L'intégration, par une enseignante, d'une ressource visant le développement de la pensée algébrique chez des élèves du 1er cycle du secondaire

Audrey B. RAYMOND
Université de Sherbrooke
audrey.b.raymond@usherbrooke.ca
Hassane SQUALLI
Université de Sherbrooke
hassane.squalli@usherbrooke.ca

Résumé : La recherche présentée dans ce texte se situe dans le contexte d'un collectif de travail formé de didacticiens, de conseillers pédagogiques et d'enseignants. Ce collectif vise l'implantation au Québec d'un enseignement favorisant le développement de la pensée algébrique au primaire et au secondaire. En convoquant le cadre de l'approche documentaire du didactique de Gueudet et Trouche (2008) et la notion de schème de Vergnaud (1996), nous présentons quelques résultats d'analyse du processus d'intégration dans la pratique d'une enseignante du premier cycle du secondaire d'une ressource visant le développement de la pensée algébrique. L'analyse porte sur des données provenant de différentes sources : documents de formation, entrevues et expérimentation en classe.

Mots clés : pensée algébrique, raisonnement analytique, genèse documentaire du didactique, travail de l'enseignant

One teacher's integration of a resource for developing algebraic thinking in lower secondary school students

Abstract: The research presented in this text was carried out in a working group comprised of didacticians, educational consultants and teachers. The aim of this collective was to establish teaching practices in Quebec that promote the development of algebraic thinking in primary and secondary schools. The study sought to analyze how a resource for developing algebraic thinking in students was incorporated by a (first cycle) secondary teacher. To this end, we drew on the didactic documentary approach of Gueudet and Trouche (2008) and the notion of schema set forth by Vergnaud (1996). The analysis focuses on data from different sources, namely educational materials, interviews and classroom experimentation.

Keywords: algebraic thinking, analytical reasoning, Didactic Documentary Approach, teacher's work

Introduction

Au Québec, le passage de l'arithmétique vers l'algèbre est un sujet qui intéresse plusieurs acteurs du milieu de l'éducation. Dans le cadre d'une rencontre sur le sujet, tenue à l'Université de Sherbrooke au printemps 2013, une collaboration entre des didacticiens provenant de quatre universités québécoises, des conseillers pédagogiques de plusieurs commissions scolaires[1] a permis l'émergence d'un collectif soutenu par le Ministère de l'Éducation. Ce dernier se donne comme objectif de soutenir le développement de la pensée algébrique dans une trajectoire continue entre les ordres d'enseignement primaire et secondaire. Le moyen choisi par le collectif est la mise en œuvre d'un dispositif de formation-action permettant à des conseillers pédagogiques ainsi qu'à des enseignants du primaire et du secondaire des commissions scolaires de la province, de perfectionner leurs compétences professionnelles à intégrer dans leur pratique d'enseignement des mathématiques des moyens, reconnus par la recherche, pour favoriser le développement de la pensée algébrique.

La recherche présentée ici s'inscrit dans un projet de recherche-formation financé par le Ministère de l'Éducation et réalisé de septembre 2013 à août 2015. Les participants à cette recherche forment un groupe de travail composé de conseillers pédagogiques, d'enseignants du primaire et/ou du secondaire ainsi que de deux ou trois didacticiens des mathématiques. La formation-action s'est déroulée en trois étapes. La première consiste à former les enseignants sur le développement de la pensée algébrique et sur des situations porteuses. Ensuite, les enseignants expérimentent en classe une ressource particulière. Cette dernière peut être conçue par les enseignants, ou adaptée à partir d'une situation porteuse utilisée en formation, ou d'un manuel scolaire. Finalement, un retour réflexif en groupe de travail est effectué sur les connaissances développées à propos de cette ressource.

Ce groupe de travail vise principalement à développer des connaissances professionnelles chez les enseignants en lien avec le développement de la pensée

[1] Maintenant réformées sous forme de Centres de services scolaires.

algébrique et à créer une communauté de pratique (Wenger, 1998). Dans ce groupe de travail, chacun des acteurs joue un rôle particulier. Les didacticiens ne prescrivent pas la pratique. Leur rôle est d’accompagner, d’aider les enseignants à penser leur enseignement. Ils assument le rôle de guide, de facilitateur et de conseiller lors des discussions à propos des différentes situations visant le développement de la pensée algébrique. Ils aident à comprendre le potentiel didactique de celles-ci. De plus, ils participent à la mise en valeur et à l’explicitation des connaissances-en-acte (Vergnaud, 1996) développées par les enseignants qui n’en sont souvent pas conscients et s’en servent pour enrichir les discussions.

Les conseillers pédagogiques exercent une fonction d’intermédiaire entre les didacticiens et les enseignants et jouent un rôle tampon. Ils recrutent et sensibilisent les enseignants à propos de la problématique du développement de la pensée algébrique. Leur rôle est d’amener les enseignants à expérimenter des situations en classe, à les accompagner dans l’expérimentation et à partager les connaissances développées avec la communauté. Les enseignants, quant à eux, s’impliquent dans le groupe de travail pour découvrir de nouvelles situations, enrichir celles qu’ils utilisent et en développer de nouvelles. Par la suite, les connaissances développées sur ces ressources sont partagées avec la communauté, et les enseignants ont donc l’occasion d’améliorer leurs pratiques suite aux rencontres avec les didacticiens et les conseillers pédagogiques.

Dans ce texte, nous nous intéressons au processus d’intégration dans la pratique d’une enseignante – faisant partie de ce groupe de travail – d’une ressource visant le développement de la pensée algébrique. Le texte présentera d’abord les éléments de problématique, les assises conceptuelles ainsi que la méthodologie. Par la suite, quelques résultats de notre recherche seront présentés suivis d’une discussion sur ceux-ci.

1. Éléments de problématique

Au Québec, la dernière réforme des programmes mise en œuvre au secondaire du début des années 2000 n’a pas apporté de changements importants dans les contenus mathématiques à enseigner au primaire et au secondaire (Squalli et al., 2011). L’enseignement de l’algèbre reste marqué par les choix faits dans la réforme précédente celle de 1993 (Squalli et al., 2011). Selon ces auteurs, l’approche d'introduction de l’algèbre au début du secondaire consiste à faire passer les élèves d’un mode de pensée arithmétique (forgé essentiellement au primaire) à un mode de pensée algébrique. Pour cela, le programme privilégie deux voies : la généralisation et la résolution de problèmes se ramenant à la résolution d’une équation du premier degré à une inconnue. En première année du premier cycle du secondaire (élèves de 12-13 ans), par des activités de généralisation, on cherche à introduire le symbolisme algébrique en tant que moyen pour exprimer la généralité. En effet, comme l'expliquent les concepteurs du programme actuellement en vigueur :

> Pour construire sa pensée algébrique, l'élève observe des régularités issues de situations diverses et représentées de différentes façons, comme des dessins, des tables de valeurs et des graphiques. Pour introduire les idées de variable, de dépendance entre des variables et de généralisation à l'aide d'une règle, l'utilisation de suites de nombres constitue un moyen privilégié. Par exemple, on peut utiliser les nombres polygonaux ou différentes situations géométriques pour généraliser à l'aide d'une ou de plusieurs règles équivalentes. (Gouvernement du Québec, 2006, p. 254)

La raison d'être de ces activités est de « favoriser chez l'élève l'acquisition de préalables à l'apprentissage de l'algèbre » (Gouvernement du Québec, 2006, p. 23). L'introduction de l'algèbre va surtout s'affirmer en deuxième année du premier cycle du secondaire (élèves de 13-14 ans), et ce, dans un contexte de résolution de problèmes, se ramenant à la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue, avec le souci de faire voir la pertinence du recours au symbolisme algébrique conventionnel (Marchand et Bednarz, 1999 ; Squalli et al., 2011). En effet, la tendance à généraliser et la tendance à raisonner sur l'inconnue favorisent la tendance à symboliser (Squalli, 2000).

