Évolution des routines lors de la transition secondaire postsecondaire : cas de l'enseignement des fonctions trigonométriques et de leurs réciproques

Faten KHALLOUFI-MOUHA
Université de Carthage. Tunisie.
faten.khalloufi@fsb.u-carthage.tn

Résumé : En adoptant l'approche commognitive qui conceptualise l'apprentissage des mathématiques comme une modification dans l'activité discursive, nous avons utilisé le concept commognitif de routine comme unité d'analyse de l'apprentissage des fonctions trigonométriques et de leurs réciproques lors de la transition secondaire/postsecondaire. La conceptualisation des textes mathématiques proposés dans les manuels scolaires au secondaire et des notes de cours des enseignants au postsecondaire comme un discours nous a amenés à introduire le concept de routines visées comme unité d'analyse des manuels et des notes de cours utilisés pour l'enseignement des fonctions trigonométriques et de leurs réciproques. L'étude des routines visées par l'enseignement lors de cette transition permet d'identifier une continuité globale apparente, mais également des discontinuités ponctuelles associées aux routines relatives à l'étude des propriétés des fonctions trigonométriques et de leurs réciproques. L'étude des routines exécutées par les étudiants en réponse au questionnaire proposé fait apparaitre des difficultés importantes lorsque les tâches associées sont proposées dans un contexte différent de celui du secondaire.

Mots clés : fonctions trigonométriques, réciproques de fonctions trigonométriques, transition secondaire/postsecondaire, commognition, routines visées

The evolution of routines in the secondary/postsecondary transition: The case of teaching trigonometric functions and their reciprocals

Abstract: Adopting the commognitive approach that conceptualizes mathematics learning as a change in discursive activity, we used the commognitive concept of routine as a unit of analysis of the learning of trigonometric functions and their reciprocals in the secondary/postsecondary transition. Conceptualizing the mathematical texts found in textbooks at the high school level and teachers' lecture notes at the post-secondary level as a discourse led us to introduce the concept of intended routines as a unit of analysis of textbooks and lecture notes used to teach trigonometric functions and their reciprocals. An examination of the intended routines during this transition brings to light an apparent overall continuity, but also occasional breaks associated with routines related to studying the properties of trigonometric functions and their reciprocals. Analysis of the routines performed by the students in response to the proposed questionnaire reveals significant difficulties when the associated tasks are proposed in a context different from the secondary (high school) context.

Keywords: trigonometric functions, reciprocals of trigonometric functions, secondary/postsecondary transition, commognition, intended routines.

Introduction

L'enseignement des mathématiques dans la transition secondaire/postsecondaire a suscité l'intérêt d'un nombre important de chercheurs dans le domaine de la didactique des mathématiques (Biehler et al., 2011; Corriveau, 2017; Gueudet, 2008; Gueudet et Vandebrouck, 2019; Nardi, 2008). Ces travaux ont abordé cette transition selon différentes approches et ils s'accordent sur l'existence d'une double rupture qui se traduit par une discontinuité dans les contenus ainsi qu'une discontinuité au point de vue didactique (des changements en lien avec les organisations didactiques, ainsi que des exigences et des méthodes d'enseignement). En se plaçant dans le cadre de l'approche commognitive (Sfard, 2008), nous avons choisi d'aborder la transition secondaire/postsecondaire à travers l'étude de l'évolution des routines visées par l'enseignement des mathématiques et d'identifier les difficultés des étudiants liées à cette évolution. Notre travail s'intéresse au cas des routines relatives aux fonctions trigonométriques et à leurs réciproques dans la transition entre le secondaire et la première année universitaire pour des étudiants en sciences de l'informatique.

En enseignement secondaire, les fonctions trigonométriques sont les premières fonctions périodiques et transcendantes que les élèves rencontrent. Ces fonctions qui se situent au carrefour de plusieurs cadres mathématiques (la géométrie, l'algèbre et l'analyse) sont connectées aux différents objets mathématiques appartenant à ces cadres (angle, arc, fonction, équation…) et mettent en relations différents registres sémiotiques et différents types de représentations (Khalloufi-Mouha, 2009, 2020; Khalloufi-Mouha et Smida, 2012). Dans nos travaux antérieurs (Khalloufi-Mouha, 2009, 2014, 2018; Khalloufi-Mouha et Smida, 2012), nous avons identifié l'importance des difficultés relatives à la construction d'une signification mathématique des fonctions trigonométriques qui soit cohérente avec les connaissances antérieures du cadre géométrique de la trigonométrie chez des élèves de 2e année de l'enseignement secondaire tunisien (16-17 ans). Nos analyses ont montré que l'enseignement proposé ne permet pas aux élèves de faire le lien entre la trigonométrie et les fonctions trigonométriques. Pour ce qui est de l'enseignement postsecondaire (universitaire), les fonctions trigonométriques et de leurs réciproques jouent un rôle important dans l'introduction et l'enseignement de l'Analyse. Cela apparait essentiellement dans leurs relations avec les intégrales, les séries numériques et les séries de Fourier qui sont considérées comme très importantes dans les études universitaires pour la plupart des disciplines scientifiques, notamment, la physique, l'architecture, la biologie, l'informatique et les différentes spécialités de l'ingénierie. Cependant, les travaux de recherches ont souligné que les étudiants continuent à rencontrer des difficultés importantes avec les fonctions trigonométriques et de leurs réciproques (Gueudet et Quéré, 2018; Mesa et Goldstein, 2017; Weber, 2005).

Dans son article, Weber (2005) a analysé l'apprentissage des fonctions trigonométriques pour deux groupes d'étudiants universitaires ayant suivi un enseignement selon deux approches différentes. L'enseignement au premier groupe a été donné par un professeur utilisant un cours magistral classique, tandis que le second groupe a reçu un enseignement selon un paradigme expérimental basé sur la notion de « procept[1] » de Gray et Tall (1994) et sur les théories cognitives qui conceptualisent l'apprentissage à travers les concepts de processus-objets. L'analyse d'entretiens menés auprès d'étudiants et d'un test papier-crayon ont mis en évidence que les étudiants ayant suivi le cours magistral ont développé une compréhension très limitée des fonctions trigonométriques. Leurs connaissances sont essentiellement de type procédural sans être liées à une signification mathématique. Cependant, les étudiants qui ont reçu un enseignement expérimental ont développé une compréhension plus approfondie (Weber, 2005). La plupart de ces étudiants ont réussi à utiliser leur compréhension des fonctions trigonométriques pour identifier et justifier leurs propriétés. Les

1 Un procept est un amalgame de trois composants : un objet mathématique, un processus qui produit l'objet mathématique et un symbole qui est utilisé pour représenter le processus ou l'objet. Cette notion a été introduite par Gray et Tall (1994) qui lui attribuent la définition suivante : « An elementary procept is the amalgam of three components: a process which produces a mathematical object, and a symbol which is used to represent either process or object. A procept consists of a collection of elementary procepts which have the same object » (p. 121).

étudiants interrogés ont pu opérationnaliser leurs connaissances sur le processus de calcul du sinus d'un réel pour justifier les propriétés de la fonction sinus. De plus, les réponses des étudiants interrogés ont indiqué qu'ils considéraient les expressions trigonométriques comme des procepts.

Mesa et Goldstein (2017) ont identifié l'existence de différentes significations relatives aux notions d'angles, de fonctions trigonométriques et de fonctions trigonométriques réciproques à travers l'étude des organisations proposées dans les manuels scolaires relatifs à l'ordre collégial (postsecondaire) pour l'enseignement de la trigonométrie. Ils supposent que cela pourra engendrer des difficultés chez les étudiants lors de la résolution de situations problèmes surtout que l'enseignement proposé dans ces manuels ne prend pas en charge les connexions nécessaires entre les cadres et les registres mis en jeu dans cet enseignement.

La problématique de l'articulation entre les différents cadres et registres lors de l'enseignement des fonctions trigonométriques a été également l'objet du travail de Gueudet et Quéré (2018). Leur étude a porté sur l'enseignement du thème de la trigonométrie dans les ressources en ligne proposées aux futurs ingénieurs (ingénierie électrique) en France, et cela en comparant l'utilisation de la trigonométrie en tant qu'outil, dans un cours d'ingénierie électrique, et le contenu des cours en ligne de mathématiques relatifs au chapitre de la trigonométrie, proposé aux futurs ingénieurs. Dans ce travail, les auteurs ont identifié l'écart entre les besoins relatifs aux notions de trigonométrie dans le cours d'électricité et les cours de mathématiques en lignes destinés à des étudiants de première année du cycle des ingénieurs. L'étude a porté essentiellement sur les connexions entre les cadres, les registres et les concepts mis en jeu. Les résultats ont fait apparaitre que bien que les cours analysés proposent certaines connexions entre les différents cadres et registres utilisés, leur connectivité n'est pas assez développée pour répondre aux exigences des cours pour des futurs ingénieurs. Cette connectivité se limite à une connexion entre les concepts et les registres sémiotiques mobilisés dans le premier cours et à une connexion entre le domaine de la physique et le domaine mathématique dans le second cours.

