes, parfois inattendus. Un exemple représentatif concerne les travaux de la théorie de nombres sur les nombres premiers. Ces travaux, sans aucun lien dans leurs origines avec l'informatique, ont été repris par cette discipline et sont à la base de la cryptographie. Le sens des idéalités mathématiques appartient ainsi à la pratique mathématique, il évolue avec cette pratique et n'est pas fiché dans l'objet ni dans le processus de genèse original de l'objet (et non dans les intuitions fondamentales, à la manière de Kant). Les objets mathématiques prennent du sens dans l'usage fait à l'intérieur d'une pratique mathématicienne.

Patras (1996) explique que la définition d'un objet mathématique n'épuise pas sa signification : si l'on montre sa définition à un mathématicien, il pense aux spécialisations de ce concept, les problèmes où il intervient, les variations possibles de la notion, les problèmes non résolus impliquant la notion, etc. (cela dépasse les intuitions au sens naïf, car les mathématiques ne sont pas une science d'intuitions au sens de l'esthétique, mais une science de concepts).

Cherchant à éclaircir la nature des pratiques mathématiciennes, Gonseth définit le rapport des mathématiques au monde de l’expérience dans un processus faisant passer de la réalité à un schéma de cette réalité[4], un schéma étant un support écrit, dessiné qui tend vers l’abstraction, mais doit conserver une partie des relations qu’entretiennent entre eux les objets réels. Les schémas se construisent par le biais de signes, à différents niveaux de formalisation et conceptualisation (Bloch, 2014) et sont des repères marquant le passage de l’intuition à l’expérimentation par un processus de mathématisation. L’idée de dialectique est affirmée par le fait que ni l’objet concret ni le schéma abstrait n’offrent, à eux seuls, le « vrai » visage de la réalité : les notions intuitives évoluent sous l’influence de la schématisation lors de l’expérimentation, perdant ainsi une partie de ses attaches avec le réel et, par ailleurs, le schéma abstrait, par lui-même, ne peut pas représenter tous les détails de l’objet en question. Les objets mathématiques se constituent à l’intérieur de cette dialectique, par différentes couches de schématisation et d’abstraction.

Cette brève description des questions ontologiques et épistémologiques concernant les mathématiques permet de mieux situer une vision empiriste souvent implicite, mais assez répandue dans le milieu éducatif, concernant le rapport entre le « réel » et la construction d’objets propres à cette discipline. On y retrouve la dichotomie empirisme/idéalisme déjà mentionnée dans le paragraphe précédent et l’essai de la dépasser soit par la discussion sur la nature du contenu sémantique des énoncés mathématiques soit par l’analyse de l’activité mathématique et du rôle, et la nature de l’expérience mathématique engagée.

Lorsqu’il s’agit de penser à l’intervention auprès des élèves en difficulté en mathématiques, l’adoption implicite ou explicite d’une posture empiriste a comme conséquence un retour « au concret » (dans le sens du matériel physique), mais non pas dans le sens de déployer autour de ce concret une expérience dont l’intérêt porterait sur la structure des actes engagés, mais dans celui d’extraire, par la perception sensible, ce que l’objet donnerait à voir en termes de contenus mathématiques. L’accès aux objets mathématiques impliquerait alors principalement un seul aspect des processus d’abstraction identifiés par Delaunay. La synthèse présentée montre bien que l’activité mathématique comporte bien plus que cet aspect de l’abstraction, surtout ceux relatifs aux processus de généralisation et modélisation (schématisation) dans lesquels « le concret » est très souvent déjà mathématisé, déjà « abstrait ».

4 Si bien la notion de « réalité » n’est pas clairement définie, il faut noter que, selon les objets mathématiques en question, elle peut référer à des aspects déjà intrinsèquement mathématiques.

Nous défendons l'idée qu'une vision empiriste de la connaissance limite l'accès à une expérience mathématique fidèle aux pratiques mathématiciennes et collabore, d'une certaine manière, à renforcer les difficultés d'apprentissage : plus on revient au « concret matériel » -sans remonter vers l'abstrait structurant ce concret-, plus on s'éloigne de l'activité mathématique; moins les élèves ont la possibilité d'être exposés à l'abstrait (car ils ont de la difficulté), moins ils auront la possibilité d'y accéder et de développer une pratique mathématicienne.

## 3. Quelques points de vue psychologiques sur l'abstraction

L'œuvre de Piaget se situe, d'un point de vue philosophique, en continuité avec celle de Kant, mais elle se distingue par l'ambition de fournir un fondement empirique à ses propos. C'est, entre autres, par l'entremise des stades de développement ainsi que par ce qu'il nomme la pensée concrète et la pensée formelle que Piaget fonde l'approche développementale. La notion de schème est centrale dans cette théorisation : « [u]n schème est la structure ou l'organisation des actions telles qu'elles se transfèrent ou se généralisent lors de la répétition de cette action en des circonstances semblables ou analogues » (Piaget et Inhelder, 1966, p. 11). Piaget (1978) affirme[5] qu'il y a, au cours du développement du sujet, une continuité fonctionnelle entre ce qu'il appelle l'intelligence sensori-motrice à l'intelligence conceptuelle et accorde à l'expérience un rôle de toute première importance dans la formation des schèmes sensori-moteurs ou conceptuels. L'auteur distingue deux types d'expériences physiques et logico-mathématiques qui mènent à des connaissances relatives aux objets ou à des connaissances construites sur la base des actions effectuées par le sujet, et ces connaissances sont le produit de deux modes d'abstraction. D'une part, la connaissance physique est la résultante d'une abstraction « empirique » ou « simple » qui consiste à abstraire une ou plusieurs caractéristiques de l'objet étudié et d'autre part, « l'abstraction réfléchissante » mène aux connaissances logico-mathématiques et est le produit des inférences tirées des coordinations générales des actions du sujet sur les objets. C'est grâce aux deux modes d'abstraction que le sujet parvient à construire ses connaissances, à modifier ses schèmes et ainsi à passer d'un niveau élémentaire (expériences physiques) à un niveau supérieur (les expériences logico-mathématiques).