Malgré le fait que le programme valorise une approche par la généralisation, le travail de Denis (1997, dans Marchand et Bednarz, 1999) a mis en évidence le glissement qui s'est opéré dans l'application de ce programme, en particulier à travers les manuels, et qui sape la richesse et l'essence même de la pensée algébrique :

> On peut à cet effet observer, à travers l'interprétation donnée à cette orientation du programme, un glissement qui s'est opéré de l'idée d'exploitation de situations qui se voulaient prétexte à une généralisation et à l'introduction du symbolisme algébrique, à un enseignement devenu avant tout celui des suites numériques. (Marchand et Bednarz, 1999, p. 31)

De plus, le programme préconise une approche par la résolution de problèmes, mais le passage des élèves d'une démarche arithmétique de résolution à une démarche algébrique de résolution est difficile. Cette difficulté réside dans le fait que les raisonnements arithmétiques et algébriques sont de nature différente. Le raisonnement arithmétique est de nature non analytique; la valeur de l'inconnue est déterminée en opérant sur des données et sur des relations connues. Dans une démarche arithmétique de résolution, on fait simplement une suite de calculs sur des quantités connues, on n'opère jamais sur des inconnues (Squalli, 2000). En revanche, plusieurs chercheurs soulignent le caractère analytique du raisonnement algébrique (Bednarz et al., 1996 ; Lins, 1992; Radford, 2010 ; Squalli, 2000). Dans la démarche algébrique de résolution, on raisonne de manière analytique : on procède de l’inconnu vers le connu, en opérant sur l’inconnue comme si c’était un nombre connu. La distinction entre un mode de raisonnement arithmétique et un mode de raisonnement algébrique réside précisément dans le caractère analytique du raisonnement et non dans l’utilisation des signes alphanumériques (Radford, 2018 ; Squalli et al., 2020). La présence des signes alphanumérique n’est pas un signe du caractère algébrique du raisonnement. Réciproquement, leur absence n’est pas signe du caractère non algébrique du raisonnement. Dans Squalli et al. (2020), sont rapportés plusieurs raisonnements d’élèves qui illustrent ces affirmations, dont certains sont présentés dans la section 4.1.

Le développement du raisonnement analytique, avant l’introduction du langage littéral de l’algèbre, est le véritable enjeu du passage des élèves d’un mode de pensée arithmétique à un mode de pensée algébrique dans le cadre d’activités de résolution de problèmes se ramenant à la résolution d’une équation du premier degré à une inconnue. Or, l’introduction de la méthode algébrique conventionnelle de résolution est souvent enseignée par une série de consignes : identifie l’inconnue principale et représente-la par x, exprime les relations à l’aide de x, isole le x dans l’équation pour trouver sa valeur, déduis les valeurs des autres inconnues, lesquelles ne favorisent pas le développement du raisonnement analytique.

La perspective de développement du raisonnement analytique avant l’introduction du langage littéral de l’algèbre nécessite une formation des enseignants (Carraher, 2007). Cela exige en particulier que les enseignants intègrent dans leurs pratiques des ressources, au sens de Gueudet et Trouche (2010), visant le développement du raisonnement analytique. Or, mettre des ressources à la disposition des enseignants ne suffit pas pour modifier leurs pratiques (Gueudet et Trouche, 2010). Une ressource ne devient intégrée dans l’activité de l’enseignant qu’au prix d’une genèse instrumentale (processus d'instrumentation et d'instrumentalisation). Cette idée émane de l’ergonomie cognitive (Verillon et Rabardel, 1995); elle est fondée sur la distinction entre l’artefact en tant qu’objet physique ou abstrait, et l’instrument en tant que construction psychologique du sujet. Dans ce sens, l’enseignant doit développer des schèmes, au sens de Vergnaud (1996), d’utilisation de la ressource. Il devient donc important d’étudier le processus de cette intégration.

2. Contexte de l'étude

Cette recherche s'inscrit dans le contexte d'un projet de formation-action regroupant deux didacticiennes des mathématiques, une conseillère pédagogique Lili[2] et des enseignants du secondaire de la région de Québec.

Les enseignants faisant partie de ce groupe ont participé au projet pour la première fois en septembre 2015. Pour des questions de clarté, dans cette recherche, lorsqu'il est question des chercheures, des formatrices ou des didacticiennes, nous faisons référence aux mêmes deux personnes. Les enseignants ont expérimenté diverses ressources avec leurs élèves, visant le développement de la pensée algébrique par la résolution de problèmes écrits se ramenant à la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue. La présente recherche a pour but d'analyser le document construit par une enseignante à partir d'une ressource, Arsène Ponton (présentée dans la section 4.1), en considérant autant la dimension ressource que les schèmes d'utilisation.

3. Assises conceptuelles

Pour documenter le processus d'intégration, par une enseignante, d'une ressource visant le développement du raisonnement analytique chez les élèves, l'approche documentaire du didactique de Gueudet et Trouche est la principale assise conceptuelle de notre recherche. Elle fait d'ailleurs référence à la notion de schème de Vergnaud qui nous servira à préciser les objectifs spécifiques. Des éclaircissements sur des concepts de la pensée algébrique en contexte de résolution de problèmes se ramenant à la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue seront également apportés.

3.1 L'approche documentaire du didactique

Dans cette recherche, nous convoquons le cadre de l'approche documentaire du didactique développé par Gueudet et Trouche (2008, 2010) qui place le travail sur les ressources au cœur du développement professionnel. Ce cadre est une adaptation de l'approche instrumentale de Rabardel (1995, 1999a, 1999b) au domaine de l'enseignement. Il vise, entre autres, à étudier le travail de l'enseignant à travers le processus d'intégration d'une ressource dans sa pratique. Ce cadre repose sur la distinction entre deux notions clés : ressource et document[3]. Dans la même optique qu'Adler (2010), nous entendons par ressource tout ce qui est susceptible de re-sourcer le travail de l'enseignant. Gueudet et Trouche (2008)

---

[2] Nom fictif.

[3] Les notions de ressource et de document font référence aux notions d'artefact et d'instrument dans la théorie de l'approche instrumentale de Rabardel (1995).

définissent les documents comme des « entités hybrides, composées de ressources réorganisées et de schèmes d'utilisation structurés par des invariants opératoires » (Gueudet et Trouche, 2008, p. 22). Le document est le résultat du travail documentaire de l'enseignant, dont le moteur est la genèse documentaire, le processus par lequel l'enseignant transforme la ressource en document. Un document ne peut donc exister seul puisque l'intégration de la ressource dans la pratique ne va pas de soi et exige la construction de schèmes d'utilisation. Un schème, au sens de Vergnaud, « est une organisation invariante de l'activité, qui comporte notamment des règles d'action, et est structurée par des invariants opératoires qui se forgent au cours de cette activité » (Vergnaud, 1996, dans Gueudet et Trouche, 2008, p. 9). Une règle d'actions réfère à une série d'actions stables et reproductibles qui organise l'activité. Ces règles seront formulées à l'aide de verbes d'action et seront des actes que les enseignants ont réalisés en lien avec la ressource en vue d'atteindre un certain but. Les invariants opératoires peuvent être de deux types : théorèmes-en-acte et concepts-en-acte. Les théorèmes-en-acte sont des propositions et peuvent être vrais ou faux (Vergnaud, 1996). Les concepts-en-acte, quant à eux, sont des fonctions propositionnelles qui ne sont pas susceptibles d'être vraies ou fausses, mais elles sont indispensables à la construction des propositions.

Lorsque les enseignants font face à de nouvelles ressources, ils puisent dans leur répertoire d'invariants et les transforment pour s'adapter et se modifier pour ainsi en créer de nouveaux. Ainsi, comme Gueudet et Trouche (2008) le mentionnent, nous pouvons écrire l'équation suivante, un peu simpliste, mais qui le résume bien : document = ressource + schèmes d'utilisation.

La genèse documentaire est représentée dans la figure 1. Au départ, il y a un ensemble de ressources disponibles et un enseignant qui possède déjà une expérience et des invariants. À travers un double processus d'intégration qui prend du temps[4], l'enseignant crée le document. Rabardel identifie deux processus qui lient la ressource au sujet : l'instrumentation et l'instrumentalisation. D'une part, lors de l'instrumentation, il y a émergence et évolution des schèmes d'utilisation (Rabardel, 1999a). C'est le processus par lequel la ressource influence la pratique et soutient l'activité du sujet. Le regard est donc tourné vers l'évolution du sujet. D'autre part, lors de l'instrumentalisation, il y a apparition et transformation de la portion ressource du document. Le sujet met à sa main les ressources, et les connaissances professionnelles évoluent par ce travail (Gueudet

[4] Étant donné la période de temps relativement courte pendant laquelle s'est déroulée la recherche et la relative nouveauté de la ressource pour l'enseignante, objet de cette recherche, nous parlerons de schèmes en construction.

et Trouche, 2008). Le regard est alors tourné vers la ressource qui se modifie selon le rôle qu'elle joue dans l'action.