Les résultats des travaux précédents attestent que les difficultés des étudiants relèvent essentiellement d'un manque en ce qui a trait à l'habilité à faire des connexions entre les différents cadres, registres et concepts mis en jeu (Gueudet et Quéré, 2018), afin d'identifier les plus pertinents lors de la résolution d'une situation problème (Mesa et Goldstein, 2017). Les connaissances des étudiants restent ainsi à un niveau procédural (Weber, 2005) ne permettant pas une appréhension plus profonde articulant les cadres, registres et concepts relatifs aux fonctions trigonométriques.

Dans notre travail, en nous appuyant sur les résultats de ces travaux ayant abordé les difficultés en enseignement universitaire et sur nos travaux antérieurs sur l'introduction des fonctions trigonométriques en enseignement secondaire (Khalloufi-Mouha, 2014, 2018, 2020; Khalloufi-Mouha et Smida, 2012), nous avons choisi d'explorer, dans le contexte tunisien, en utilisant une approche discursive, l'enseignement des fonctions trigonométriques dans la transition secondaire/postsecondaire en Tunisie. Notre étude poursuit deux objectifs. Il s'agit d'abord d'étudier les changements quant aux exigences et aux attentes auprès des étudiants lors de leur entrée en première année de l'enseignement postsecondaire. Ensuite, le second but consiste à explorer si les étudiants entamant des études en sciences de l'informatique SI1, arrivent à identifier cette évolution et à individualiser[2] les nouvelles routines caractérisant la transition, et à les utiliser lors de la résolution des problèmes. Pour cette filière SI1, les fonctions trigonométriques constituent un outil mathématique très important, utilisé dans plusieurs modules de spécialité (l'étude des fibres optiques, la compression de fichiers numériques audios, vidéos, images…) Ces fonctions sont étudiées ainsi que leurs réciproques au cours du premier semestre où le module des mathématiques a pour objectif général de rappeler des connaissances déjà étudiées au secondaire et d'initier les étudiants au module d'Analyse qui commence au deuxième semestre.

Nous avons choisi d'aborder cette étude en adoptant l'approche commognitive qui conceptualise l'apprentissage des mathématiques comme un développement du discours (Sfard, 2008). L'apport de cette approche consiste essentiellement à fournir les outils théoriques et méthodologiques permettant de caractériser le discours relatif aux fonctions trigonométriques dans lequel les étudiants sont susceptibles de s'engager lors de la transition secondaire/postsecondaire. Le travail comporte deux parties. D'abord, nous commençons par une analyse de l'évolution des exigences et des attentes auprès des étudiants relatives à l'enseignement des fonctions trigonométriques à travers l'étude des routines visées par l'enseignement proposé dans les manuels de 3e (17-18 ans) et de 4e année de l'enseignement secondaire (18-19 ans). Pour l'enseignement universitaire, l'identification des routines visées est réalisée à partir de l'analyse des notes du cours d'Analyse ainsi que des séries de travaux dirigés (séries d'exercices associés aux différents chapitres étudiés) élaborés par le professeur responsable du module

2 « To individualize a discourse means to become able to communicate according to its rules, and to do so not only in conversations with other people and possibly with their help, but also while "talking" to oneself and solving one's own problems. Thus, to say that a person individualized mathematical discourse means that this discourse became a discourse of her thinking » (Sfard, 2008, p. 81).

d'Analyse du premier semestre pour des étudiants de première année universitaire en sciences de l'informatique à la Faculté des sciences de Bizerte. Dans la deuxième partie, et en nous appuyant sur les résultats identifiés dans la section précédente, nous avons élaboré un questionnaire afin de vérifier si les routines précédemment identifiées sont bien individualisées par les étudiants et si elles émergent à travers leurs réponses aux tâches proposées. Le travail est guidé par les deux questions de recherches suivantes :

Q1. Quels sont les changements du point de vue des exigences et des attentes auprès des étudiants en ce qui a trait aux fonctions trigonométriques et de leurs réciproques lors de la transition secondaire/postsecondaire, et comment ces changements s'expriment-ils dans les routines visées par les concepteurs des manuels au secondaire, et par l'enseignant conférencier au postsecondaire?

Q2. Quelles sont les caractéristiques des routines identifiées dans le travail des étudiants de la première année universitaire lors de la résolution de problèmes relatifs aux fonctions trigonométriques et de leurs réciproques?

1. Cadre théorique

La théorie commognitive (Sfard, 2008) est une approche discursive qui a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs dans le domaine de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques. Ce cadre, basé sur une perspective vygotskienne qui conceptualise l'apprentissage des mathématiques dans sa dimension socioculturelle, définit les mathématiques comme une activité de communication (Sfard, 2012) et l'apprentissage des mathématiques comme un développement du discours, comme une modification dans l'activité discursive. Selon cette approche, le discours mathématique sur les fonctions trigonométriques émerge lorsque les apprenants sont engagés dans une communication avec les autres ou avec eux-mêmes à propos de ces fonctions. Comme tout discours mathématique partagé par une certaine communauté, le discours mathématique scolaire sur les fonctions trigonométriques se distingue par quatre caractéristiques qui peuvent être classées en deux catégories selon leurs fonctionnements dans la communication. La première catégorie comporte les outils de la communication qui sont le vocabulaire (première caractéristique) et les médiateurs visuels (deuxième caractéristique) utilisés pour parler des fonctions trigonométriques, où le vocabulaire est défini par Sfard (2021) comme « un ensemble de signes de base appelés mots et de syntaxe, l'ensemble des règles permettant de combiner les éléments du vocabulaire en énoncés légitimes (ou significatifs) » (p. 46, traduction libre[3]). Les médiateurs visuels sont les supports visuels qui soutiennent la

3 A set of basic signs called words and of syntax, the set of rules for combining elements of vocabulary into legitimate (or meaningful) utterances (Sfard, 2021, p. 46).

communication comme les mots écrits, les symboles, les graphes. Pour l'enseignement des fonctions trigonométriques, nous distinguons les médiateurs visuels graphiques (le cercle trigonométrique et les représentations graphiques des fonctions trigonométriques et de leurs réciproques) et les médiateurs visuels symboliques tels que les expressions *sin(x), cos(x), tan(x), arccos(x), arcsin(x)* ou *arctan(x)*. La deuxième catégorie de caractéristiques comporte les produits de la communication à propos des fonctions trigonométriques et de leurs réciproques. Il s'agit des récits (troisième caractéristique) approuvés et des routines. Les récits approuvés comprennent les textes écrits ou oraux décrivant les objets et les processus ainsi que les relations entre eux et qui sont soumis à la validation, à la modification ou au rejet selon des règles définies par la communauté. Nous citons comme exemples les définitions, théorèmes et preuves. La quatrième caractéristique est l'ensemble des routines (*metarules*) qui comprennent les règles et les modèles d'actions régulièrement utilisés et bien définis par la communauté pour le perfectionnement du discours et l'élaboration de récits approuvés. Sfard (2008) élabore trois types de routines : les actions (*deeds*), les explorations (*explorations*) et les rituels (*rituals*) (p. 223-245).

Dans les travaux récents (Lavie et al., 2019), le concept de routine gagne en opérationnalité dans sa nouvelle définition et devient une unité d'analyse pour étudier l'apprentissage, non seulement des individus, mais aussi l'apprentissage collectif. Le concept de routine est « une unité d'analyse qui permet d'étudier l'apprentissage non seulement des individus, mais aussi de collectifs, et donc d'étudier les développements ontogénétiques et historiques. » (Lavie et al., 2019, p. 164, traduction libre[4]). Lavie et al. (2019) définissent la routine comme étant le couple tâche-procédure. La tâche indique ce qui doit être réalisé en exécutant la routine (ex. produire un récit approuvable sur les fonctions trigonométriques). La procédure est une prescription sur la façon dont cela pourrait être fait. Dans cette perspective, ces auteures conceptualisent l'apprentissage comme un processus progressif de routinisation des actions des apprenants et l'étude de l'apprentissage revient à l'étude du processus d'émergence et de développement des routines. Cela donne au concept de routine un aspect dynamique, puisqu'une routine n'est pas indépendante du temps, elle est plutôt introduite dans le contexte de performances spécifiques, permettant de faire le lien entre la façon d'agir de l'apprenant et ses expériences et ses connaissances antérieures. Ainsi, différentes personnes peuvent agir de façons distinctes dans une même situation et, par

4 A unit of analysis for investigating learning not just of individuals, but also of collectives, and thus for studying both ontogenetic and historical developments (Lavie et al., 2019, p. 164).

conséquent, des routines différentes peuvent être associées à une même tâche. Lavie et al. (2019) expliquent que

> la routine ne sera plus une construction abstraite, mais elle sera liée à une situation donnée et à une personne donnée. Nous dirons désormais qu'une routine exécutée dans une situation donnée par une personne donnée est la tâche, telle qu'elle est vue par la personne qui l'exécute, ainsi que la procédure qu'elle a mise en œuvre pour réaliser la tâche (p. 162, traduction libre[5]).

Cela donne ainsi un outil analytique permettant d'étudier l'apprentissage d'un objet mathématique par une personne à travers l'étude des routines exécutées lors d'une situation de communication ou une situation de résolution de problème. Les quatre caractéristiques du discours ne sont pas indépendantes. En fait, le discours relatif à un objet mathématique (les fonctions trigonométriques et de leurs réciproques dans le cas de notre étude) est lié à l'élaboration d'un ensemble de récits à propos de cet objet mathématique. L'élaboration de ces récits nécessite l'utilisation du vocabulaire associé ainsi que l'ensemble de médiateurs visuels permettant d'éclairer et d'appuyer ces récits. Les routines constituent les règles qui régissent l'utilisation du vocabulaire et des médiateurs visuels pour l'élaboration et la validation des récits.