Quant à Vygotski, ce dernier associe les processus d'abstraction au développement des fonctions psychiques – mentales ou psychologiques selon les ouvrages – supérieures, étant le langage et l'apprentissage de concepts quotidiens et

5 Il faut noter qu'il s'agit d'une hypothèse de travail, laquelle, selon Bronckart (2007) n'a pas été prouvée par Piaget.

scientifiques deux éléments fondamentaux. Pour Vygotski, tout concept implique des actes de généralisations qui se distinguent par leur distance au concret et à l'abstrait ; les opérations mentales inférieures sont toujours des cas particuliers de l'opération supérieure. Par exemple, dans le domaine des mathématiques, « toute opération arithmétique est un cas particulier de l'opération algébrique » (Vygotski, 1934/2012, p. 305), en ce sens, l'algèbre se situe à un niveau supérieur puisqu'il est un champ de savoir plus abstrait et libère la pensée de ses attaches au concret en permettant d'opérationnaliser le raisonnement (Vygotski, 1934/2012). L'appropriation des concepts scientifiques se distingue de celle des concepts quotidiens par le fait que ceux-ci se présentent dans l'apprentissage scolaire et nécessitent un acte volontaire et non un besoin immédiat d'action sur la réalité, constituant un passage à l'acte conscient du sujet. En contexte d'enseignement, « on apprend à l'enfant ce qu'il n'a pas devant les yeux, ce qui dépasse infiniment les limites de son expérience immédiate, actuelle et potentielle » (Vygotski, 1934/2012, p. 307). Construction et concepts scientifiques et processus d'abstraction sont ainsi en lien puisqu'en étant plus clairement définis, les concepts scientifiques permettent une prise de conscience progressive des caractéristiques et des relations que l'on peut établir avec d'autres concepts. Cette prise de conscience est nécessaire pour permettre à l'élève une certaine maîtrise de ses actions afin d'établir des liens et d'identifier des ressemblances et des différences entre concepts, c'est-à-dire pour identifier des généralisations et construire des systèmes de concepts, en se distanciant des objets et phénomènes immédiats ou primitifs (Vygotski, 1934/2012).

Provenant de la psychologie piagétienne, mais en accordant un rôle fondamental aux savoirs spécifiques et à l'épistémologie des savoirs, Gérard Vergnaud propose, en 1990, une théorie qu'il qualifie de théorie psychologique du concept. Les éléments constitutifs de la théorie des champs conceptuels (TCC) sont les situations, les schèmes et bien sûr, les concepts. C'est à partir de ces trois éléments que l'auteur tente d'expliquer l'acte de conceptualisation chez le sujet. Selon l'auteur (Vergnaud, 1988, 1990) trois ensembles sont à considérer dans l'activité conceptualisante du sujet : S (le référent), I (le signifié) et ζ (le signifiant) : le premier ensemble (S) fait référence à la variété de situations qui permettent de donner du sens au concept. Le second (I) est celui des invariants opératoires qui sont constitutifs du fonctionnement des schèmes. Un schème est composé de règles d'action, d'anticipations/inférences et d'invariants opératoires (théorèmes-en-acte et concepts-en-acte)[6] et bien qu'ils soient souvent implicites, les invariants opératoires sont indispensables à l'acte de conceptualisation du sujet puisque, dans le cadre de la résolution de la tâche, ils organisent la recherche de l'information appropriée et vont également régir les inférences. Dans ce cadre constructiviste (Vergnaud était un élève de Piaget), c'est, entre autres, l'accommodation des schèmes qui permet aux sujets d'élaborer de nouveaux savoirs et de développer des compétences de plus en plus élevées.

S'inspirant des travaux de Piaget et de Vygotski, les travaux de Bruner (1966, 1993), centrés sur l'acquisition du concept, placent le sujet au centre de la construction de ses apprentissages. L'acte de conceptualisation, chez Bruner, relève d'une démarche de résolution de problème dans laquelle le sujet, influencé par la nature de la tâche ainsi que par le contexte, tente de définir les critères selon lesquels il va catégoriser des objets, des événements, des idées, etc. Cet auteur accorde une grande importance à l'étude des processus de classification, de catégorisation et d'acquisition de concepts dans la compréhension des processus d'abstraction. Il définit les concepts comme étant des catégories construites par le sujet dans la classification d'objets, d'idées ou d'événements de son environnement qui ont des attributs en commun, par l'entremise de trois modes de représentation. Le premier mode, nommé énactif, est celui dans lequel les informations sont représentées en termes d'actions dites habituelles et quotidiennes qui sont effectuées de façon procédurale. Le mode iconique (les représentations visuelles) est celui où le sujet construit des représentations qui sont indépendantes des actions qu'il est possible d'exercer sur les objets. Enfin, le mode de représentation symbolique est caractérisé par une construction qu'effectue le sujet qui est arbitraire et abstraite. En ce qui concerne les deux premiers modes, ils se construisent en interaction avec le milieu physique et les expériences concrètes alors que le troisième mode, quant à lui, est tributaire de la culture et est indissociable du langage.