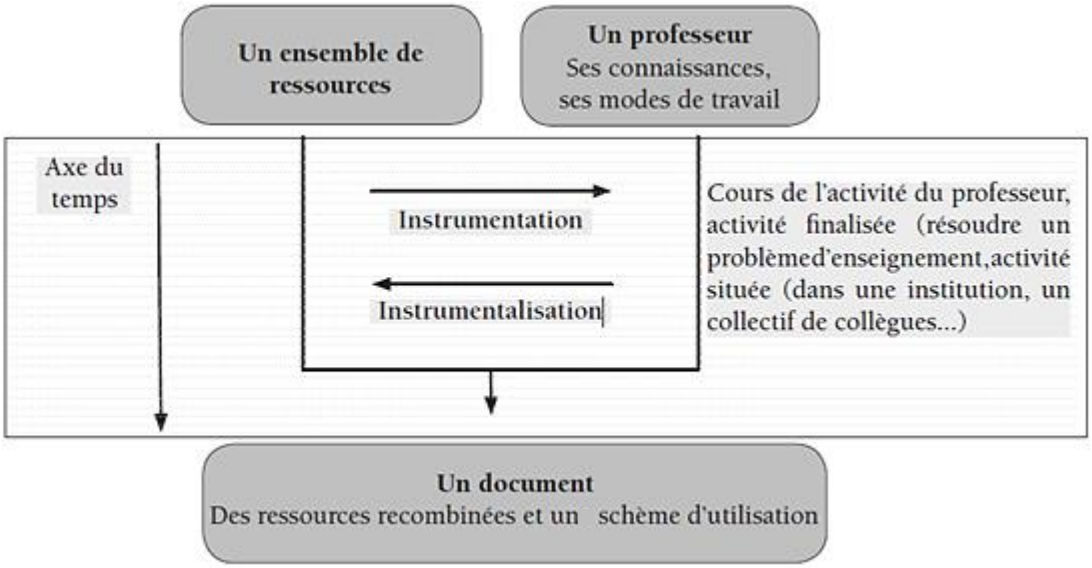


Figure 1 : Représentation schématique de la genèse d'un document (Gueudet et Trouche, 2008, p. 4).

3.2 Éclairages conceptuels de la pensée algébrique

Nous utilisons ici la conceptualisation développée par Squalli (2000, 2015). L'algèbre peut être vue comme un ensemble d'activités mathématiques où interviennent des opérations (lois de composition, internes ou externes, binaires ou n-aires) pouvant être de nature quelconque (addition, multiplication, rotation, composition, etc.), mais répétées un nombre fini de fois (Squalli, 2000, 2015). Ces activités sont marquées par une manière de penser, une pensée algébrique. Sur le plan opératoire, la pensée algébrique se déploie au moyen :

- d'un ensemble de raisonnements particuliers (comme généraliser, raisonner de manière analytique, symboliser et opérer sur des symboles; exprimer, interpréter, raisonner sur des relations entre variables, en particulier des relations fonctionnelles, etc.);
- de manières d'approcher des concepts en jeu dans les activités algébriques (comme voir l'égalité comme une relation d'équivalence, laisser les opérations en suspens, voir une expression numérique comme un objet en soi et non uniquement comme une chaine de calcul, etc.); et
- de modes de représentation et de manières d'opérer sur ces représentations.

Raisonner de manière analytique consiste à considérer les inconnues, les représenter, non nécessairement avec des lettres, représenter les relations entre ces inconnues, opérer sur ces représentations pour formuler l'équation modélisant le problème et trouver la valeur des inconnues (Squalli et al., 2013).

Les travaux de Bednarz et ses collaborateurs (Bednarz et Janvier, 1992,1996; Bednarz et al., 1996) ont montré que, pour initier les élèves au raisonnement analytique, il convient de privilégier des problèmes qui ne se prêtent pas facilement à une démarche de résolution arithmétique, soit des problèmes dits déconnectés. La résolution de ces problèmes nécessite d'opérer sur l'inconnue pour trouver sa valeur, à moins de raisonner par essais-erreurs.

Suite à des recherches qui présentaient différents types de problèmes aux élèves, Bednarz et Janvier (1996) ont développé une typologie de problèmes et les ont classés selon leur degré de complexité. Elles ont identifié trois types de problèmes : les problèmes de partage inéquitable, de transformation et les problèmes impliquant un taux. Nous nous intéressons ici seulement aux problèmes de type partage inéquitable puisque la ressource Arsène Ponton est de ce type. Dans leurs résultats de recherche, on y retrouve notamment les éléments qui sont susceptibles de déterminer le degré de complexité des problèmes (Marchand et Bednarz, 1999) : le nombre de relations de comparaisons, la nature des relations, l'enchaînement des relations.

4. Méthodologie

Rappelons d'abord que l'objectif spécifique de notre recherche est d'analyser le document construit par une enseignante, nommée Gabrielle[5], à partir de la ressource Arsène Ponton. Après avoir décrit la ressource, il s'agira de mettre en évidence les schèmes d'utilisation individuels de Gabrielle.

4.1 Présentation de l'enseignante Gabrielle

Gabrielle a une quinzaine d'années d'expérience en enseignement. Elle travaille depuis maintenant dix ans dans une commission scolaire de la région de Québec. Dans le cadre du groupe de travail, Gabrielle a reçu la formation décrite plus haut par deux didacticiennes.

Elle a choisi d'expérimenter la situation Arsène Ponton avec ses élèves de deux de ses groupes qui sont en deuxième année du premier cycle du secondaire (environ 45 élèves âgés de 13 à 14 ans).

4.2 Présentation de la ressource Arsène Ponton

La tâche Arsène Ponton a été présentée aux enseignants dans le cadre du groupe de travail auquel a participé Gabrielle pour se pencher sur des problèmes écrits de

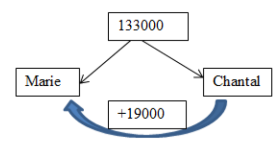
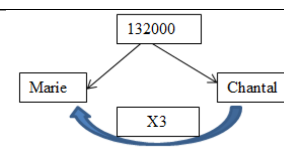
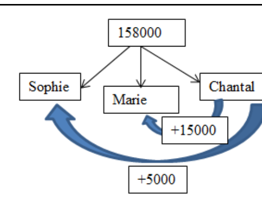
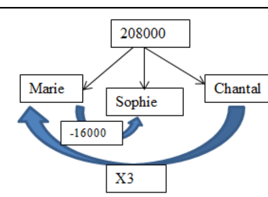
---

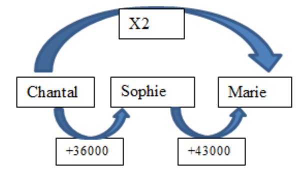
5 Nom fictif

comparaison avec les enseignants, et donc dans un but de formation et non dans le but de présenter une situation exemplaire pour la pratique. Bien que ce n'était pas une consigne des formatrices, Gabrielle a utilisé la tâche Arsène Ponton pour son enseignement, transposant ainsi une ressource de formation en une ressource d'enseignement. Afin de présenter la ressource utilisée par Gabrielle, nous allons présenter celle utilisée en formation et décrire quelques caractéristiques du potentiel didactique de la ressource pour l'enseignement.

La tâche Arsène Ponton se présente comme une série de cinq problèmes à résoudre dans l'ordre de présentation. Ces cinq problèmes sont des problèmes déconnectés, de partage inéquitable, de différents types et de degré de complexité croissant selon la typologie de Bednarz et Janvier (1996). Le tableau suivant résume les principales caractéristiques de ces problèmes ainsi que la schématisation de leur structure.