Le cadre de l'approche commognitive est généralement employé dans le cas de l'analyse d'une communication orale comme le cas d'une discussion ou d'un interview. Très peu de travaux ont utilisé cette approche pour une analyse des textes écrits. Alshwaikh et Morgan (2013, 2018), Alshwaikh (2016) et Park (2016) ont utilisé l'approche commognitive pour l'analyse des manuels scolaires. Alors que Morgan et Sfard (2016) ainsi que Thoma et Nardi (2018) l'ont utilisée pour l'analyse des énoncés des examens. En se plaçant dans la lignée de ces travaux qui conceptualisent les textes mathématiques écrits comme un discours, notre travail se distingue par une analyse de l'évolution des routines à travers l'introduction d'un type particulier que nous avons désigné par « routines visées », et ce, dans l'objectif d'étudier les changements quant aux exigences et aux attentes auprès des étudiants autour des fonctions trigonométriques et de leurs réciproques, lors de la transition secondaire/postsecondaire. Nous avons désigné par « routines visées » l'ensemble des routines proposées dans un objectif d'enseignement spécifique. En se référant aux travaux de Lavie et al. (2019), les routines visées sont définies comme étant le couple tâche-procédure. Cependant, les routines visées sont évoquées à partir de leurs tâches, sans référence à une *task situation* particulière ou à une personne spécifique. Ce sont les routines telles qu'elles sont susceptibles

5 Routine will no longer be an abstract free-floating construct, but it will be tied to a particular task situation and to a particular person. We will now say that a routine performed in a given task situation by a given person is the task, as seen by the performer, together with the procedure she executed to perform the task (Lavie et al., 2019, p. 162).

d'être interprétées et réalisées par un expert[6] (enseignant) en utilisant les connaissances relatives au niveau scolaire en question. Les procédures sont décrites soit à l'aide d'algorithmes qui déterminent la façon d'agir, par exemple l'addition ou la multiplication de deux entiers, soit à partir des règles qui guident l'action de l'apprenant, par exemple les règles utilisées pour prouver des théorèmes ou définir de nouveaux termes mathématiques (Morgan et Sfard, 2016). Les routines visées englobent les routines visées relatives au niveau objet ainsi que celles relatives au niveau méta. Les routines visées relatives au niveau objet sont celles qui marquent les règles d'utilisation des objets mathématiques en jeu. Dans notre travail, il s'agit des règles d'utilisation des fonctions trigonométriques et de leurs réciproques dans un discours mathématique scolaire. Les routines visées du niveau méta comportent les règles relatives à l'établissement d'un résultat, les règles de justification et de preuve ainsi que les règles de généralisation. Ainsi, le concept de routines visées est susceptible d'être l'unité d'analyse de tout texte mathématique destiné à l'enseignement et à l'apprentissage des mathématiques (manuels, notes de cours, séries d'exercices, énoncés des examens, etc.). Dans ce travail, nous nous sommes limités aux routines visées relatives au niveau objet et aux règles d'utilisation des fonctions trigonométriques et de leurs réciproques lors de la transition secondaire/postsecondaire.

Nous admettons, dans notre travail, l'hypothèse que les exigences et les attentes de l'enseignement se traduisent dans les textes des manuels ainsi que dans les textes de cours proposés pour l'apprentissage des notions en jeu, à travers la mise en place de routines visées, dans lesquelles les apprenants sont amenés à s'engager lors de la résolution de problèmes. L'individualisation des routines visées par les apprenants est identifiée lorsqu'ils deviennent capables de les exécuter lors de l'activité mathématique[7] pour l'élaboration des récits approuvés. Ainsi, appréhender nos questions de recherche en termes de routines visées nous amène à identifier les changements en matière des routines relatives à l'enseignement des fonctions trigonométriques que les auteurs des manuels, au secondaire, et que l'enseignant universitaire, en première année universitaire, cherchent à instaurer.

2. Analyse de l'évolution des routines visées

Dans ce qui suit, nous présentons la méthodologie utilisée pour identifier des routines visées, l'analyse de manuels scolaires ainsi que l'analyse des notes de cours et de la série de TD proposés aux étudiants.

6 Il s'agit de notre interprétation en tant qu'enseignante chercheuse des tâches proposées.
7 Selon l'approche commognitive, l'activité mathématique consiste à produire des récits susceptibles d'être approuvés en exécutant un ensemble de routines appropriées.

2.1 Méthodologie de l'identification des routines visées

Dans l'enseignement tunisien, les fonctions trigonométriques commencent à être un objet d'enseignement dès la 3e année (17-18 ans). Pour cela, nous avons choisi d'analyser les manuels de 3e (17-18 ans) et 4e année (18-19 ans, la dernière année de l'enseignement secondaire) des sections scientifiques (Mathématiques et sciences expérimentales). Nous rappelons que dans le contexte tunisien, à chaque niveau scolaire, depuis la première année primaire jusqu'à la dernière année de l'enseignement secondaire, correspond un manuel officiel unique, utilisé comme une ressource pour les enseignants et comme un outil de travail pour les élèves. L'analyse du manuel de 3e année porte sur les parties « cours » et « exercices et problèmes » du 8e chapitre « Fonctions trigonométriques ». Pour le manuel de 4e année (tome 1), nous avons examiné les chapitres où les fonctions trigonométriques sont utilisées comme un objet mathématique déjà étudié et dont les routines associées sont susceptibles d'être exécutées par les élèves pour l'apprentissage de nouveaux objets mathématiques. Pour ce qui est de l'enseignement supérieur, nous avons analysé les notes de cours de l'enseignant conférencier, responsable du module de mathématique du premier semestre ainsi que les séries d'exercices associées.

Pour l'identification et l'analyse des routines visées pour l'apprentissage des fonctions trigonométriques, nous identifions les tâches proposées et les procédures susceptibles d'être utilisées pour accomplir ces tâches. L'analyse des routines est guidée par les questions suivantes :

Tableau 1. Méthodologie de l'identification et de l'analyse des routines visées

Composantes des routines visées	**Questions guidant l'analyse**
Catégorisation des tâches relatives aux fonctions trigonométriques et de leurs réciproques, dans lesquelles les élèves ou les étudiants sont amenés à s'engager et qui sont proposées dans les manuels et dans les notes de cours et les séries d'exercices proposées aux étudiants de 1re année, sciences de l'informatique.	Quels sont les domaines mathématiques mis en jeu? Quelles sont les différentes réalisations[8] des fonctions trigonométriques et de leurs réciproques? Quels sont les médiateurs visuels évoqués médiateurs visuels graphiques et/ou symboliques? Quels sont les objets et les concepts mathématiques mis en relation avec les fonctions trigonométriques?
Les caractéristiques des procédures routinières que les élèves ou les étudiants doivent être capables d'exécuter pour accomplir ces types de tâches.	Les procédures sont-elles algorithmiques ou heuristiques? Quel est le degré de complexité associé à ces procédures? Les procédures sont-elles implicites (à identifier par les élèves) ou explicites dans l'énoncé de l'activité proposée?

2.2 Analyse des manuels scolaires

L'analyse des chapitres relatifs à l'introduction et à l'étude des fonctions trigonométriques dans les manuels de 3e et de 4e année fait apparaitre l'existence de plusieurs réalisations de cet objet, qui font appel à différents types de médiateurs visuels (symbolique, tableau, graphique…). Les activités proposées utilisent ces différentes réalisations afin d'étudier les propriétés des fonctions trigonométriques et leurs relations avec les différents objets mathématiques. L'analyse en termes de routines visées a permis de les classer en trois catégories selon la nature de la propriété des fonctions trigonométriques : la première catégorie est celle mobilisant l'une des propriétés de localités introduites par Vandebrouck (2011) : globale, locale ou ponctuelle des fonctions trigonométriques. La deuxième catégorie est relative aux routines visées articulant entre elles deux de ces propriétés et la troisième catégorie est relative à celles articulant les trois aspects, global, local et ponctuel.

8 Sfard (2008) définit les réalisations comme « perceptually accessible objects that may be operated upon in the attempt to produce or substantiate narratives" about a signifier (p. 154).