Enfin, du côté de la psychologie cognitive, plus particulièrement des études concernant le traitement de l'information, il nous semble important de souligner les travaux sur l'acquisition d'un ordre supérieur de pensée inspirés, entre autres, des travaux de Bruner. Pour Ivie (1998), cet ordre implique l'utilisation de structures abstraites de pensée, l'organisation de l'information en un système organisé et intégré, et l'application de règles de logique et de jugement pour développer le raisonnement. Si l'apprentissage est ici considéré comme

---

6 Les théorèmes-en-acte et les concepts-en-acte sont deux des trois logiques des invariants opératoires, de type « propositions » et « fonctions propositionnelles ». Ils se construisent dans l'action et peuvent être utilisés sans toutefois être expliqués/formulés par le sujet.

« l'acquisition de connaissances organisées, intégrées systématiquement en mémoire à long terme » (Tardif, 1992, p. 44), elle est beaucoup plus que cela pour Tardif qui, en s'appuyant sur les travaux de Pressley et Harris (1990), met de l'avant que l'utilisation fonctionnelle des connaissances implique la mise en application de stratégies cognitives et métacognitives. Les stratégies cognitives permettent de résoudre la tâche donnée alors que les stratégies métacognitives assurent la mise en application des stratégies sélectionnées et leur contrôle. L'élève aurait ainsi à sélectionner les stratégies les plus efficaces parmi celles disponibles au sein du domaine étudié pour résoudre la tâche pour ensuite en contrôler leur exécution afin d'atteindre le but qu'il s'est fixé. Dans une telle perspective, l'analyse des savoirs en jeu est mise de côté pour prioriser la structure des informations à traiter.

Cette approche cognitiviste se distingue des précédentes approches puisqu'elle centre entièrement son objet d'étude sur la cognition et les structures mentales du sujet et fournit un modèle explicatif de la connaissance dont l'apport de la culture n'occupe pas une place fondamentale; la construction d'un ordre supérieur de pensée est plutôt théorisée en tant qu'activité à la charge de l'apprenant et de l'efficacité des stratégies cognitives et métacognitives qu'il met en œuvre. Au sein de cette approche, le rôle de l'enseignant est d'expliciter les différentes stratégies et de rendre les élèves « conscients » de l'efficacité de leurs stratégies.

À la différence de la psychologie cognitive, Vygotski, Vergnaud et Bruner s'intéressent tous les trois à l'apprentissage des savoirs scolaires; dans ce contexte, les processus d'abstraction et de généralisation sont fortement liés aux processus de conceptualisation caractérisant l'élaboration de savoirs spécifiques. Ces processus, bien qu'ils accordent une place fondamentale au sujet, ne s'y réduisent pas. Le rôle de l'environnement (situations et contexte) est ainsi fondamental pour les trois auteurs, même si sa nature peut varier d'un auteur à l'autre, certains attribuant un poids plus important au langage et à la culture.

Encore une fois, la perspective adoptée conditionne le regard porté sur les difficultés d'apprentissage (et les difficultés d'abstraction) ainsi que sur les formes d'intervention. Par sa posture épistémologique, la psychologie cognitive cherche à identifier des défaillances dans des processus mentaux et à agir à ce niveau à travers le développement de stratégies indépendantes de la spécificité des savoirs.

Vygotski, Vergnaud et Bruner, cependant, placent la conceptualisation, et en conséquence le rôle fondamental des savoirs tout comme des tâches et situations au sein desquels l'expérience de l'élève prend place, au centre de l'analyse des difficultés. Les interventions qui en découlent peuvent difficilement ignorer le contenu de savoir. En donnant un pas en avant, la didactique des mathématiques se situera dans une certaine continuité avec les travaux de ces auteurs.

## 4. Abstraction, conceptualisation et symbolisme selon différents courants de la didactique des mathématiques

Pour Dreyfus et al. (2001), l'abstraction est un processus de réorganisation des connaissances antérieures dans lequel le contexte et la constitution d'une nouvelle structure occupent une place fondamentale : « Nous considérons l'abstraction comme une activité de réorganisation verticale des connaissances mathématiques précédemment construites dans une nouvelle structure. L'abstraction est donc un processus dépendant du contexte » (p. 307, traduction libre[7]). Ces processus sont considérés comme une activité constituée de trois actions épistémiques dans laquelle de nouvelles relations sont établies permettant l'élaboration de connaissances plus développées (Dreyfus et al., 2001). L'action de « reconnaître » (*recognising*) une structure mathématique familière fait appel aux situations déjà vécues par l'élève qu'il peut lier en vérifiant qu'elle correspond, en partie ou totalement, à la nouvelle situation qui lui est présentée. L'étape centrale de l'abstraction, « assembler » (*constructing*), consiste à lier les connaissances déjà reconnues et les artéfacts de la connaissance[8] dans le but d'en produire une nouvelle structure plus abstraite, mais qui deviendra plus familière pour l'élève (par l'usage et la fréquentation). Finalement, l'activité de « construire avec » (*building-with*) demande la combinaison des artéfacts de la connaissance existants pour atteindre un but comme la résolution d'un problème ou la justification d'une proposition. Observons que la description des trois actions épistémiques constituant l'abstraction est centrée sur l'élève comme si, d'une certaine manière, ces trois actions lui étaient intrinsèques; le rôle de l'enseignant comme représentant de la culture mathématique ainsi que la nature des situations auxquelles l'élève est confronté ne sont pas mentionnés explicitement.

Sfard (1991) affirme que l'apprentissage des mathématiques consiste en un processus dialectique entre une conception opératoire (procédurale) et une conception structurelle (conceptuelle) de la même notion mathématique. La

7 We take abstraction to be an activity of vertically reorganising previously constructed mathematical knowledge into a new structure. Abstraction is thus a context dependent process (Dreyfus et al., 2001, p. 307).