Tableau 1 : Caractéristiques des problèmes de la tâche Arsène Ponton

Problèmes	Nature des relations	Schéma
Problème 1 Arsène Ponton lègue sa fortune à ses deux nièces, Marie et Chantal. Il donne 19 000 $ de plus à Marie qu'à Chantal. Si sa fortune s'élève à 133 000 $, combien recevront Marie et Chantal?	Une relation additive entre deux inconnues	
Problème 2 Arsène Ponton lègue sa fortune à ses deux nièces, Marie et Chantal. Il donne 3 fois plus d'argent à Marie qu'à Chantal. Si sa fortune s'élève à 132 000 $, combien recevront Marie et Chantal?	Une relation multiplicative entre deux inconnues	
Problème 3 Arsène Ponton lègue sa fortune à ses trois nièces, Marie, Chantal et Sophie. Il donne 15 000 $ de plus à Marie qu'à Chantal, et il donne 5 000 $ de plus à Sophie qu'à Chantal. Si sa fortune s'élève à 158 000 $, combien recevront Marie, Chantal et Sophie?	Deux relations additives impliquant trois inconnues. Le problème est de type **Source :** une seule inconnue permet de générer les deux autres inconnues.	
Problème 4 Arsène Ponton lègue sa fortune à ses trois nièces, Marie, Chantal et Sophie. Il donne 3 fois plus d'argent à Marie qu'à Chantal, et il donne 16 000 $ de moins à Sophie qu'à Marie. Si sa fortune s'élève à 208 000 $, combien recevront Marie, Chantal et Sophie?	Deux relations impliquant trois inconnues, l'une d'elles est additive, l'autre est multiplicative. Le problème est de type **Composition de relations :** une des données est le point d'arrivée d'une relation et le point de départ de l'autre.	

Problème 5 Arsène Ponton lègue sa fortune à ses trois nièces, Marie, Chantal et Sophie. Il donne 2 fois plus d'argent à Marie qu'à Chantal, 36 000$ de plus à Sophie qu'à Chantal, et finalement 43 000 $ de plus à Marie qu'à Sophie. Combien d'argent recevront Marie, Chantal et Sophie?	La relation donnant le total des trois inconnues n'est pas donnée. Elle est remplacée par une troisième relation entre deux inconnues. L'une des deux autres relations est additive, l'autre est multiplicative. Problème de type **Composition de relations.**	

Pour illustrer les différents types de raisonnement que l'on peut utiliser dans la résolution de ces problèmes, nous allons étudier le cas du problème 1. Nous nous appuyons sur la grille développée par Squalli et al. (2020) qui propose une analyse des démarches de résolution selon le degré d'analycité du raisonnement. La grille comporte trois catégories de raisonnement, chacune peut contenir plusieurs sous-catégories de raisonnements différents.

La première catégorie correspond aux raisonnements non analytiques : le résolveur n'opère que sur des données et relations connues. Voici un exemple de raisonnement pour la résolution du problème 1.

Résolution 1 – Raisonnement par essais-erreurs avec ajustement simple

Si l'avoir de Chantal en dollars est 51 000, alors celui de Marie serait de 51 000 + 19 000 = 70 000. Leur total vaut donc 121 000. Il est inférieur au total réel (133 000). Il faut donc augmenter la valeur initiale de l'avoir de Chantal. Dans ce type de raisonnement, la valeur de l'ajustement ne prend en compte que la comparaison entre le total obtenu et le total réel. Le résolveur reprend le premier essai avec une valeur plus grande de l'avoir de Chantal.

La deuxième catégorie est celle des raisonnements dits à tendance analytique. Cette catégorie regroupe les raisonnements hypothéticodéductifs où l'élève affecte une valeur déterminée à une inconnue sachant qu'elle est fausse, fait comme si cette inconnue possédait cette valeur, opère sur les relations et génère les valeurs des autres inconnues. Il raisonne ensuite sur les relations et les valeurs produites pour trouver la valeur exacte de l'inconnue de départ. En voici un exemple :

Résolution 2 – Raisonnement par essais-erreurs, avec ajustement raisonné

Si le montant de Chantal en dollars était de 1 000, alors celui de Marie serait de 1 000 + 19 000 = 20 000. Le total serait alors de 21 000. Or, le montant total réel est 133 000. Le montant de 112 000 correspondant à la différence entre le total réel et celui obtenu (133 000 – 21 000) est à partager également entre les deux nièces puisque nous avons déjà tenu compte des relations entre les montants des nièces.

Montant ajusté de Chantal : 1 000 + 56 000 = 57 000 $

Montant ajusté de Marie : 20 000 + 56 000 = 76 000 $

La troisième catégorie est celle des raisonnements analytiques. Dans ce type de raisonnement, l'élève considère l'inconnue, la représente par un symbole (non forcément une lettre), utilise cette représentation pour exprimer les relations entre les données connues et les autres inconnues du problème et opère sur ces représentations pour former l'équation et trouver les valeurs des inconnues. Le raisonnement utilisé dans la méthode algébrique conventionnelle de résolution en est un exemple. Voici un exemple où, dans la résolution, l'inconnue n'est pas représentée explicitement; Squalli et al. (2020) disent qu'elle reste muette.

Résolution 3 – Raisonnement analytique en termes de parts, l'inconnue reste muette

Dans les cinq problèmes d'Arsène Ponton, il est possible de raisonner en termes de parts. Dans ce cas-ci, la part de Marie, en dollars est égale à celle de Chantal augmentée de 19 000. Si l'on soustrait 19 000 du total pour enlever le surplus du montant de Marie par rapport à Chantal, le montant restant correspond alors au double de la part de Chantal. La part de Chantal est donc de 114 000 $ ÷ 2 = 57 000 $ et la part de Marie est de 76 000 $.

Par ailleurs, dans le problème 5, contrairement aux problèmes précédents, le montant total des parts n'est pas donné. En revanche, la part de Marie peut être générée de deux façons : par composition de deux relations additives à partir de la part de Chantal ou en doublant le montant de Chantal. On peut penser que la résolution de ce problème de manière non analytique peut s'avérer difficile pour les élèves, car le schéma de résolution de ce problème est différent de ceux des précédents.

Si la tâche Arsène Ponton est destinée aux élèves, elle devrait être présentée avant l'introduction du langage littéral de l'algèbre. La complexité croissante des cinq problèmes déconnectés rend difficile l'utilisation d'une démarche arithmétique de résolution et amènerait les élèves à tendre vers des raisonnements de nature analytique en recourant à des registres personnels de représentation des inconnues et des relations. L'enjeu pour l'enseignant dans la gestion de la résolution de cette tâche en classe est d'amener les élèves à raisonner de manière analytique en raisonnant sur les parts et en recourant à un registre de représentation des inconnues et des relations permettant d'opérer sur les représentations.

4.3 Arsène Ponton comme ressource de la formation à laquelle a participé Gabrielle

D'après notre propre expérience de formation, Arsène Ponton est une tâche qui est habituellement utilisée comme dispositif de formation initiale des enseignants au secondaire dans un cours de didactique de l'algèbre dans une université québécoise. Le but est de placer les étudiantes et étudiants dans la posture des élèves avant leur entrée dans l'algèbre. La consigne qui leur est donnée est de résoudre ces problèmes sans utiliser la méthode algébrique conventionnelle de résolution. Les intentions de formation sont d'amener les étudiantes et les étudiants à prendre conscience de certains enjeux didactiques : 1) la nécessité du raisonnement analytique dans la résolution de problèmes déconnectés; 2) le recours à un registre de représentation des inconnues et des relations permettant d'opérer sur les représentations; 3) la diversité potentielle des types de raisonnements que pourraient produire les élèves ne connaissant pas la méthode algébrique conventionnelle de résolution; et 4) la nature des raisonnements qui est influencée par la structure du problème, au sens de Bednarz et Janvier (1996).

Dans le cadre de ce projet, la tâche demandée aux enseignants lors de la formation dans le groupe de travail avec les deux didacticiennes est de résoudre la série des cinq problèmes dans l'ordre, sans utiliser la méthode algébrique conventionnelle, de trouver à partir de quelle étape le raisonnement analytique est nécessaire pour résoudre le problème et quelles sont les différences d'une étape à l'autre. Lors de cette formation, des principes didactiques ont également été expliqués en lien avec la nature des problèmes ainsi qu'en lien avec le développement de la pensée algébrique dans le contexte de la résolution de problèmes. Ces principes sont tirés d'une analyse de la vidéo de la journée de formation des enseignants sur l'approche par résolution de problèmes écrits. Pour valider ces analyses, nous avons réalisé une entrevue avec les deux formatrices didacticiennes. L'analyse de ces principes permet de rendre compte de la raison d'être de la tâche Arsène Ponton et des intentions de formation poursuivies par les formatrices. Dans ce travail, la dimension ressource du document de Gabrielle est constituée de la tâche Arsène Ponton, des consignes données par les formatrices pour résoudre cette tâche ainsi que des principes énoncés explicitement par les formatrices ou inférés lors de l'analyse.