- Catégorie 1 : cette catégorie comporte les routines visées associées à l'un des aspects ponctuel, local ou global des fonctions trigonométriques et de leurs réciproques. *Les routines ponctuelles* sont les routines essentiellement associées à des tâches de calcul des images de certains réels par une fonction trigonométrique ou celles de résolution algébrique ou graphique des équations trigonométriques où le travail est localisé en des points d'intersection. *Les routines locales* sont les routines visées faisant appel aux propriétés de voisinage (Montoya Delgadillo et al., 2018). Elles émergent dans les activités de l'étude de la continuité et de la dérivabilité, en un point donné, des fonctions trigonométriques simples ou composées avec des fonctions algébriques ou transcendantes. Selon les procédures de calcul des limites, on distingue deux sous-routines. L'une émerge lorsqu'il s'agit d'une application directe d'une limite usuelle et la seconde, lorsqu'il s'agit de procéder à une modification de l'expression de la fonction afin de faire apparaitre une limite usuelle à travers des minorations, majorations et encadrement avec des fonctions usuelles (théorèmes de comparaison). Le troisième type, désigné par *routines globales*, comporte les routines associées à la détermination de l'ensemble des définitions, l'étude de la continuité et de la dérivabilité sur un intervalle ainsi que l'étude des variations. Ces études, vu la propriété de périodicité des fonctions trigonométriques, sont généralement réduites à un intervalle, déterminé à partir de l'étude de la parité et la périodicité de ces fonctions. L'analyse des différents problèmes proposés au secondaire montre que, en général, l'intervalle d'étude est recommandé dans l'énoncé et sa détermination n'est pas à la charge des élèves, notamment en ce qui concerne les tâches de l'étude de l'existence d'une fonction réciproque où la procédure suggérée consiste à appliquer le théorème de la fonction réciproque dans un intervalle imposé par l'énoncé (figure 1).
- Catégorie 2 : les routines visées appartenant à cette catégorie sont essentiellement associées à la réalisation et à l'interprétation des médiateurs visuels graphiques relatifs aux fonctions trigonométriques qui articulent entre elles des routines ponctuelles (associées à la construction des points) et des routines globales (associées à la forme de la courbe). Il y a également les routines relatives aux activités de détermination et de construction des tangentes ou des asymptotes qui articulent le global et le local.
- Catégorie 3 : c'est la catégorie des routines visées qui articulent les trois aspects, ponctuel, local et global. Elle comporte, à titre d'exemple, les activités de réalisation de tableau de variation des fonctions trigonométriques simples ou composées avec d'autres fonctions.

L'analyse des manuels et des notes de cours, selon cette catégorisation, est synthétisée dans les tableaux suivants relatifs à la 3^{e} année, à la 4^{e} année et à la 1re

année universitaire. Dans ces tableaux, nous avons déterminé le nombre et le pourcentage des activités proposées nécessitant l'engagement des apprenants avec les routines visées relatives à chacune de ces catégories et qui font intervenir les fonctions trigonométriques et/ou leurs réciproques. Nous avons également identifié les principales routines visées en explicitant à chaque fois la tâche concernée.

2.2.1 Analyse du manuel de 3e année

L'analyse porte sur le chapitre 8 intitulé Fonctions trigonométriques (46 activités).

Tableau 1. Analyse des routines visées identifiées dans le manuel de 3e année

Catégories	Nombres d'activités	Pourcentage	Principales routines visées identifiées
Catégorie 1	4	8,7 %	Approximation du sinus et du cosinus au voisinage de 0 (RL). Étude de la dérivabilité et détermination de la fonction dérivée en utilisant les dérivées des fonctions usuelles et la dérivée de la composée de fonctions (RG).
Catégorie 2	6	13,04 %	Étude de la dérivabilité et détermination de la fonction dérivée (RL+RG). Calcul de la limite d'une fonction trigonométrique en utilisant le nombre dérivé (RP+RL). Détermination graphique des extrema (RL+RG).
Catégorie 3	36	78,26 %	Étude des variations et représentation graphique d'une fonction trigonométrique. Calcul de limites en utilisant les relations trigonométriques, les propriétés des fonctions trigonométriques et les limites usuelles. Calcul de l'aire maximale d'une surface définie en utilisant une fonction trigonométrique définie sur un intervalle donné. Résolution graphique d'une équation ou inéquation trigonométrique à travers l'étude et la représentation graphique d'une fonction trigonométrique. Détermination et caractérisation de la tangente à la courbe d'une fonction trigonométrique en un point donné.

2.2.2 Analyse du manuel de 4e année

L'analyse porte sur les neuf chapitres du tome 1. Dans chaque chapitre, nous avons identifié les routines visées à travers l'étude des activités proposées dans les parties « cours » et les parties « exercices et problèmes » qui font appel aux fonctions trigonométriques.

Tableau 2. Analyse des routines visées identifiées dans le manuel de 4e année

Catégories	Nombres d'activités	Pourcentage	Principales routines visées identifiées
Catégorie 1	20	13,07 %	Étude de la continuité d'une fonction en un point ou sur un intervalle (RL ou RG). Calcul d'une limite simple (calcul direct en utilisant les fonctions usuelles ou une limite usuelle) (RL). Calcul du nombre dérivé d'une fonction trigonométrique (RL). Étude de la dérivabilité sur un intervalle (RG). Détermination de la fonction dérivée d'une fonction et/ou calcul des dérivées successives (RG).
Catégorie 2	38	24,83 %	Calcul d'une limite faisant appel à des propriétés des fonctions trigonométriques ou à des procédures algébriques pour faire disparaitre des formes indéterminées (RL+RG). Étude de la dérivabilité et détermination de la fonction dérivée de la composée de deux fonctions dans des activités comportant des questions intermédiaires guidant le travail des élèves. Les routines locales comportent la dérivabilité en un point et les routines globales comportent les sous-tâches de l'étude de la dérivabilité et la détermination de la fonction dérivée (RL+RG). Étude de la convergence d'une suite en utilisant les limites usuelles et les propriétés des fonctions trigonométriques (périodicité et encadrement) (RL+RG). Calcul de l'intégrale d'une fonction donnée en utilisant une primitive ou à l'aide d'une intégration par partie (RP+RG). Établir une inégalité entre deux intégrales en utilisant la linéarité des intégrales.
Catégorie 3	95	62,1 %	Calcul de limite de fonction en utilisant les théorèmes de comparaison avec des fonctions usuelles.

Catégories	Nombres d'activités	Pourcentage	Principales routines visées identifiées
			Étude de la dérivabilité et de la variation de fonctions (tableau de variation).
			Étude et représentation graphique de fonctions.
			Résolution algébrique et graphique d'équations trigonométriques nécessitant l'étude et la représentation de fonction.
			Encadrement d'une fonction en utilisant le théorème des accroissements finis.
			Étude de la convergence d'une suite définie par une relation de récurrence faisant intervenir une fonction trigonométrique.
			Établir l'existence d'une fonction réciproque et étude de ses propriétés et de sa représentation graphique.
			Étude de la continuité et de la dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale.
			Étude et représentation graphique d'une fonction définie par une intégrale
			Calcul de l'aire d'une surface déterminée par la courbe d'une fonction trigonométrique et des droites.
			Étude de la convergence d'une suite définie par une intégrale comportant une fonction trigonométrique nécessitant des sous-tâches à travers des questions intermédiaires.
			Calcul d'une intégrale nécessitant l'utilisation d'autres intégrales et des procédures de calcul intermédiaires.
			Résolution d'équations différentielles de la forme y} + {ω} ^ {2} y= où $\omega \in IR$.

À travers nos analyses des routines visées identifiées dans les manuels de 3e et de 4e année, nous avons noté que la plupart de ces routines visées relèvent de la troisième catégorie. Ces routines sont associées à 78,26 % de l'ensemble des activités proposées dans le manuel de 3e année et à 62,1 % des activités proposées dans le manuel de 4e année. Dans ces activités, les tâches relatives aux routines visées sont subdivisées en des sous-tâches à travers des questions intermédiaires qui guident entièrement le travail des élèves en indiquant la procédure visée. Cela permet de fournir des modèles unifiés des routines visées dans toutes les classes du pays. Nous avons également noté que les routines relatives à la parité et à la périodicité ne font pas l'objet d'une grande quantité de travail en ce qui a trait aux exercices proposés. Dans ces exercices, l'énoncé impose l'intervalle d'étude de la fonction trigonométrique donnée. Nous illustrons nos propos par l'exercice suivant, extrait du manuel de 4e année (République tunisienne, 2019).

26 A/ Soit la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

1\. a. Montrer que f réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$.

On notera f^{-1}, la fonction réciproque de f.

b. Calculer $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2\. a. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0, 1[$.

b. Calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2}\right)$.

c. Montrer que pour tout x de $[0, 1[$,

$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$.

3\. Tracer dans un repère orthonormé C_f et $C_{f^{-1}}$.

Figure 1. Exercice 26 (République tunisienne, 2019, p. 93)

L'exercice est extrait de la partie « Exercices et problèmes » du chapitre « Fonctions réciproques ». L'objectif de l'exercice est la définition, l'étude de la dérivabilité et la représentation graphique de la fonction réciproque de *f*. Les questions 1.a, 2.a et 3 nécessitent l'exécution des routines globales de détermination du domaine de continuité et de dérivabilité. L'énoncé fait également apparaitre une importante utilisation des routines ponctuelles relatives à la détermination de l'image d'un réel par la fonction réciproque et par sa dérivée. L'exécution de cette routine visée nécessite l'application de la relation entre une fonction et sa réciproque ainsi que l'utilisation des angles remarquables pour la résolution d'équations trigonométriques simples. Ces routines ponctuelles visent une justification de l'existence de la fonction réciproque de *f* qui ne peut pas être explicitée à travers une expression spécifique comme dans le cas des fonctions algébriques précédemment étudiées. De même, la représentation graphique de cette fonction, qui est une autre réalisation de la fonction réciproque, vise également la justification de son existence. Nous considérons que, à ce point de vue, les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques restent au niveau procédural et sont approchées à travers un algorithme qui se caractérise par l'application directe du théorème de la fonction réciproque ainsi que par la relation entre une fonction et sa réciproque. Dans l'énoncé de cet exercice, nous avons également noté que le domaine de définition est imposé et que l'intervalle image par *f* et le domaine de dérivabilité de sa réciproque sont donnés. La tâche de l'élève revient à justifier ces intervalles à travers l'application du théorème de cours. Les routines visées dans cet exercice sont explicitées par l'énoncé et l'élève se trouve guidé à travers les questions intermédiaires qui visent l'exécution de routines précises.