8 Les artéfacts de la connaissance (knowledge artefacts) peuvent être tangibles (des documents, des images, des objets) et intangibles (pensées, conversations, métaphores). L'utilisation des artéfacts de la connaissance permet de partager, mais également de transférer les connaissances (Abuhimed et al., 2013).

conception opératoire réfère à des procédures, des actions et des algorithmes. La notion mathématique est donc perçue comme une possibilité plutôt qu'une entité et elle prend forme à partir d'une requête dans une séquence d'actions ; la conception structurelle des notions mathématiques correspond à les traiter comme des entités abstraites, à pouvoir s'y référer en tant qu'objet, à une idée manipulable comme un tout sans avoir besoin d'entrer dans les détails. En s'appuyant sur une analyse historique et cognitive, Sfard (1991) fait l'hypothèse que la conception opératoire précède la conception structurelle. De ce fait, plusieurs degrés d'abstraction/structuralisation séparent et lient les deux conceptions dans le développement des concepts. La première étape de l'activité de la formation des concepts mathématiques, « l'intériorisation », est celle où l'apprenant se familiarise avec la procédure pour acquérir, éventuellement, un nouveau concept. Durant l'étape de « condensation », l'élève peut considérer une certaine procédure comme un ensemble sans avoir à recourir à des exemples particuliers et peut passer d'une représentation à une autre du concept, tout en étant toujours très attaché à la procédure. C'est lors de la « réification » que l'élève considère les différentes représentations qu'il avait du concept en une seule représentation (généraliser) : l'intériorisation de concepts de plus haut niveau commence. Cette nouvelle entité créée n'est plus considérée en tant que procédure, mais en tant qu'objet faisant partie d'une catégorie permettant d'en étudier les propriétés. À différence du modèle précédent, l'analyse épistémologique en tant que référence sur les modes de production des objets mathématiques organise les étapes de l'apprentissage. Cependant, la description des processus de construction des objets mathématiques ne fait pas intervenir explicitement l'organisation de l'enseignement, ni la spécificité des situations didactiques et du savoir qui les détermine.

Encore centrés sur le point de vue des sujets, mais en donnant une place très importante aux processus sémiotiques et à la culture mathématique, Radford et al. (2009) considèrent l'abstraction en mathématiques comme un processus qui ne porte pas sur des objets, mais sur des symboles les représentant et leurs relations. Radford (2001, 2004) accorde un rôle fondamental à la généralisation, en tant que processus sémiotique, dans la formation des objets mathématiques et souligne le fait que l'objet du savoir n'est pas directement acquis par nos sens, mais plutôt par des modes culturels de signification (sens), à travers « la technologie de l'activité sémiotique » (langage, écriture, formules, graphiques). L'interaction entre les symboles et les idées doit être conçue comme un système de relations construit par l'élève dans son cheminement intellectuel à la fois individuel et social, demandant un détachement de l'objet concret et la construction d'objets mentaux et de structures de référence qui se réalisent par des processus d'abstraction et de généralisation (Radford, 2001 ; Radford et Grenier, 1996 ; Steinbring, 2006). Ainsi, l'abstraction et la généralisation sont des processus considérés comme étant « des moteurs » de l'activité mathématique et, par conséquent, de l'activité sémiotique. De façon complémentaire, les travaux plus récents de Radford (2020) placent au centre des questionnements sur l'enseignement et l'apprentissage la question du travail conjoint entre enseignant et élève(s). Au sein de la théorie de l'objectivation, l'apprentissage est considéré comme phénomène collectif ancré dans un contexte social et culturel où le savoir, en tant que systèmes de pensée et d'action formés historiquement et culturellement, nous oppose sa présence. L'objectivation est ainsi le processus social, corporel, matériel et symbolique de prise de conscience par lequel nous tentons d'effacer l'altérité entre soi et le savoir. Selon Radford (2020), ce processus dépend de l'activité au sein duquel il prend place qui ne se réduit pas seulement à l'objet de l'activité, mais dans le travail conjoint entre enseignant et élèves où chacun se réalise dans son rapport à l'autre.

Dans les travaux du courant anglo-saxon, il est possible d'identifier un changement de perspective dans la conception des processus d'abstraction/généralisation, dépassant le point de vue strictement psychologique et proposant une approche sémiotique de l'activité mathématique qui tient compte des modes culturels de signification et qui, plus récemment, accorde une importance particulière aux formes d'interactions dans l'activité conjointe. Cependant, même si le rôle du contexte culturel est mentionné dans plusieurs travaux du courant anglo-saxon, il semble difficile d'identifier la manière spécifique dont il intervient effectivement dans les analyses de l'activité d'enseignement-apprentissage des mathématiques. Dans certains cas, les processus d'abstraction/généralisation semblent attachés à des intentionnalités propres aux sujets individuels et la nature des tâches, la spécificité de l'activité mathématique institutionnelle, le contexte culturel et les caractéristiques spécifiques des processus d'enseignement apparaissent comme des éléments secondaires dans les explications fournies.

Dans le contexte de la didactique française, l'analyse des pratiques mathématiques, impliquant des processus d'abstraction/généralisation, se produit à l'intérieur d'une approche structurelle qui donne un rôle fondamental à l'analyse épistémologique du savoir et aux pratiques institutionnelles au sein desquelles le savoir se développe.