Principe didactique 1 : Le développement de la pensée algébrique peut se faire avant l'introduction du langage littéral de l'algèbre

D'une part, les formatrices ont apporté cette précision lors de la formation avec les enseignants : le développement de la pensée algébrique peut se faire sans « enseignement de l'algèbre formelle » contrairement à ce que l'on peut voir présentement dans plusieurs classes du Québec. En effet, selon elles, les enseignants réservent un chapitre spécialement pour introduire les termes algébriques ainsi que les opérations sur les expressions algébriques. À la place d'une introduction frontale du calcul algébrique, le développement de la pensée algébrique avant l'introduction des lettres permet à l’enseignant de saisir les différentes occasions qui s’offrent à lui pour parler du langage algébrique et de la manipulation d’expressions.

D’autre part, l’une des deux formatrices a fait remarquer qu’en première année du deuxième cycle du secondaire, ce qui est difficile pour les élèves n’est pas de manipuler les expressions algébriques. Le plus ardu pour eux est de traduire les relations entre les inconnues d’un problème et d’opérer sur ces relations. Comme il est possible de le faire sans utiliser le langage littéral de l’algèbre, la confrontation à la résolution de problèmes déconnectés plus tôt pourrait aider en ce sens.

Principe didactique 2 : Les problèmes déconnectés sont nécessaires pour développer le raisonnement analytique

Selon l’une des deux formatrices, Mégane[6], ce principe découle des travaux de Bednarz et Janvier (1992, 1996) qui montrent que les problèmes déconnectés inciteraient les élèves à raisonner de manière analytique, contrairement à des problèmes connectés où l’élève n’a qu’à partir d’une grandeur connue pour trouver les autres grandeurs inconnues à l’aide des relations connues. Elle explique :

> raisonner analytiquement, ben moi je regarde toujours les trois conditions. Est-ce que l’élève, ou l’enseignant dans ce cas-ci, accepte de raisonner sur l’indéterminée puis accepte de raisonner sur celui-ci comme s’il était connu. Puis par la suite, ben là on met vraiment l’ancrage sur trois conditions. C’est cette habileté à dénoter. Est-ce que tu vas le dénoter avec un symbole qui serait une lettre? […] Donc, si on revient à ta question initiale, pourquoi cette activité-ci nous permettrait de développer le raisonnement analytique? Je le dirais comme ça. C’est justement, avec les enseignants, à les forcer à ne pas utiliser une algèbre explicite.

Ces problèmes déconnectés mettent donc à défaut des raisonnements arithmétiques simples puisque l’élève (ou l’enseignant) doit maintenant considérer l’inconnue et raisonner avec celle-ci « comme si » elle était connue. Il est donc important, selon Mégane, que les enseignants s’attardent aux différents types de problèmes de comparaison qu’ils proposent à leurs élèves pour favoriser le raisonnement analytique.

---

6 Nom fictif

Principe didactique 3 : Le raisonnement en termes de parts est un raisonnement analytique

Pour les formatrices, raisonner en termes de parts lors de la résolution des problèmes d’Arsène Ponton est central. Pour elles, le but est, dans un premier temps, d’amener les enseignants à raisonner sur les parts, sans utiliser le langage littéral de l’algèbre, autrement dit en utilisant la notion de part comme substitut à l’inconnue (Squalli et al., 2020). Par la suite, il s’agit de leur faire prendre conscience que le fait de raisonner en termes de parts les a amenés à opérer sur l’inconnue comme si elle était connue et ainsi à raisonner de manière analytique. L’une des deux formatrices le confirme :

> Ben, si ça, c’est notre ancrage premier, ce qui est la particularité dans cette activité-ci, c’est lorsqu’ils raisonnent sur les parts […] Mais le raisonnement sur les parts, pour eux, n’est pas toujours un raisonnement analytique. On essaie de leur faire voir justement, c’est qu’à partir du moment que tu peux accepter de rentrer dans ce jeu-là, de calculer le nombre de parts, c’est que nécessairement tu acceptes de faire « comme si » tu les connaissais.

Cette prise de conscience est essentielle pour comprendre que, lorsqu’ils raisonnent en termes de parts, ils raisonnent de manière analytique, et l’intégration du symbolisme algébrique peut facilement se faire par la suite puisqu’il a maintenant du sens.

Principe didactique 4 : Les problèmes d’Arsène Ponton peuvent être résolus sans l’utilisation de la méthode algébrique conventionnelle

Toujours lors de la journée de formation avec les enseignants, les didacticiennes leur ont fait expérimenter la tâche Arsène Ponton en leur demandant de résoudre les problèmes sans utiliser la méthode algébrique conventionnelle. Étant donné que les sujets de notre recherche sont compétents en algèbre, ils auraient probablement utilisé cette méthode de résolution plus efficace s’ils avaient eu le choix. Comme ils avaient la contrainte de ne pas utiliser le langage littéral de l’algèbre, cela ouvrait la porte à différentes résolutions. C’est ce que l’une des deux formatrices nous confirme lors de l’entrevue :

> Donc, on a mis une contrainte qu’ils ne résolvent pas les problèmes…ben qu’ils essaient le plus possible de ne pas les résoudre en utilisant une algèbre explicite [méthode algébrique conventionnelle]. Ça, c’est quand même important que tu puisses le savoir parce que sinon on n’aurait peut-être pas eu une diversité de résolutions.

D’autre part, les formatrices espéraient que les enseignants opèrent sur l’inconnue en termes de parts pour qu’ils comprennent qu’il est possible de raisonner de manière analytique sans utiliser l’algèbre explicite :

> Donc, là, ce qu'ils faisaient…vous essayez de ne pas la prendre [l'algèbre explicite]. Donc, là, ils…pour essayer de raisonner sur le nombre de parts et tout ça jusqu'à ce qu'ils arrivent au problème 5 où là eux-mêmes le disent : Non, là là, est-ce que c'est normal? Mais moi, c'est l'algèbre que je veux prendre.

Selon les deux formatrices, le fait de demander aux enseignants de ne pas utiliser l'algèbre explicitement les forçait à vivre les différents enjeux de la tâche d'Arsène Ponton.

Principe didactique 5 : L'analyse de la structure des problèmes de comparaison peut nous renseigner sur leur niveau de complexité

Lors du retour en grand groupe après la résolution de la tâche Arsène Ponton par les enseignants, l'une des deux formatrices est revenue sur chacun des cinq problèmes en insistant sur leurs différences. Elle parle de ses intentions aux enseignants :

> Mon premier élément, c'était que vous remarquiez que : c'est drôle, quand je les lis, ils se ressemblent tous. Ils se résolvent tous de la même manière, puis là tu es en train de me dire qu'ils ne sont pas tous pareils? […] Si, pour le moment, ça veut juste dire que vous repartez en vous disant : écoute, je ne suis pas encore tout à fait à l'aise, mais maintenant quand je vais l'ouvrir mon manuel […] je le sais qu'il existe différentes classes de problèmes.

L'un des buts de la formatrice est donc que les enseignants sachent qu'il existe différents types de problèmes de comparaison et qu'ils sachent les reconnaître même s'ils se ressemblent tous. Elle veut également leur faire prendre conscience qu'en utilisant la méthode algébrique conventionnelle de résolution, le niveau de difficulté est moins apparent. Par contre, ils doivent savoir qu'il existe tout de même des différences significatives pour les élèves lorsqu'ils les résolvent sans utiliser la méthode algébrique conventionnelle. En effet, comme le tableau 1 le montre, les cinq problèmes de comparaison sont classés par ordre croissant de complexité et les formatrices mentionnent que cette gradation est appuyée par la recherche :

> On s'appuie sur la grille de Bednarz et Janvier[7] reprise par Marchand[8] que nous avons repris après, avec Hassane et Adolphe[9]. C'est quelque chose qui est très connu, c'est les problèmes de comparaison. Il y a différents types de problèmes. Il y a source, composition et puits. Ça a été prouvé dans les trois recherches menées que ces problèmes-là sont gradués en ordre de complexité donc les

[7] Bednarz et Janvier (1992)
[8] Marchand (1998)
[9] En référence à Adihou et al. (2015)

> problèmes « source » sont toujours plus simples que les problèmes « composition » qui sont eux-mêmes plus simples que les problèmes « puits ».
>
> Donc, avec les enseignants, c’est d’aller leur montrer les différents niveaux de complexité pour les élèves à travers ces différents types de problèmes.
>
> Puis, de l’autre côté, c’est d’aller voir que les problèmes où y’a le même énoncé, où y’a souvent le même nombre de grandeurs, ben, le niveau de complexité n’est pas le même. Qu’est-ce qui fait que le niveau de complexité change? Donc, c’est d’aller s’attarder sur l’enchaînement des relations de comparaison, schématiser le tout.