2.3 Analyse des notes de cours et de la série de TD proposés aux étudiants

Le module de mathématiques du premier semestre des sciences de l'informatique a pour objectif d'introduire et de reprendre des notions de base de l'Analyse. Les fonctions trigonométriques sont revisitées dans ce module dans le chapitre « Fonctions numériques d'une variable réelle ». Ce chapitre consiste d'abord à reprendre succinctement des résultats obtenus durant les deux dernières années du secondaire sur les outils nécessaires pour l'étude de fonctions numériques et de leurs représentations graphiques. Il reprend également des éléments de base sur le calcul des limites, l'étude de la continuité, la dérivabilité, la parité, les éléments de symétrie et le théorème des valeurs intermédiaires. Par la suite, un passage à l'étude des propriétés de la bijectivité d'une fonction est présenté de même que les conséquences qui en découlent sur les représentations graphiques, l'explicitation de la fonction réciproque et de sa dérivée. En fin de chapitre sont introduites les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques et des fonctions hyperboliques, comme un nouveau champ d'application de tout ce qui précède. Les fonctions trigonométriques et leurs réciproques sont par la suite abordées lors de l'introduction des notions de développement limité, de la notion d'intégrales et du calcul des primitives.

L'analyse des notes de cours de l'enseignant et des séries d'exercices associées aux chapitres étudiés a permis d'identifier l'émergence de nouveaux types de routines visés, associées aux fonctions trigonométriques et leurs réciproques. Ces routines coexistent avec les routines visées déjà vues au secondaire et qui constituent, en termes commognitifs, l'espace de recherche précédent relatif à ces fonctions. Cependant, nous avons noté une augmentation remarquable du degré de complexité des fonctions proposées ainsi que l'émergence de nouvelles fonctions transcendantes (la composée de fonctions trigonométriques avec des fonctions algébriques ou transcendantes, la composée de fonctions trigonométriques avec des fonctions trigonométriques réciproques).

Tableau 3. Analyse des routines visées identifiées dans les notes de cours.

Catégories	**Nombres d'activités**	**Pourcentage**	**Principales routines identifiées**
Catégorie 1	5	9.26 %	Détermination de l'image de certaines valeurs remarquables par une fonction trigonométrique réciproque (RP). Détermination des expressions algébriques de la composée d'une fonction trigonométrique et d'une fonction trigonométrique réciproque (RG). Détermination du développement limité d'une fonction trigonométrique ou réciproque au voisinage d'un point x_0 (RL).
Catégorie 2	21	38.88 %	Calcul d'une limite faisant appel à des propriétés des fonctions trigonométriques ou à des procédures algébriques pour faire disparaitre les formes indéterminées (RL+RG). Étude du prolongement par continuité en un point d'une fonction trigonométrique (RL+RP). Étude de la continuité et de la dérivabilité, et détermination de la fonction dérivée de la composée de deux fonctions (RL+RG). Calcul de l'intégrale d'une fonction donnée en utilisant une primitive ou à l'aide d'une intégration par partie (RP+RG). Calcul de l'intégrale d'une fonction en utilisant un changement de variable (RP+RG). Démonstration de certaines expressions comportant des fonctions trigonométriques réciproques (RG+RP). Résolution d'une équation trigonométrique. Détermination de l'image de certaines valeurs remarquables par la composée d'une fonction trigonométrique et une fonction trigonométrique réciproque en faisant intervenir les propriétés de parité et/ou de périodicité des fonctions trigonométriques (RG+RP).
Catégorie 3	28	51.85 %	Calcul de limite de fonction en utilisant la règle de l'Hôpital ou les développements limités. Détermination du développement limité d'une fonction trigonométrique ou trigonométrique réciproque à un ordre donné au voisinage d'un point donné.

Catégories	Nombres d'activités	Pourcentage	Principales routines identifiées
			Détermination de l'équation de la tangente à la courbe d'une fonction trigonométrique composée en un point donné et la détermination de la position relative de la courbe avec cette tangente.
			Étude et représentation graphique de fonctions composées avec des fonctions trigonométriques.
			Établir l'existence d'une fonction réciproque et étude de ses propriétés et de sa représentation graphique.

L'analyse des notes de cours et des exercices proposés dans les séries de TD a permis de relever une importance du taux d'activités proposées qui visent l'exécution de routines relatives à la deuxième et à la troisième catégorie (38.88 % et 51.85 %). Cela atteste l'importance accordée à la coordination des perspectives de localité relatives aux fonctions trigonométriques et leurs réciproques afin de permettre aux étudiants de coordonner les différentes réalisations de ces objets mathématiques et, par la suite, permettre l'individualisation des routines visées par leur enseignement.

L'analyse des notes de cours et des séries de TD fait apparaitre la coexistence dans les routines visées de routines déjà abordées au secondaire avec de nouvelles routines introduites dans ce cours. En fait, les routines déjà vues comme celles relatives à l'étude des propriétés de fonctions trigonométriques et leurs réciproques sont associées à des activités avec des fonctions plus complexes que celles visées au secondaire. Les analyses font également apparaitre que les routines relatives à la représentation et à l'interprétation graphique apparaissent uniquement dans la partie cours lors de l'introduction et de la caractérisation des fonctions *arcsinus, arccosinus* et *arctangente.* Cela atteste une régression au postsecondaire de l'importance accordée aux médiateurs visuels graphiques par rapport à l'enseignement secondaire. L'analyse a également mis en évidence l'existence de routines visées relatives à l'étude des propriétés de fonctions composées reliant une fonction trigonométrique et sa réciproque ou entre une fonction trigonométrique et la réciproque d'une autre fonction trigonométrique. L'introduction de ces routines vise l'engagement des étudiants dans des activités permettant l'élaboration de récits approuvés en utilisant des propriétés de parité et de périodicité des fonctions trigonométriques. C'est le cas de nouvelles routines visées ponctuelles relatives à des activités de détermination des images de certaines valeurs par ces fonctions composées. Nous donnons, à titre d'exemple, la détermination de $Arcsin[sin(\frac{15\pi}{7})]$ où il faut commencer par l'utilisation de la propriété de périodicité $Arcsin[sin(\frac{15\pi}{7})] = Arcsin[sin(\frac{14\pi}{7} + \frac{\pi}{7})] = Arcsin[sin(2\pi + \frac{\pi}{7})] = Arcsin[sin(\frac{\pi}{7})] = \frac{\pi}{7}$.

La présence des routines visées déjà identifiées au secondaire, dans les notes de cours de l'enseignant et les séries d'exercices proposées faisant intervenir des fonctions trigonométriques et leurs réciproques au postsecondaire, laisse penser que les étudiants sont capables de les exécuter lors de la résolution des activités proposées. Pour cela, nous avons choisi de proposer un questionnaire afin d'étudier les caractéristiques des routines exécutées par les étudiants et d'identifier, d'une part, si les routines visées déjà vues au secondaire sont utilisées par les étudiants lors de la résolution des activités. Par ailleurs, nous avons cherché à repérer si les nouvelles routines visées par l'enseignement des fonctions trigonométriques et de leurs réciproques en première année ont été individualisées par les étudiants et peuvent émerger dans leurs réponses.

Nos analyses révèlent une fausse continuité en ce qui a trait aux routines visées par l'enseignement des fonctions trigonométriques et de leurs réciproques lors de la transition secondaire/postsecondaire. Cette fausse continuité se traduit par une continuité apparente du point de vue des tâches correspondant aux routines visées déjà abordées au secondaire avec une variation importante en lien avec les procédures susceptibles d'être utilisées pour accomplir les tâches à travers l'introduction de nouvelles procédures et de l'extension du domaine d'application (*applicability*). Cela constitue ainsi une évolution au regard des caractéristiques de ces routines[9]. Au secondaire, les procédures associées aux routines liées aux fonctions trigonométriques relèvent d'une application directe des théorèmes et définitions du cours et sont entièrement imposées aux élèves qui sont guidés dans leur travail par des questions intermédiaires. Cependant, en ce qui a trait à l'enseignement universitaire (postsecondaire), en dépit de la continuité apparente de certaines routines visées lors de la transition secondaire/postsecondaire, l'analyse fait apparaitre au moins une évolution sur deux plans : celui de l'applicabilité (Lavie et al., 2019) de ces routines et celui de leur flexibilité (*idem*). En fait, bien que dans certains cas la tâche correspondant à la routine visée soit la même que celle introduite au secondaire, par exemple le calcul de la limite d'une fonction ou l'étude et la représentation graphique d'une fonction, l'analyse montre une augmentation quant à la complexité des fonctions proposées. Cela constitue une extension du domaine d'application de ces routines à de nouveaux types de fonctions complexes, ce qui correspond, selon l'approche commognitive, à une modification du domaine d'applicabilité de ces routines visées. Par ailleurs,

9 Characteristics of routine: flexibility, bondedness, applicability, performer's agentivity, objectification of the discourse, and substantiability. (Lavie et al, 2019)

l’évolution quant à la flexibilité des routines visées se traduit par l’existence de nouvelles alternatives en ce qui a trait aux procédures permettant d’accomplir la tâche visée. Ces procédures coexistent avec les anciennes procédures. Cette évolution quant au domaine d’applicabilité et au degré de flexibilité des routines, en plus de l’émergence de nouvelles routines visées par l’enseignement postsecondaire, est susceptible d’engendrer certaines difficultés chez les étudiants quant à l’identification d’une procédure adaptée pour accomplir la tâche visée. Ces difficultés sont accentuées par l’absence d’une guidance par les questions intermédiaires et l’augmentation de l’autonomie dans le choix des procédures.