Au sein de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1994), la compréhension d'un concept est dépendante des techniques associées et de leur mise en application à l'aide d'objets ostensifs régulés par des objets non ostensifs émergeant de la praxis humaine. Les ostensifs sont des objets de nature sensible ayant une certaine matérialité qui peuvent être manipulés (pas simplement par le toucher, mais aussi la voix, le regard) et qui sont accessibles par les sens. Ils sont la partie perceptible de l'activité mathématique (sons, graphismes, gestes) et possèdent une valence instrumentale signifiant qu'ils permettent de travailler ainsi que d'agir et une valence sémiotique permettant de produire du sens et de communiquer, tandis que les non-ostensifs renvoient à ce qui ne peut être manipulé à proprement parler comme des concepts et des idées, mais qui sont évoqués par l'entremise de la manipulation d'ostensifs. Les non-ostensifs règlent les manipulations et permettent de justifier et d'expliquer les actions de la technologie et/ou de la technique. C'est par l'entremise des ostensifs (le sensible) et des non-ostensifs (l'abstrait) qu'une nouvelle technique peut être construite dans le but d'accomplir une tâche et que le savoir a une fonction technologique (justification des techniques), le tout, articulé et influencé par l'institution.

Si, dans la théorie anthropologique du didactique, il n'y a pas de mention directe des processus d'abstraction et de généralisation, c'est parce que cette approche considère que la conceptualisation n'est pas tributaire de l'élève seul, mais bien de la praxis humaine à l'intérieur de laquelle l'individu évolue. Ces processus d'abstraction, associés à la manipulation dialectique des ostensifs/non-ostensifs, sont dépendants de la nature des organisations praxéologiques à l'intérieur desquelles la pratique mathématique de l'élève se développe. Cependant, dans la brève description effectuée, l'idée de « technique routinière » peut être associée à l'idée de « familiarité » d'un objet de la pensée (par la maîtrise des situations dans lesquelles cette technique est impliquée), et ainsi, des liens peuvent être établis avec le processus dialectique de conception structurelle-conception opératoire des objets mathématiques avancé par Sfard.

En étroit lien avec la théorie anthropologique du didactique, la théorie des situations didactiques (TSD) (Brousseau, 1998) offre un cadre plutôt microdidactique pour penser les situations d'enseignement en fonction des caractéristiques des savoirs, dans lequel la notion de milieu didactique, spécifique au savoir, occupe un rôle fondamental. Brousseau identifie trois dialectiques agissant en tant que fonctionnements distincts de la connaissance. La dialectique de l'action est la phase dans laquelle l'élève agit sur une situation qui lui pose problème et tente d'adapter ses stratégies en fonction des rétroactions que la situation lui donne. La dialectique de la formulation permet de formuler et de communiquer, à l'aide du langage mathématique, les connaissances en jeu lors de la phase précédente. Ainsi, au moins deux actants devront formuler sous une forme quelconque la connaissance dans le but de la convertir en savoir collectivement acceptable. Finalement, la dialectique de la validation, consiste à prouver, convaincre et théoriser ce qui aura été explicité lors de la phase de formulation. Bien que ces dialectiques permettent à l'élève de rencontrer le savoir en situation, il est important de le fixer de façon conventionnelle (Bessot, 2003 ; Brousseau, 1998 ; Sarrazy, 2006). C'est le processus d'institutionnalisation, effectué par l'enseignant et les élèves, qui favorise la décontextualisation et l'émergence d'une connaissance qui pourra être identifiée et réinvestie dans d'autres contextes (domaine de validité) et qui prendra un statut de savoir.

La TSD n'aborde pas de façon explicite les processus d'abstraction/généralisation; cependant, c'est par l'entremise des dialectiques de formulation et de validation ainsi que par l'institutionnalisation que les processus de conceptualisation, et alors d'abstraction et de généralisation prennent forme. Butlen et Pezard (2003) s'intéressent, dans le contexte de la TSD, à la conceptualisation et plus particulièrement aux étapes intermédiaires qui la sous-tendent dans le cadre de l'organisation de l'enseignement. Selon ces auteurs, la conceptualisation est le processus final d'une série d'activités intermédiaires du processus de décontextualisation. Ainsi, c'est à travers la généralisation, le changement de contexte et la formalisation que la décontextualisation s'opère et qu'elle mène à la conceptualisation. Correspondant à des degrés différents, ces activités intermédiaires permettent de passer de l'exemple concret à un énoncé formel ou à une définition et elles sont considérées comme une activité collective propre à chaque classe plutôt que comme une activité dont la responsabilité et le bon déroulement sont imputés à l'enseignant. La conceptualisation s'effectue en grande partie grâce au dialogue (dans les phases de formulation, en particulier) par l'organisation spécifique de l'enseignement et par le passage à l'écrit dans le cadre desquels les élèves doivent se décentrer de leurs expériences personnelles pour rendre compte des savoirs élaborés dans le cadre des tâches rencontrées (phases de validation et phases d'institutionnalisation des savoirs).

## 5. Quelques clés de lecture pour analyser les injonctions scolaires

À la lumière des postures des différentes disciplines à propos de l'abstraction, il est possible de faire ressortir certains éléments qui nous semblent clés afin, à la fois de mieux comprendre ce que signifie abstraire en mathématiques, mais également aux fins de réfléchir à ce qu'implique « avoir des difficultés d'abstraction ». Il importe de mentionner que les formes d'abstraction décrites par les auteurs dépassent l'idée empiriste d'« extraction » de quelque chose « du concret ». Des thèmes récurrents, outre celui de l'activité cognitive du sujet, tels que le langage, la situation, le but poursuivi, la culture et le contexte deviennent incontournables dans l'explication de la nature et des modes d'accès auxdites formes.