L’une des deux formatrices nous résume bien deux des enjeux principaux de la formation avec la tâche d’Arsène Ponton : « Y’en a une qui est de l’ordre de l’expression de la diversité des raisonnements qu’on peut mobiliser pour résoudre les problèmes, puis l’autre, c’est de s’intéresser à la structure des problèmes. » De plus, la tâche Arène Ponton a été présentée tout juste avant une activité qui consiste à analyser les manuels qu’ils utilisent en classe. Si les enseignants savent reconnaître les différents types de problèmes, ils sont plus outillés pour choisir les problèmes des manuels et les exploiter efficacement pour le développement du raisonnement analytique chez leurs élèves.

4.4 Méthodes de collecte et d’analyse des données

Les données proviennent de trois sources, 1) les enregistrements vidéo de l’expérimentation en classe, 2) l’enregistrement vidéo de la rencontre du retour réflexif après expérimentation dans le groupe de travail et 3) une entrevue semi-dirigée postexpérimentation avec Gabrielle. Pour analyser la dimension schème d’utilisation du document, nous avons d’abord analysé les données provenant des deux premières sources. Conformément à la notion de schème de Vergnaud (1996), nous décrivons les schèmes d’utilisation de l’enseignante, au moyen des trois composantes suivantes : 1) une règle d’actions formulée à l’aide de verbe d’action et qui réfère à des actes de l’enseignante en lien avec la ressource en vue d’atteindre un certain but; 2) le but de ces actions et 3) un théorème-en-acte qui permet d’expliquer l’action et de renseigner sur des connaissances de l’enseignante (Pastré et al., 2006).

Ensuite, l’analyse des données provenant de l’entrevue post-expérimentation avec Gabrielle nous a permis de valider auprès de Gabrielle et de préciser les schèmes d’utilisation identifiés ainsi que leurs composantes. Les données de cette entrevue semi-dirigée sont essentielles, car ils permettent de valider et de rendre plus explicites les composantes des schèmes (règles d’actions, but des actions et théorèmes en actes) inférées par la chercheure.

5. Analyse des données et interprétation

Rappelons que la tâche Arsène Ponton a été présentée comme une ressource de formation et non comme une ressource d'enseignement destinée aux élèves. Gabrielle a utilisé la tâche Arsène Ponton pour son enseignement, transposant ainsi une ressource de formation en une ressource d'enseignement. Ce choix nous semble révéler un phénomène répandu et explique la tendance de certains enseignants à s'attendre à se voir proposer dans des activités de formation des ressources prêtes à être utilisées dans leur classe. Nous proposons de parler de détournement métadidactique de type 1, quand un enseignant transpose une ressource de formation en une ressource d'enseignement. Dans le cas qui nous concerne, Gabrielle devrait adapter la tâche Arsène Ponton pour ses élèves et la présenter avant l'introduction du langage littéral de l'algèbre, comme on a vu dans la section 4.2. En effet, l'une des raisons d'être de la tâche Arsène Ponton, si elle est destinée aux élèves, est de préparer ces derniers à l'introduction du langage alphanumérique comme registre de représentation optimal dans la résolution de problèmes se modélisant par une équation à une inconnue. Pour que les élèves voient la pertinence de l'introduction des lettres, ils doivent d'abord être « forcés » à raisonner en termes d'inconnue et à opérer sur l'inconnue en utilisant un registre de représentation personnel.

Contrairement à ce qui était attendu, Gabrielle a fait le choix de planifier son expérimentation après une introduction au calcul algébrique formel et juste avant l'introduction à la résolution algébrique de problèmes écrits à l'aide de la méthode algébrique conventionnelle.

Elle a présenté la tâche à ses élèves sans aucune modification par rapport à celle qui lui a été présentée en formation. Elle leur a présenté la même feuille, avec la consigne de résoudre les problèmes sans utiliser l'algèbre :

> Puis, aussi, on va voir comment on fait pour utiliser l'algèbre pour résoudre des problèmes écrits. Puis aujourd'hui, ce qu'on va faire, je vous ai préparé cinq problèmes. Puis, avant de vous montrer comment faire pour utiliser l'algèbre pour résoudre ces problèmes-là, je veux voir votre logique à vous, comment vous feriez pour résoudre ces problèmes-là, sans nécessairement utiliser l'algèbre. Parce que ces problèmes-là, c'est des problèmes pour lesquels on peut en utiliser, mais on est capable aussi, quand on a une bonne mathématique, de les résoudre sans avoir recours à l'algèbre.

En entrevue, elle explique qu'elle a voulu montrer aux élèves qu'ils ont déjà plusieurs connaissances en lien avec l'algèbre et ainsi diminuer le stress qui lui est souvent associé. Elle y revient lors du retour réflexif en grand groupe : « C'était de leur montrer qu'ils étaient capables de, d'arriver à trouver des réponses, qu'ils connaissaient déjà un petit peu de choses si on veut par rapport à l'algèbre, qu'ils étaient capables de se débrouiller avec ça. » Gabrielle a donc utilisé les mêmes consignes que pour la formation, mais dans un but différent, d'ordre motivationnel. À notre connaissance, ce type de phénomène d'enseignement n'est pas décrit dans la typologie proposée par Brousseau (2011). Nous proposons de parler de détournement métadidactique de type 2 lorsqu'un enseignant utilise une ressource d'enseignement, mais dans un but différent de son but initial.

Tous ces éléments nous ont amenés à formuler le premier schème ainsi :

Tableau 2 : Schème 1 – Les élèves peuvent résoudre les problèmes de la tâche Arsène Ponton sans l'algèbre, et le faire comme ils le veulent favorise leur engagement

Règle d'action	Demander aux élèves de résoudre les problèmes comme ils le veulent, sans être obligés d'utiliser l'algèbre.
But 1	Faire prendre conscience aux élèves qu'ils sont capables de résoudre des problèmes « algébriques » sans utiliser les lettres.
Théorème-en-acte 1	Les élèves sont capables de résoudre des problèmes algébriques sans utiliser le langage littéral de l'algèbre.
But 2	Engager les élèves dans la tâche
Théorème-en-acte 2	Avoir la liberté de résoudre un problème comme ils le veulent favorise l'engagement des élèves.

Par la suite, lors de l'expérimentation en classe, l'enseignante a laissé les élèves résoudre les problèmes. Au début, ils résolvaient individuellement et elle les plaçait ensuite en équipe de deux pour qu'ils comparent leurs méthodes et qu'ils se les expliquent. Pour faire le retour en grand groupe, elle commence donc avec le problème 1 et cible des élèves qui avaient des raisonnements différents. Elle leur demande de venir les expliquer au tableau. L'enseignante nous a fait remarquer qu'aucun des élèves n'a utilisé la méthode algébrique, la majorité des équipes ont utilisé des raisonnements de type essais-erreurs; une seule équipe semble utiliser un raisonnement sur les parts. Quand elle a vérifié quelles méthodes avaient donné un bon résultat avec eux en vérifiant les conditions de départ (si le montant total et le lien entre les inconnues sont respectés), elle a ensuite fait le lien avec les parts : « Des problèmes comme ça où on a des montants à partager, là, écoutez bien, c'est un petit truc qui est important, c'est de s'imaginer des nombres de parts. Ça va vous aider dans la compréhension de ces problèmes-là. »

Elle reprend chacun des raisonnements des élèves et leur explique comment ils pourraient faire pour exprimer les relations du problème en termes de parts. Le fait de leur montrer de raisonner en termes de parts montre que l'enseignante croit que c'est un bon moyen pour comprendre ces problèmes et qu'il est important de le faire dès le début pour être habile dans les autres problèmes plus difficiles. Cela nous a amenés à formuler le schème suivant :

Tableau 3 : Schème 2 – Raisonner en termes de parts dans les problèmes de comparaison facilite leur compréhension

Règle d'action	Dans les problèmes de partage inéquitable, dire explicitement aux élèves de raisonner en termes de parts.
But	Que les élèves comprennent le problème
Théorème-en-acte	Raisonner en termes de parts favorise la compréhension des problèmes de comparaison déconnectés (partage inéquitable).

Ce schème montre, encore une fois, que Gabrielle a agi contrairement à ce qu'on aurait attendu; elle n'a pas laissé émerger les raisonnements des élèves en termes de parts au cours de la résolution de la série des problèmes de la tâche Arsène Ponton. Elle a pris à sa charge de montrer aux élèves ce type de raisonnement dès la résolution du premier problème!