L’exemple de l’évolution de la routine de calcul de la limite d’une fonction trigonométrique composée avec d’autres fonctions illustre nos conclusions précédentes. En fait, la tâche associée à cette routine connaît une extension par l’introduction des fonctions trigonométriques réciproques ainsi que leur composition avec d’autres fonctions étudiées. Cette routine indique également une évolution sur le plan du degré de sa flexibilité qui se traduit par l’introduction de nouvelles procédures pour accomplir la tâche demandée comme le développement limité.

La routine de calcul intégral constitue également un deuxième exemple de la continuité apparente à travers l’utilisation des primitives et de l’intégration par parties. Cependant, la complexité des fonctions proposées dans les activités et l’introduction du changement de variable en tant que nouvelle procédure sont susceptibles d’augmenter considérablement les difficultés des étudiants.

3. Partie expérimentale

Dans la partie suivante, nous cherchons à apporter des éléments de réponse à notre deuxième question de recherche relative aux caractéristiques des routines exécutées par les étudiants lors de la résolution du questionnaire proposé. Cela permettra d’identifier l’individualisation des routines visées par l’enseignement des fonctions trigonométriques et leurs réciproques lors de la transition secondaire/postsecondaire.

3.1 Méthodologie

Le questionnaire a été proposé à deux groupes d'étudiants comme travail d'évaluation (non noté). Le questionnaire comporte quatre exercices nécessitant l’exécution de routines déjà introduites dans le cours et/ou lors des séances de TD. Il a été demandé aux étudiants de travailler d’une façon individuelle et de donner de l'importance à la justification des réponses. Les participants sont des étudiants de première année des sciences de l’informatique (SI1) de la Faculté des sciences de Bizerte, pendant le premier semestre de l'année universitaire 2018/2019. Le nombre de copies recueillies est de 60, et la durée de travail est d'une heure.

3.2 Analyse du questionnaire

Dans ce paragraphe, nous présentons l'analyse des deux premiers exercices du questionnaire en termes de routines exécutées par les étudiants lors de la résolution des activités proposées. Pour chacun des exercices, nous commençons par identifier la ou les routines visées susceptibles d'être exécutées par les étudiants selon ce qu'ils ont étudié lors des séances de cours et des séances de TD. Par la suite nous analysons les productions des étudiants afin d'identifier les caractéristiques des routines utilisées, l'individualisation des routines visées ainsi que les difficultés rencontrées par certains des étudiants dans le processus d'individualisation de ces routines.

A/ Calculer

$$Arcsin\left[\sin\left(\frac{15\pi}{7}\right)\right] \quad Arccos\left[\cos\left(\frac{19\pi}{5}\right)\right] \quad Arccos\left[\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \quad Arccos\left[\sin\left(\frac{14\pi}{3}\right)\right]$$

Figure 3. Énoncé du premier exercice proposé dans le questionnaire

3.2.1 Analyse de l'exercice 1 du questionnaire

Le premier exercice du questionnaire (figure 3) est l'un des exercices classiques qui sont proposés à la suite de l'introduction des réciproques des fonctions trigonométriques. Ce type d'exercices a été proposé avec d'autres valeurs dans la série de TD. L'objectif de la donnée de cet exercice est de vérifier l'individualisation de la routine visée introduite dans ce chapitre sur les fonctions numériques dans les notes de cours de l'enseignant conférencier. Il s'agit de la routine appartenant à la catégorie 2 que nous avons désignée dans le tableau 3 par la routine relative à la détermination de l'image de certaines valeurs remarquables par la composée d'une fonction trigonométrique et une fonction trigonométrique réciproque. L'exécution de cette routine nécessite la mise en œuvre des propriétés de périodicité et de parité des fonctions trigonométriques ainsi que la relation entre les fonctions trigonométriques et les fonctions trigonométriques réciproques, la tâche routinière étant la détermination de l'image d'un réel par la composée d'une fonction trigonométrique avec une fonction trigonométrique réciproque. Plusieurs procédures sont susceptibles d'être mises en œuvre selon les valeurs des réels et des fonctions proposées. Dans chacune des quatre questions proposées, l'une des procédures est visée pour l'exécution de cette routine. L'individualisation de cette routine par les étudiants se traduit par la possibilité de son exécution dans différents contextes et, par conséquent, par la possibilité d'identifier une procédure adéquate pour accomplir la tâche. Pour chacune des questions proposées, une procédure, notée P_i, est visée pour l'exécution de la routine. Ces procédures relèvent de notre interprétation en tant qu'enseignante-chercheuse de la tâche de la situation. Pour la première question, la procédure visée est relative à la périodicité de la fonction sinus. La réponse attendue est la suivante *Arcsin[sin(*$\frac{15\pi}{7}$*)]=Arcsin[sin(*$\frac{\pi}{7}+2\pi)] = \frac{\pi}{7}$. La procédure P_2 visée est relative à la périodicité et à la parité de la fonction cosinus. La réponse attendue est : $arccos\left(cos\left(\frac{19\pi}{5}\right)\right) = arccos\left(cos\left(\frac{20\pi}{5}-\frac{\pi}{5}\right)\right) = arccos\left(cos\left(\frac{-\pi}{5}\right)\right) = arccos\left(cos\left(\frac{-\pi}{5}\right)\right) = \frac{\pi}{5}$. La troisième tâche fait appel à la procédure P_3 relative à la relation entre la fonction arccosinus et la fonction sinus, mais elle pourra se réduire à une identification de l'égalité entre le sinus et le cosinus de deux angles complémentaires $arccos$. Cette question est une étape intermédiaire qui prépare la question suivante ayant un degré de complexité plus important puisqu'elle nécessite l'exécution de la procédure notée P_4 associant la périodicité de la fonction sinus et l'égalité $sin(\pi - a) = sina$ avec la relation entre les fonctions arccosinus et sinus. $Arccos(\sin\left(\frac{14\pi}{3}\right)) = Arccos(\sin\left(\frac{2\pi}{3}+4\pi\right)) = Arccos(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)) = Arccos(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)) = Arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{6}$.

L'analyse des productions des étudiants a permis de repérer une variation en matière de l'individualisation par les étudiants de cette routine visée. Certains d'entre eux sont capables d'identifier la tâche visée et de l'exécuter en appliquant les mêmes procédures identifiées. Pour ces étudiants, la tâche interprétée à la quatrième question consiste en la détermination de la valeur de $arccos\left(sin\left(\frac{14\pi}{3}\right)\right)$ en commençant par la transformation du réel $\frac{14\pi}{3}$ afin d'être afin d'identifier une valeur entre 0 et π pour utiliser les relations entre sinus et cosinus et être ramenée au cas de $arccos\big(cos(x)\big)$ avec $x \in [0, \pi]$. Le travail de ces étudiants a consisté ainsi à appliquer une routine déjà introduite dans le cours et dans les exercices proposés. Cependant, pour d'autres étudiants, nous avons remarqué l'émergence d'autres routines[10] qui relèvent de leurs propres interprétations de la tâche de la situation.

Tableau 4. Résultats de l'analyse des productions des étudiants pour l'exercice n 1

10 La routine, ici, est associée à un individu particulier selon son interprétation personnelle de la situation de la tâche et en fonction de la procédure utilisée pour accomplir la tâche interprétée. « A routine performed in a given task situation by a given person is the task, as seen by the performer, together with the procedure she executed to perform the task » (Lavie et al., 2019, p. 162).

	Procédure P_1	Procédure P_2	Procédure P_3	Procédure P_4
Utilisée avec succès	42	25	16	12
	70 %	41,66 %	26,66 %	20 %
Utilisée, mais sans succès	6	16	0	26
	10 %	26,66 %		43,33 %
Réponse sans justification	7	10	13	5
	11,66 %	16,66 %	21,66 %	8,33 %
Autre Réponse	5	6	21	4
	8,33 %	10 %	35 %	6,66 %
Pas de réponse	0	3	10	13
		5 %	16,66 %	21,66 %

Bien que les routines relatives à la parité et à la périodicité ont déjà été étudiées au secondaire, l'analyse des productions indique que plusieurs étudiants trouvent des difficultés à les exécuter dans un nouveau contexte où interviennent les fonctions trigonométriques réciproques comme dans le cas de la quatrième question. Les résultats font apparaitre également l'importance du nombre d'étudiants qui donnent une réponse correcte sans aucune justification ou explicitation de la procédure adoptée, ce qui laisse penser qu'ils ont fait appel à l'utilisation d'une calculatrice bien que nous ayons demandé une justification à toutes les réponses. Cela s'explique par une interprétation différente de la tâche (*task situation*) qui amène ces étudiants à exécuter une routine différente, soit celle de la détermination des images de fonctions en utilisant la calculatrice. La modalité « autre procédure » est relative aux réponses où les étudiants ont étendu le domaine de validité à tout l'ensemble des nombres réels pour la propriété $f^{-1}[f(x)] = x$ sans prendre en considération le domaine de définition des fonctions Arcsinus et Arccosinus. Les réponses des étudiants ont permis de repérer deux étudiants ayant utilisé la relation $arccos\big(sin\ (x)\big) + arcsin\big(sin(x)\big) = \frac{\pi}{2}$ pour répondre à la 3e et à la 4e question. Ces deux étudiants ont interprété la tâche de la situation (*task situation)* comme une relation entre les fonctions Arccosinus et sinus. Ils ont ainsi cherché à la transformer en une relation entre les deux fonctions Arccosinus et sa réciproque. Pour ce faire, ils ont fait appel à la relation $arccos(x) + arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$ pour $x \in [-1,1]$. Cela atteste l'existence d'un domaine d'expérience précédent plus élaboré pour ces deux étudiants. Leurs productions font ressortir l'existence d'une individualisation des différentes routines associées aux fonctions trigonométriques réciproques. Cela se traduit par la réussite à connecter des routines relevant de *tasks situations* différentes, l'une associée à $f^{-1}[f(x)] = x$ et l'autre à $arccos(x) + arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$ en plus des routines liées à la périodicité et des relations entre les angles complémentaires.