La question du « contenu » des idées abstraites, de leur nature, de leurs modes de représentation et de leur caractère de vérité prend des caractéristiques spécifiques lorsqu'il s'agit de mathématiques. Si l'abstraction implique de penser à part ce qui ne peut pas être donné à part, il en résulte que la pensée joue un rôle fondamental dans la constitution de ces idées ; dans ce « penser à part », les objets (matériels ou idéaux) occupent une place importante. C’est donc l’interaction entre intuition et objet qui devient un enjeu fondamental pour penser les processus d’abstraction.

Lorsqu’il s’agit des objets de savoirs spécifiques, l’abstraction apparaît associée à la généralisation et à la conceptualisation. L’accès aux objets mathématiques, dont le caractère est essentiellement opératoire, n’est pas uniquement une question de perception, mais de « faire » et « refaire » des exercices et des problèmes. Les processus d’abstraction associés à la constitution d’objets mathématiques ne sont pas indépendants d’une certaine structure d’intentionnalité. Le rôle du symbolisme devient fondamental dans la constitution de la pensée mathématique, puisqu’il permet de décrire et d’objectiver, par des schématisations, les relations explorées. Ces schématisations deviennent ensuite objet d’étude en elles-mêmes donnant lieu à différentes couches d’abstraction/généralisation. Les généralisations impliquent des modalités de représentations distinctes permettant des éclairages différents à une même situation et de nouvelles constructions mathématiques plutôt que d’abstractions empiriques. Elles caractérisent l’activité mathématique et la distinguent d’un processus strictement algorithmique et deviennent, en même temps, autonomes à l’égard des actes qui les pensent.

Loin de l’associer à des aspects de la perception sensible, la synthèse épistémologique proposée laisse entrevoir que l’élaboration d’objets idéaux, réalisée toujours dans un contexte d’une pratique culturelle qui encadre les buts poursuivis, implique des paliers de structuration des données (qui ne sont pas nécessairement « sensibles ») et de formalisation et que l’objet abstrait, en tant qu’outil opératoire, n’émerge pas nécessairement du concret, mais qu’il peut, dans certains cas, mieux le cerner. C’est dans l’usage et la fréquentation des objets, à l’intérieur d’une pratique réglée, que les rapports entre « concret » et « abstrait » se précisent. L’analyse de cette pratique, des natures des expériences et des structures des actes qui les constituent devient fondamentale pour comprendre les processus de généralisation et d’abstraction propres aux mathématiques.

Du point de vue de l’apprentissage, le rôle de l’action du sujet dans la construction de nouvelles structures de pensée (par abstraction/généralisation), du langage et de la culture (en particulier du contexte scolaire) est différemment identifié par les auteurs. La place du langage, par exemple, distingue la position des différents chercheurs. Bronckart (2007), dans une perspective vygotskienne, montre chez Vergnaud et Piaget l’absence d’une définition de l’agir; il fait ressortir le fait que toute action collective, complexe et instrumentée demande un mécanisme d’entente (le langage). Ainsi, l’action sensée humaine est dépendante de l’activité langagière et est influencée (et non déterminée) par l’interaction avec des préconstruits sociaux auxquels s'ajoute la mise en place de capacités d'abstraction et de généralisation qui participent à la décontextualisation de la pensée : plus le sujet est confronté à des corpus de connaissances formelles, plus la pensée se développe.

Dans le cas particulier de l'apprentissage des mathématiques, les aspects sémiotiques jouent un rôle fondamental de par la nature même des objets impliqués. Les travaux des didacticiens cités en témoignent en rejoignant par ailleurs les propos philosophiques et épistémologiques déjà traités : la nécessité du détachement de l'objet concret dans la constitution des objets abstraits s'interprète bien à l'intérieur du cadre philosophique développé tout comme la dualité processus/objet et la notion de réification chez Sfard appellent à une analyse historico-épistémologique de l'évolution des notions mathématiques qui sont mises à l'étude au sein de l'institution scolaire. De la même façon, certains didacticiens tentent de préciser, au sein d'une approche historico-culturelle de l'apprentissage, le rôle des artéfacts, du corps et du concret dans l'apprentissage et ainsi d'éviter de tomber dans les écueils entre empirisme et idéalisme. Des approches, comme la théorie de l'objectivation, s'intéressent, entre autres, à la question de l'apprentissage dans le rapport entre soi et l'autre au sein du travail conjoint où la cognition est considérée comme *embodied* afin de réfléchir aux manières de développer différentes modalités à mettre en place en classe de mathématiques qui tiennent compte à la fois du savoir culturel, mais également du langage, des gestes, des actions sur les artéfacts (dont font partie les symboles mathématiques) ainsi que des formes d'imagination (Radford, 2017). De façon complémentaire, les aspects structuraux concernant les caractéristiques des pratiques mathématiques institutionnelles sont mis de l'avant par les théories francophones et permettent de mieux cerner les processus de conceptualisation impliqués dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

Au regard des différentes positions des courants étudiés, il nous est possible de considérer que l'abstraction en mathématiques ne peut se passer de l'étude des objets et des savoirs en jeu, des aspects langagiers et symboliques, du but poursuivi, des aspects historico-culturels et institutionnels au sein desquels la pratique mathématicienne prend place et des capacités cognitives des acteurs impliqués. Ces thématiques en interaction semblent incontournables pour expliquer et comprendre la nature et les modes d'accès aux formes d'abstraction, mais permettent également d'entrevoir que les « difficultés d'abstraction » peuvent émerger d'un complexe de facteurs qui dépasse l'individu et ses caractéristiques cognitives. En ce sens, le terme « difficulté d'abstraction », qui dirige le regard vers la cognition de l'élève semble bien insuffisant pour aborder l'ensemble des phénomènes pouvant se produire en classe de mathématiques.