Lorsque Gabrielle a montré aux élèves les raisonnements en parts, elle leur a également montré à représenter symboliquement les inconnues et leurs relations. Elle intervient ainsi dans ce second enjeu du développement du raisonnement analytique. En effet, comme le montre la figure 2, pour le problème 1, lorsqu'elle parlait du montant de Chantal, l'une des inconnues du problème, elle a dessiné un cercle au tableau et, pour le montant de Marie, la seconde inconnue, qui a 19 000 de plus que la première, elle a dessiné un autre cercle et écrit en dessous + 19 000. Ensuite, elle a ajouté le total en dessous pour montrer, qu'ensemble, elles avaient 133 000.

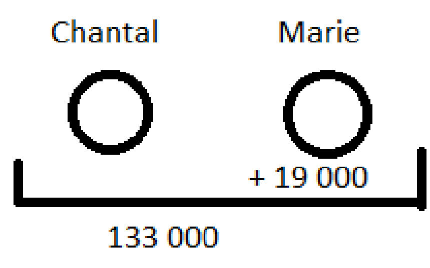


Figure 2 : Représentation symbolique des inconnues et leurs relations utilisées par l'enseignante

Lorsqu'elle revient sur les différents raisonnements des élèves, elle se réfère toujours au schéma de la figure 2 et opère sur la représentation pour trouver les valeurs des inconnues. Nous avons observé ce schéma se manifester une fois dans chaque classe de façon différente et Gabrielle nous en a parlé de manière explicite lors du retour réflexif en grand groupe. Dans le premier groupe avec qui elle l'a expérimenté, l'enseignante est intervenue avec quelques équipes pour leur faire le dessin et, dans le deuxième groupe, elle a fait le dessin en grand groupe. L'enseignante nous explique que le schéma est utile pour comprendre les relations entre les inconnues :

> Je leur faisais le dessin, mais sans leur dire vraiment qu'il faut que tu enlèves le 19 000 au début, mais on dirait qu'avec le dessin, ils le voyaient plus. Tu sais, ça les amenait à découvrir que pour savoir combien il y a dans chacune des deux parts qui sont égales, il faut que tu commences par enlever le 19 000 avant de diviser par deux.

Ces éléments nous ont amenés à formuler le troisième schème de Gabrielle :

Tableau 4 : Schème 3 – Représenter la structure du problème par un dessin

Règle d'action	Représenter les parts par un dessin
But	Que l'élève utilise la schématisation pour représenter les relations et pour qu'il opère sur la représentation (raisonne de manière analytique).
Théorème-en-acte	Représenter les parts par un dessin favorise le raisonnement analytique.

Le prochain schème renforce le fait que Gabrielle croit que le raisonnement sur les parts ainsi que sur la représentation symbolique est l'élément clé dans ce type de problèmes. En effet, lors du retour réflexif en grand groupe, l'enseignante mentionne qu'elle a abordé l'introduction des lettres avec les élèves qui maîtrisaient le système de représentation des parts et qui avaient réussi plus de problèmes que les autres :

> Gabrielle : Puis, j'avais même commencé à aborder le sujet avec certains qui étaient rendus plus loin que, à la place de faire un cercle, qu'est-ce qu'on pourrait faire. Comme…
>
> Lili : Mettre un X ou…
>
> Gabrielle : Mettre un X, c'est ça. Ceux qui étaient plus forts, là. J'avais commencé de parler de ça un petit peu.

Ainsi, pour l'enseignante, pour pouvoir comprendre l'utilité du langage littéral de l'algèbre dans la résolution de problèmes écrits, il est possible d'amener les élèves à raisonner en termes de parts, de les représenter en utilisant un mode de représentation intermédiaire (comme un dessin) et d'opérer sur ces représentations afin de résoudre le problème. Elle a donc complètement intégré les conditions du raisonnement analytique qui consiste à considérer l'inconnue, la représenter et opérer sur cette dernière. Voici donc le quatrième schème :

Tableau 5 : Schème 4 – Représentation par un dessin comme transition vers le langage littéral de l'algèbre

Règle d'action	Pour les élèves qui ont montré une certaine maîtrise (ou compréhension) de la résolution des problèmes de comparaison par dessin, l'enseignante demande aux élèves de rechercher un système de représentation autre.
But	Amener les élèves vers le symbolisme algébrique conventionnel.
Théorème-en-acte	Les élèves qui maîtrisent le système de représentation intermédiaire sont prêts à remplacer ce système de représentation par le langage littéral de l'algèbre.

Nous avons également pu remarquer que l'enseignante a trouvé une nouvelle utilité à la ressource qui n'était pas prévue au départ. En effet, ne voulant pas déroger de son enseignement habituel, elle avait déjà introduit en classe le langage algébrique et les transformations algébriques avant la résolution de problèmes. Gabrielle trouve que le fait de voir la résolution de problèmes dans un deuxième temps aide à donner du sens au symbolisme algébrique tout récemment appris.

> Mais en tout cas, je trouve que ça aide à faire plus le lien si tu l'as déjà vu, s'ils sont déjà capables un peu, algébriquement. […] Je serais ouverte à l'essayer au début, mais, en y pensant comme il faut, je pense que c'est bien de l'avoir fait en deuxième partie. Au début de la résolution de problèmes, mais après avoir fait la partie plus vocabulaire, puis manipulation d'expressions seulement.

Finalement, nous pouvons conclure que l'enseignante est tout à fait en accord avec la formation qu'elle a reçue sur la tâche Arsène Ponton. En effet, lorsque nous lui avons demandé si elle trouvait que l'activité visait le développement de la pensée algébrique, voici ce qu'elle a répondu :

> Ben, moi, je trouve que c'est de la pensée algébrique quand même. De dire qu'il y a l'idée de parts puis d'inconnues. Je trouve que oui, dans un certain sens, ça amène vers ça. C'est comme une autre branche de l'algèbre. Tu as la généralisation, mais tu as aussi la valeur inconnue. C'est ce bout-là. Ça reste de l'algèbre quand même je trouve. Moi, je trouve que oui.

6. Discussion des résultats

Lors de l'expérimentation de la ressource par Gabrielle, cette dernière, comme nous l'avons vu, a décidé de présenter la tâche Arsène Ponton après l'introduction du langage littéral de l'algèbre et avant la résolution de problèmes écrits. Ce choix a été fait, nous semble-t-il, pour ne pas bouleverser sa planification initiale tout en restant proche de la ressource Arsène Ponton utilisée pour sa formation. En revanche, après l'expérimentation en classe, Gabrielle semble avoir trouvé des raisons qui justifient son choix. En effet, selon elle, l'introduction du langage algébrique avant la présentation d’Arsène Ponton n’a ni nui, ni aidé les élèves, puisqu’ils n’ont pas utilisé l’algèbre formelle pour résoudre les problèmes, mais a permis, à certains élèves, de donner un sens au symbolisme littéral. L’enseignante reste tout de même ouverte à reprendre cette tâche comme une entrée en algèbre pour créer le besoin du traitement algébrique.

Au fil des analyses, à travers les différents schèmes de Gabrielle, nous avons également pu remarquer que Gabrielle a pris à sa charge de montrer explicitement aux élèves comment raisonner en termes de parts et à utiliser une représentation schématique pour représenter et opérer sur les relations. Nous pensons que cela est dû au fait que la ressource n’a pas été pleinement intégrée dans sa pratique d'enseignement, c’est-à-dire qu’elle ne se sentait pas assez à l’aise avec les enjeux de la ressource.

Gabrielle a expérimenté l’activité en classe, en l'insérant dans sa séquence d'enseignement habituelle sans trop bouleverser cette dernière. L'expérimentation et le retour sur cette expérimentation lui ont permis de prendre conscience du potentiel de la ressource pour son enseignement et l'apprentissage des élèves. Ce potentiel s’exprime à travers les quatre schèmes d’action relevés précédemment.

> Il me semble que j’ai manqué de temps. Par après, je suis comme embarquée dans ma planif que j’avais, habituelle. C’est comme si ça a été un petit temps pour faire cette activité-là, puis je trouve que ça n’a pas assez coulé. Ça n’a pas assez déteint sur le reste de mon enseignement.

Elle sent qu’il faudrait que l’activité « coule » mieux dans son enseignement pour assurer une cohérence. Par contre, elle n’a pas été à l’aise de bouleverser sa séquence d’enseignement. Il semble ainsi que Gabrielle est prise dans une tension entre une pratique d'enseignement naturalisée et une ressource dont l'intégration en enseignement bouleverserait sa pratique.