3.2.2 Analyse de l'exercice 2 du questionnaire

On considère la fonction f définie sur $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = \sin(\pi x)$
1/ Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2/ Montre que f réalise une bijection de $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ dans un intervalle I que l'on déterminera.
3/ Exprimer la fonction réciproque f^{-1} en fonction de $Arcsin$.
4/ Déterminer le domaine de dérivabilité de f^{-1} et calculer $(f^{-1})'(x)$

Figure 4. Énoncé du deuxième exercice proposé dans le questionnaire.

L'exercice 2 du questionnaire proposé aux étudiants a pour objectif d'étudier, à travers les productions des étudiants, l'individualisation de la routine visée relative au théorème de la fonction réciproque ainsi que les sous-routines[11] associées (routines relatives à la continuité, dérivabilité, sens de variation, etc.). Cette routine visée a connu un développement important lors de la transition secondaire/postsecondaire. Cette évolution se manifeste essentiellement au dans l'introduction de la sous-routine relative à l'explicitation de la fonction trigonométrique réciproque et de ses différentes réalisations. Cette évolution marque un passage d'un discours sur les fonctions trigonométriques comme processus à un discours sur l'objet mathématique fonctions trigonométriques réciproques. Les sous-routines associées à la routine visée relative au théorème de la fonction réciproque sont les suivantes :

- R1 : routine associée à l'étude de la continuité et de la dérivabilité de la fonction f dans l'intervalle donné.
- R2 : routine relative à l'étude de la variation de la fonction dans l'intervalle donné.
- R3 : routine relative à l'élaboration du tableau de variation.
- R4 : routine relative à l'application du théorème de la fonction réciproque, explicitation de la fonction réciproque et détermination de ses propriétés.

---

11 Une sous-routine d'une routine visée est une routine dont l'exécution constitue une étape intermédiaire pour l'exécution de la routine visée. Nous proposons comme exemple la routine visée relative au théorème de la fonction réciproque qui nécessite l'étude de la continuité et de la monotonie. Les deux routines relatives à la continuité et à la variation des fonctions constituent deux sous-routines de la routine visée relative au théorème de la fonction réciproque.

Tableau 5. Résultats de l'analyse des productions des étudiants pour les questions 1 et 2 de l'exercice n° 1

	Routine R1	Routine R2	Routine R3	Routine R4
Exécutée avec succès	34 56,66 %	37 61,66 %	46 76,66 %	31 51,66 %
Exécutée mais sans succès	18 30 %	19 31,66 %	10 16,66 %	16 26,66 %
Pas de réponse	8 13,33 %	4 6,66 %	4 6,66 %	13 21,66 %

L'analyse des productions fait apparaitre que la plupart des étudiants utilisent des routines installées au secondaire, que nous avons identifiés dans notre analyse des manuels. Cependant, l'exécution de ces routines lors de la résolution des activités proposées est parfois associée à des difficultés en lien avec le calcul de la dérivée de la fonction trigonométrique donnée ou à un passage direct à l'élaboration du tableau de variation sans passer par la vérification de la continuité, de la dérivabilité et des variations de la fonction. Nous attribuons cela à une estimation de simplicité de la fonction et, par conséquent, ses propriétés sont considérées comme triviales et ne nécessitant pas une justification. La difficulté de certains étudiants quant à l'utilisation du théorème de la fonction réciproque revient essentiellement à une modification des hypothèses du théorème (la continuité et la monotonie de la fonction sur l'intervalle de définition). Cependant, certains étudiants se limitent à la vérification de la continuité et de la dérivabilité, d'autres se limitent à la monotonie de la fonction sur l'intervalle d'étude, alors que d'autres ajoutent l'hypothèse de la dérivabilité de la fonction à la vérification de sa continuité et de sa monotonie. L'analyse des productions des étudiants associées à la deuxième partie de l'exercice (questions 3 et 4) permet d'identifier les caractéristiques des nouvelles routines récemment introduites et qui sont relatives aux propriétés de la fonction Arcsinus. Trois sous-routines sont identifiées : la détermination de l'expression de la fonction réciproque f^{-1}, l'étude de la dérivabilité de f^{-1} et la détermination de l'expression de $(f^{-1})'$. Pour cette partie, nous avons choisi d'identifier les différentes étapes atteintes par les étudiants dans le processus d'individualisation des routines introduites dans le cours et la série de TD, et ce, afin de caractériser ces routines.

Pour la routine de détermination de l'expression de f^{-1}, nous avons remarqué que la plupart des étudiants s'engagent dans la détermination de l'expression de f^{-1} en fonction de Arcsinus sans vérifier les conditions de la relation $arcsin(sin(x)) = x$. D'autres étudiants font appel à des procédures erronées qui consistent à considérer que si $f(x) = sin(\pi x)$, alors $f^{-1}(x) = arcsin\big(sin(\pi x)\big)$ ou que $f^{-1}(x) \ = arcsin(\pi x)$. Deux étudiants considèrent que la fonction Arcsinus est linéaire. C'est ce qui émerge à travers l'équivalence entre l'expression $\pi y = \ arcsin(x)$ et l'expression $y = arcsin\left(\frac{x}{\pi}\right)$. Concernant l'exécution de la routine relative à la dérivabilité de f^{-1}, nous avons identifié deux types de procédures adoptés par les étudiants. La première consiste à utiliser le domaine de dérivabilité de la fonction Arcsinus. Pour ces étudiants ayant déjà réussi à retrouver l'expression de f^{-1}(x)$en\ fonction\ de\ arcsin(x)$, ils utilisent le domaine de dérivabilité de la fonction $arcsin$ ainsi que l'expression de sa dérivée pour répondre aux questions. Nous considérons que pour ces étudiants cette fonction acquiert le statut d'un objet mathématique puisqu'ils sont capables d'exécuter les routines attachées à cet objet lors de la résolution des problèmes mathématiques. La deuxième procédure consiste à déterminer le domaine de dérivabilité de la fonction f^{-1} ainsi que l'expression de sa fonction dérivée, et ce, en utilisant les propriétés de la fonction réciproque, sans faire le lien avec la fonction Arcsinus. En fait, ils déduisent la dérivabilité de f^{-1} comme une conséquence de la dérivabilité de f. Pour la détermination de l'expression de la fonction dérivée ils utilisent la relation $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}\,(x))}$. L'utilisation de cette procédure atteste que bien que ces étudiants arrivent à identifier la fonction Arcsinus, elle n'est pas étudiée en tant que fonction, mais plutôt en tant qu'un processus qui permet de définir la fonction réciproque et lui transfère certaines propriétés de la fonction de départ f. Cela nous amène à conclure que la fonction Arcsinus chez ces étudiants n'a pas encore le statut d'un objet mathématique caractérisé par ses propres routines utilisables dans différents contextes pour la résolution des activités proposées. L'analyse a permis également de remarquer l'hétérogénéité des niveaux des étudiants en relation avec la performance des routines déjà vues au secondaire ainsi que les routines récemment installées. Le changement des contextes des tâches routinières rend difficile l'identification et l'exécution des procédures déjà étudiées dans un contexte différent.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons analysé l'évolution des attentes et des exigences auprès des étudiants, autour des fonctions trigonométriques et de leurs réciproques lors de la transition secondaire/postsecondaire ainsi que leurs impacts sur l'apprentissage des étudiants. Appréhender cette problématique du point de vue de la théorie commognitive nous a permis d'utiliser le concept de routine comme unité d'analyse de l'apprentissage des étudiants. En conceptualisant les textes mathématiques proposés dans les manuels scolaires comme un discours, nous avons introduit le concept de routine visée comme unité d'analyse des manuels, des notes de cours proposées dans le module d'Analyse ainsi que des énoncés proposés dans le questionnaire. L'analyse de l'évolution des routines visées relatives aux fonctions trigonométriques et de leurs réciproques dans la transition secondaire/postsecondaire, que les élèves et les étudiants sont amenés à s'approprier, fait apparaitre une fausse continuité en ce qui a trait aux routines visées déjà identifiées au secondaire, lesquelles sont susceptibles de cohabiter avec les nouvelles routines visées relatives aux fonctions trigonométriques réciproques introduites en première année universitaire. En fait, le changement de contextes des tâches routinières au postsecondaire, la complexité des fonctions étudiées et l'introduction des fonctions trigonométriques réciproques comme objet révèlent une modification de la flexibilité et du domaine de validité des routines visées. Cela peut expliquer que des étudiants éprouvent certaines difficultés à individualiser les routines visées par l'enseignant, vu la nécessité de développer de nouvelles procédures plus complexes et, par conséquent, faire évoluer ces routines. Ces routines se développent à travers l'imbrication d'anciennes routines pour créer une seule routine à travers une description commune de leurs tâches, comme pour le cas des routines de détermination de l'image d'un réel par la composée d'une fonction trigonométrique réciproque par une fonction trigonométrique. Cette routine articule les routines de la parité, la périodicité des fonctions trigonométriques ainsi que la routine de la relation entre une fonction et sa réciproque. Dans le questionnaire, pour cette même routine visée, nous avons identifié deux routines mises en œuvre par les étudiants, qui diffèrent selon leurs interprétations de la *task situation* introduite par la question proposée.