## En guise de conclusion

En début d'article, nous avons évoqué que bien que les difficultés d'abstraction soient attribuées aux capacités et déficits cognitifs des élèves au sein des discours institutionnels, cela se produit sans qu'une définition ou un questionnement de ses difficultés et même de l'abstraction en elle-même ne soit présenté par les institutions porteuses de ces discours. À l'issue des différents éléments de discussion, les difficultés d'abstraction peuvent difficilement être imputables aux seules caractéristiques cognitives des élèves. À elle seule, la perspective cognitiviste, pour aborder l'abstraction, semble conduire à une uniformisation des processus d'abstraction en lien étroit avec des processus de décontextualisation (permettant d'accéder à la structure de la connaissance) où les aspects afférents aux savoirs en jeu, au langage ainsi qu'au contexte sont occultés.

Les analyses épistémologiques mettent en évidence que toute décontextualisation s'accompagne d'une nouvelle contextualisation et ainsi, que les processus d'abstraction, même s'ils impliquent des processus de décontextualisation, se caractérisent surtout par des recontextualisations continuelles au sein d'une pratique mathématicienne variée qui produit de nouvelles significations.

La perspective pluridisciplinaire que nous avons entreprise pour aborder l'abstraction nous amène à proposer de poser un regard nouveau sur les discours portant sur l'apprentissage (et les difficultés d'apprentissage) des mathématiques et en particulier lorsqu'il est question d'abstraction et des difficultés d'abstraction afin d'en comprendre la trame (idéologique et théorique) sous-jacente ainsi que de pouvoir porter un jugement critique et avisé sur ces injonctions. En effet, comment les élèves peuvent-ils être amenés à abstraire si l'une des principales injonctions concerne la réduction de la complexité des tâches mathématiques proposées? Si la manipulation est souvent présentée par le ministère de l'Éducation (Gouvernement du Québec, 2006) comme activité permettant essentiellement d'accéder aux objets mathématiques, ceci suppose que le savoir mathématique est contenu dans l'objet et qu'il suffirait seulement de trouver la bonne représentation physique pour favoriser les apprentissages, et ce, sans spécifier la nature des objets à choisir (Bergeron, 2017). Ou encore, lorsque plusieurs circulaires ministérielles font référence au fait que l'abstraction est inhérente au développement des stratégies cognitives et métacognitives, ceci réfère à une posture selon laquelle les aspects cognitifs seraient préalables à l'abstraction plutôt que conjoints à une pratique mathématicienne orientée par des buts. Sans spécification relatives à ce que signifie abstraire, il est possible, à la lumière de la synthèse effectuée, de percevoir comment de telles injonctions peuvent créer certains glissements dans les méthodes d'enseignement mises en place et les apprentissages, mais également négliger certains aspects qui sont pourtant constitutifs d'une pratique mathématicienne.

Notre intention n'est point d'affirmer que ces propositions sont à tout coup néfastes, mais plutôt de souligner le fait qu'elles sont exemptes de considérations théoriques importantes au regard d'aspects inhérents à l'abstraction. Dans une telle perspective, il semble important d'appeler à une vigilance épistémologique quant à certaines propositions d'intervention en lien avec les fondements qui sous-tendent les difficultés d'abstraction mentionnées au sein de multiples discours ministériels et pédagogiques afin d'étudier les impacts possibles de ces pratiques sur le plan des niveaux de conceptualisation des objets mathématiques et le sens des savoirs enseignés et appris.

## Références

Abuhimed, D., Beheshti, J., Cole, C., AlGhamdi, M. J. et Lamoureux, I. (2013). Knowledge artefacts: Lessons learned and Stories as a means to transfer knowledge amongst cohorts of high school students working on an inquiry-based project. *Proceedings of the Association for Information Science and Technology, 50* (1), 1-4.

Barallobres, G. (2009). Caractéristiques des pratiques algébriques dans les manuels scolaires québécois. *Petit x, 80*, 55-76.

Bergeron, L. (2017). Difficultés d'abstraction en mathématiques : certains fondements théoriques et idéologiques du discours noosphérien de l'adaptation scolaire. [Mémoire de maitrise, Université du Québec à Montréal]. Archipel. https://archipel.uqam.ca/11131/

Bergeron, L. et Barallobres, G. (2019). Les modèles d'enseignement en adaptation scolaire en mathématiques : à la recherche du savoir perdu. *Chroniques - Fondements et Épistémologie de l'activité mathématique* [en ligne]. https://jfmaheux.uqam.ca/chroniques/2019/03/22/savoirperdu/

Bessot, A. (2003). Une introduction à la théorie des situations didactiques : Masteur « Mathématiques, Informatiques » de Grenoble 2003-2004. *Cahier du laboratoire Leibniz, 91*, 1-28.

Bkouche, R. (2012). *Abstrait vs concret, une opposition ambiguë* [notes de cours]. IREM de Lille.

Bloch, I. (2014). Concepts, objets, symboles, enseignement de mathématiques… Quelques réflexions sur l'épistémologie et la didactique. *Cahiers rationalistes, 631*, 1-8.

Bonnay, D et Dubucs, J. (2011). La philosophie des mathématiques. Dans A. Barberousse, D. Bonnay et M. Cozic (dir.), *Précis de philosophie des sciences* (p. 293-349). Éditions Vuibert.

Bronckart, J. -P. (2007). De l'activité collective à l'action et à la pensée individuelles pour une psychologie fermement vygotskienne. Dans M. Merri (dir.), *Activité humaine et conceptualisation : questions à Gérard Vergnaud* (p. 121-141). Presses universitaires du Mirail.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Éditions la Pensée sauvage.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Belkapp Press.