L'analyse des tâches proposées dans les séances de cours et de TD montre qu'au postsecondaire, les étudiants ont plus d'autonomie pour l'élaboration des tâches proposées, ce qui engendre une diversité des procédures susceptibles d'être exécutées et, par conséquent, l'évolution de plusieurs routines. Concernant l'utilisation des routines déjà étudiées au secondaire et celles récemment introduites, l'analyse des productions des étudiants lors de la résolution des activités proposées dans le questionnaire a fait apparaitre que chez certains étudiants, le changement de contexte engendre beaucoup de difficultés, même pour des tâches routinières comme l'étude de la continuité et de la dérivabilité d'une fonction. Les résultats font également ressortir les difficultés des étudiants à exécuter des routines relatives à la périodicité, à la parité et aux relations trigonométriques dans un nouveau contexte où interviennent les fonctions trigonométriques réciproques. Nous supposons qu'au postsecondaire, l'absence de questions intermédiaires ou d'indications qui guident les étudiants et leur imposent la procédure qu'ils doivent adopter explique les difficultés de plusieurs étudiants qui ne sont pas encore habitués à être autonome dans leurs apprentissages et dans les choix des procédures adéquates.

Les analyses ont également permis de dégager que la transposition des routines relatives à l'étude de la continuité et de la dérivabilité pour le cas des fonctions trigonométriques réciproques ne va pas de soi et constitue une source de difficulté pour les étudiants. Pour ces étudiants, plusieurs routines déjà étudiées au secondaire n'ont pas encore évolué en termes de champ d'applicabilité et l'éventail des tâches pour lesquelles elles sont susceptibles de donner des résultats est encore réduit.

La contribution de notre travail au domaine de la recherche dans l'enseignement des mathématiques relève de trois niveaux :

1. Proposer une analyse de l'évolution des exigences et des attentes institutionnelles relatives aux fonctions trigonométriques et de leurs réciproques en termes de routines visées.
2. Conceptualiser les textes mathématiques proposés dans les manuels et les notes de cours ainsi que les énoncés des exercices, comme un discours qui a ses propres caractéristiques.
3. Introduire le concept de routines visées comme une unité d'analyse des textes mathématiques écrits : manuels scolaires, notes de cours, séries d'exercices (TD), énoncés des exercices.

Dans ce travail, nous nous sommes centrés sur les routines visées relatives au niveau objet, spécifiques à la notion de fonctions trigonométriques et de leurs fonctions réciproques. Cependant, nous sommes conscients de l'importance des routines visées relatives au niveau méta dans l'apprentissage de ces fonctions et des mathématiques en général. Parmi ces routines, on note les routines d'instanciation. En fait, l'importance du niveau de rigueur associé à l'utilisation d'un ensemble de règles formelles bien définies en enseignement supérieur rend le discours mathématique universitaire difficile pour un nouveau bachelier habitué à des applications directes des savoirs enseignés et à une guidance importante en ce qui concerne les activités proposées dans l'enseignement secondaire.

Pour ce qui est des perspectives, nous considérons que le modèle d'analyse utilisé dans notre travail pourra être exploité pour étudier l'usage des textes mathématiques (manuels) en tant que ressources par les enseignants. Il permettra également d'identifier l'adéquation entre les routines visées par les textes des programmes et des manuels officiels, d'une part, et celles identifiées dans le cours proposé effectivement en classe par les enseignants, d'autre part, notamment au secondaire où les programmes et les manuels constituent les sources officielles pour l'enseignant.

Références

Alshwaikh, J. (2016). Investigating the geometry curriculum in Palestinian textbooks: Towards multimodal analysis of Arabic mathematics discourse. *Research in Mathematics Education, 18*(2), 165-181. https://doi.org/10.1080/14794802.2016.1177580

Alshwaikh, J. et Morgan, C. (2013). Analysing the Palestinian school mathematics textbooks: A multimodal (multisemiotic) perspective. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 33*(2), 70-75.

Alshwaikh, J. et Morgan, C. (2018) A framework for the study of written and spoken discourse: school mathematics in Palestine. *ZDM Mathematics Education*, 50, 1041-1051. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0970-0

Biehler, R., Fischer, P. R, Hochmuth, R. et Wassong, T. (2011). Designing and evaluating blended learning bridging courses in mathematics. online blended courses. Dans M. Pytlak, T. Rowland et E. Swoboda (dir.), *Proceedings of the 7th Conference of European Researchers in Mathematics Education* (p. 1971-1981). University of Rzeszów.

Corriveau, C. (2017). Secondary-to-tertiary comparison through the lens of ways of doing mathematics in relation to functions: a study in collaboration with teachers. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(2), 139-160.

Gray, E. M. et Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A proceptual view of elementary arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 116-140.

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(3), 237-254.

Gueudet, G. et Quéré, P.-V. (2018). "Making connections" in the mathematics courses for engineers: the example of online resources for trigonometry. Dans V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, S. Goodchild et N. M. Hogstad (dir.), *Proceedings of the second conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (p. 135-144). University of Agder.

Gueudet, G. et Vandebrouck. F. (2019). *Entrée dans l'enseignement supérieur : éclairages en didactique des mathématiques.* Conseil national d'évaluation du système scolaire.

Khalloufi-Mouha, F. (2009). *Étude du processus de construction du signifié de fonction trigonométrique chez des élèves de 2e année section scientifique* [thèse de doctorat inédite]. Université de Tunis.

Khalloufi-Mouha, F. et Smida, H. (2012). Constructing mathematical meaning of a trigonometric function through the use of an artefact. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *16*(2), 207-224. https://doi.org/10.1080/10288457.2012.10740740

Khalloufi-Mouha, F. (2014). Étude de l'évolution des signes langagiers lors d'une séquence d'enseignement intégrant un artefact technologique. *Spirale. Revue de recherches en éducation, 54*, 49-63. https://doi.org/10.3406/spira.2014.1036

Khalloufi-Mouha, F. (2018). Constructing mathematical meaning of the cosine function using covariation between variables in a modeling situation in Cabri. Dans T. Dooley et G. Gueudet (dir.), *Proceedings of the 10th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 1308-1315). Dublin City University.

Khalloufi-Mouha, F. (2020). Analyse discursive de l'enseignement des fonctions trigonométriques dans la transition lycée/université. Dans T. Hausberger, M. Bosch et F. Chellougui (dir.), *Proceedings of the Third Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (p. 123-132). University of Carthage

Lavie, I., Steiner, A. et Sfard, A. (2019). Routines we live by: From ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics*, *101*(2), 153-176. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9817-4

Mesa, V. et Goldstein, B. (2017). Conception of angles, trigonometric functions, and inverses trigonometric functions in college textbooks. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education* 3(2), 338-354.

Montoya Delgadillo, E., Páez Murillo, R., Vandebrouck, F. et Vivier, L. (2018). Deconstruction with localization perspective in the learning of analysis. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4, 139-160. https://doi.org/10.1007/s40753-017-0068-z

Morgan, C. et Sfard, A. (2016). Investigating changes in highstakes mathematics examinations: A discursive approach. *Research in Mathematics Education*, *18*(2), 92-119. https://doi.org/10.1080/14794 802.2016.11765 96

Nardi, E. (2008). *Amongst mathematicians. teaching and learning mathematics at university level*. Springer.

Park, J. (2016). Communicational approach to study textbook discourse on the derivative. *Educational Studies in Mathematics*, *91,* 395-421. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9655-6

République tunisienne (2019). *Mathématiques. 4ème année de l'enseignement secondaire. Section Mathématiques (tome 1).* Ministère de l'Éducation. http://www.cnp.com.tn/cnp.tn/arabic/PDF/222445P00.pdf

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, development of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Sfard, A. (2012). Introduction: Developing mathematical discourse—Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research*, *51-52*, 1-9.

Sfard, A. (2021). Bewitched by language. Questions on language for mathematics education research. Dans N. Planas, N. Morgan et M. Schütte (dir.), *Classroom Research on Mathematics and Language*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780429260889

Thoma, A. et Nardi, E. (2018). Transition from school to university mathematics: manifestations of unresolved commognitive conflict in first year students' examination scripts. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4, 161-180. https://doi.org/10.1007/s40753-017-0064-3

Vandebrouck, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques de Paris (IREM)*, 16, 149-185.

Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal, 17*(3), 91-112.