Bruner, J. S. (1993). *Le développement de l'enfant : savoir dire, savoir faire*. Presses universitaires de France.

Butlen, D. et Pezard, M. (2003). Étapes intermédiaires dans le processus de conceptualisation en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 23*(1), 41-78.

Chevallard, Y. (1994). Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique. *Actes du séminaire de l'Associazione Mathesis*, 190-200.

Delaunay, A. (2016). Abstraction. Dans *Universalis éducation*. https://www.universalis.fr/encyclopedie/abstraction/

Dondeyne, A. (1938a). L'abstraction. *Revue néo-scolastique de philosophie, 41*(57), 5-20.

Dondeyne, A. (1938b). L'abstraction (suite et fin). *Revue néo-scolastique de philosophie, 41*(59), 339-373.

Dreyfus, T., Hershkowitz, R. et Schwarz, B. (2001). The construction of abstract knowledge in interaction. *Proceedings of the 25th Annual Meeting of PME, Volume 2,* 377-384.

Dubucs, J. (2010). L'« absence » des objets mathématiques. Dans J.-T. Desanti, D. Pradelle et F-D. Sebah (dir.), *Sur l'aphilosophie des mathématiques* (p. 160-173). Éditions Trans-Europ-Repress.

Fédération des syndicats de l'enseignement. (2018). *Référentiel : Les élèves à risque et HDAA*.

Giroux, J. (2013). Étude des rapports enseignement/apprentissage des mathématiques dans le contexte de l'adaptation scolaire : Problématique et repères didactiques. *Éducation et didactique*, *7*(1), 59-86.

Gouvernement de l'Ontario. (s. d.). *À l'écoute de chaque élève grâce à la différenciation pédagogique.* Ministère de l'Éducation. http://www.edu.gov.on.ca/fre/teachers/studentsuccess/aecoutepartie1.pdf

Gouvernement du Québec. (2006). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, premier cycle*. Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.

Ivie, S. D. (1998). Ausubel's learning theory: An approach to teaching higher order thinking skills. *The High School Journal*, *82*(1), 35-42.

Mill, J. S. (1843). *Système de logique déductive et inductive*. Pierre Mardaga.

Patras, F. (1996). Phénoménologie de la connaissance mathématique. Dans J.-F. Courtine (dir.), *Phénoménologie et logique* (p. 109-121). Presses de l'École nationale supérieure.

Patras, F. (2001). *La Pensée mathématique contemporaine*. Presses universitaires de France.

Pelletier, E. et Léger, C. (2004). *Les troubles d'apprentissage : Guide pour les enseignants*. École Marguerite-Bourgeoys.

Piaget, J. (1978). *La formation du symbole chez l'enfant* (8e éd.). Delachaux et Niestlé.

Piaget, J. et Inhelder, B. (1966). *La psychologie de l'enfant*. Presses universitaires de France.

Pressley, M. et Harris, K. (1990). What we really know about strategy instruction. *Educational leadership, 48*(1), 31-35.

Radford, L. (2001). The historical origins of algebraic thinking. Dans R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell et R. Lins (dir.), *Perspectives on school algebra* (p. 13-36). Springer.

Radford, L. (2004). La généralisation mathématique comme processus sémiotique. Dans G. Arrigo (dir.), *Atti del Convegno di didattica della matematica 2004* (p. 1-27). Divisione della Scuola.

Radford, L. (2017). The multimodal material mind: Embodiment in mathematics education. Dans J. Cai (dir.), *First compendium for research in mathematics education* (p. 700-721). National Council of Teachers of Mathematics.

Radford, L. (2020). Le concept de travail conjoint dans la théorie de l'objectivation. Dans M. Flores González, A. Kuzniak, A. Nechache, et L. Vivier (dir.), *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz, 21*, 19-41.

Radford, L., Demers, S. et Miranda, I. (2009). *Processus d'abstraction en mathématiques : repères pratiques et conceptuels*. Centre franco-ontarien de ressources pédagogiques.

Radford, L. et Grenier, M. (1996). Entre les choses, les symboles et les idées… une séquence d'enseignement d'introduction à l'algèbre. *Revue des sciences de l'éducation, 22*(2), 253-276.

Reymond, M. (1943). Études critiques : l'abstraction et la nécessité selon M. Laporte. *Revue de théologie et de philosophie, 31*(128), 174-181.

Roiné, C. (2010). Caractérisation des difficultés en mathématiques des élèves de SEGPA. *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation, 4*(52), 73-87.

Roiné, C. (2015). La fabrication de l'élève en difficulté. Postulats et méthodes pour l'analyse d'une catégorisation dans le champ scolaire. *Éducation et socialisation, Les cahiers du CERFEE, 37*. https://doi.org/10.4000/edso.1138

Sarrazy, B. (2006). Fondements épistémologiques et ancrages théoriques d'une approche anthropo-didactique des phénomènes d'enseignement des mathématiques. Dans A.-C. Mathé et É. Mounier (dir.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (p. 79-99). IREM de Paris.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36.

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign? – An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 133-162.

Sylvand, B. (1999). La querelle des idées abstraites entre Locke et Leibniz et ses prolongements dans le débat contemporain. [Mémoire de maitrise inédit]. Université Sorbonne Paris IV.

Tardif, J. (1992). *Pour un enseignement stratégique. L'apport de la psychologie cognitive.* Éditions Logiques.

Vergnaud, G. (1988). Question de représentation et formulation dans la résolution de problèmes mathématiques. *Annales de didactique et des sciences cognitives, 1*, 33-55.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques, 10* (2.3), 133-170.

Vygotski, L. S. (1934/2012). *Pensée et langage* (F. Sève, trad.) (4e éd.). La Dispute.