Selon les propos des didacticiennes, ce phénomène est complètement normal. Comme ce sont des enseignants qui sont dans leur première année dans le projet de formation, ils expérimentent des ressources, mais ils ne saisissent pas encore tout leur potentiel et ne modifient pas encore leur séquence d’enseignement en conséquence. Voici les propos de Mégane lors de l’entrevue en équipe de formatrices :

> L’année un, c’est : je continue d’enseigner l’algèbre de la manière que je dirais qui est l’approche langage. […] Et ce qu’ils font, c’est pratiquement tous ça, la première année. Ils continuent d’enseigner en introduisant avec l’approche langage[10]. Puis ils intègrent des activités qu’on leur propose en y voyant le potentiel, mais en

---

[10] Soit une approche visant la maîtrise technique du calcul algébrique.

> n'osant pas trop. Ils parlent des affaires un peu, mais ils ne sont pas au stade d'embarquer, de dire : OK, go, on embarque par résolution de problèmes écrits pour introduire l'algèbre ou approche par généralisation. C'est le cas de toutes les personnes qui commencent.

Dans un autre ordre d'idées, Gabrielle avait deux buts en présentant la tâche Arsène Ponton aux élèves. Le premier consiste à amener les élèves à raisonner de manière analytique en raisonnant sur les parts, sans utiliser le langage algébrique conventionnel. Le second est de les amener à donner du sens au symbolisme algébrique en passant d'abord par un mode de représentation intermédiaire. Gabrielle plaçait donc sur le même plan le développement du raisonnement analytique chez les élèves et l'introduction du langage littéral de l'algèbre. Elle souhaitait ainsi autant provoquer le développement du raisonnement analytique chez les élèves en raisonnant sur les parts que créer le besoin du traitement algébrique en n'ayant plus d'outils pour résoudre le dernier problème. Nous pouvons finalement croire que Gabrielle a compris et intégré les enjeux essentiels de la tâche Arsène Ponton puisqu'elle vise ces deux aspects essentiels lorsqu'elle présente la tâche à ses élèves. On peut le remarquer lorsque l'enseignante insiste sur le raisonnement sur les parts et veut remplacer les dessins représentant les parts par des lettres.

Conclusion

En guise de conclusion, notre recherche nous a d'abord permis de prendre conscience de la vigilance que devraient avoir les didacticiens quand ils exploitent des ressources à des fins de formation des enseignants. Gabrielle n'a pas hésité à transposer, pour sa pratique d'enseignement, la ressource Arsène Ponton qui a été utilisée lors de la formation par les deux didacticiennes. Les enjeux de formation des enseignants ne sont pas les mêmes que ceux de l'apprentissage des élèves. Les formateurs doivent donc être vigilants lorsqu'ils présentent une ressource destinée à la formation et sensibiliser les enseignants à distinguer les enjeux de formation de ceux de l'apprentissage des élèves.

Finalement, lors de notre analyse, nous avons remarqué que la dimension ressource est plus complexe qu'elle n'y paraît. En effet, si nous gardons en tête la définition de la ressource « tout ce qui est susceptible de re-sourcer le travail de l'enseignant », non seulement la tâche Arsène Ponton et les principes didactiques présentés par les didacticiennes lors de la formation sont venus ressourcer le travail de l'enseignante, mais nous pensons que l'expérience de la formation est également un élément à considérer. En effet, les didacticiennes ont présenté la tâche Arsène Ponton aux enseignants et en ont discuté avec eux, mais elles leur ont également fait vivre l'expérimentation de la tâche lors de la formation. Ainsi, lors de la résolution des problèmes d’Arsène Ponton, les enseignants ont développé des connaissances sur la tâche et ont pu comprendre et intégrer des principes didactiques des formatrices qui n’auraient peut-être pas été compris de la même façon. Par exemple, lorsque les enseignants ont eu à résoudre les problèmes avec la contrainte de ne pas utiliser le langage formel, ils ont réalisé que le raisonnement sur les parts et sur les surplus est un raisonnement analytique et qu’il est possible de le faire sans les lettres. C’est une constatation que les enseignants ont eue qui n’aurait peut-être pas été aussi évidente sans en avoir fait l’expérience.

Dans cette recherche, nous avons proposé de traiter de deux types de phénomènes chez les enseignants. Le premier est appelé détournement métadidactique de type 1 pour décrire le phénomène de transposition d’une ressource de formation des enseignants en une ressource d’enseignements aux élèves; le second est appelé détournement métadidactique de type 2 et fait référence au phénomène d’utilisation d’une ressource d’enseignement dans un but différent du but initial. L’étude de la portée de ces phénomènes et des conditions de leur émergence nous semble une voie prometteuse de recherche. Une telle étude amène, à partir de l’angle d’analyse de l’usage des ressources, à se poser la question des rapports entre formation et pratique d’enseignement, à clarifier le rôle des didacticiens de mathématiques dans la formation des enseignants ainsi que la contribution de la didactique des mathématiques comme discipline de recherche à la formation des enseignants.

Références

Adihou, A., Squalli, H., Saboya M., Tremblay, M. et Lapointe, A. (2015). Analyse des raisonnements d’élèves à travers des résolutions de problèmes de comparaison. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque EMF2015* (p. 206-219). Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene.

Adler, J. (2010). La conceptualisation des ressources, apports pour la formation des professeurs de mathématiques. Dans G. Gueudet et L. Trouche (dir.), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (p. 57-74). Presses universitaires de Rennes.

Bednarz, N. et Janvier, B. (1992). L’enseignement de l’algèbre au secondaire : une caractérisation du scénario actuel et des problèmes qu’il pose aux élèves. Dans A. Daife (dir.), *Actes du colloque international : didactique des mathématiques, formation normale des enseignants* (p. 21-40). École normale supérieure de Marrakech.

Bednarz, N. et Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. Dans N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (p. 115-136). Kluwer Academic Publishers.

Bednarz, N., Kieran, C. et Lee, L. (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*. Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (2011). La théorie des situations didactiques en mathématiques. *Éducation et didactique,* 5(1), 101-104. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.1005

Carraher, D. W. et Schliemann, A. D. (2007). Early Algebra and Algebraic Reasoning. Dans F. Lester (dir.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 669-705). Information Age Publishing.

Gouvernement du Québec. (2006). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, premier cycle*. Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.

Gueudet, G. et Trouche, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Éducation et didactique, 2*(3), 7-34. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.342

Gueudet, G. et Trouche, L. (2010). Des ressources aux documents, travail du professeur et genèses documentaires. Dans G. Gueudet et L. Trouche (dir.), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (p. 57-74). Presses universitaires de Rennes.

Lins, R. C. (1992). *A framework for understanding what algebraic thinking is* [Thèse de doctorat, University of Nottingham]. Nottingham ePrints. http://eprints.nottingham.ac.uk/13227/1/316414.pdf

Marchand, P. (1998). *Résolution de problèmes en algèbre au secondaire : analyse de deux approches et des raisonnements des élèves* [mémoire de maitrise inédit]. Université du Québec à Montréal.

Marchand, P. et Bednarz, N. (1999). L'enseignement de l'algèbre au secondaire: une analyse des problèmes présentés aux élèves. *Bulletin AMQ* (Association mathématique du Québec), *XXXIX*(4), 30-42.

Pastré, P., Mayen, P. et Vergnaud, G. (2006). La didactique professionnelle. *Revue française de pédagogie*, (154), 145-198. https://doi.org/10.4000/rfp.157

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.

Rabardel, P. (1999a). Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. Dans M. Bailleul (dir.), *Évolution des enseignants de mathématiques; rôle des instruments informatiques et de l'écrit. Qu'apportent les recherches en didactique des mathématiques. Actes de la dixième université d'été de didactique des mathématiques* (p. 203-213). Association pour la recherche en didactique des mathématiques.

Rabardel, P. (1999b). Le langage comme instrument, éléments pour une théorie instrumentale élargie. Dans Y. Clot (dir.), *Avec Vygotsky* (p. 241-265). La Dispute.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, *12*(1), 1-19. https://doi.org/10.1080/14794800903569741

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. Dans C. Kieran (dir.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds. The global evolution of an emerging field of research and practice* (p. 3-26). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_1

Squalli, H. (2000). *Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base* [thèse de doctorat, Université Laval]. Corpus. https://corpus.ulaval.ca/jspui/handle/20.500.11794/51025

Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque EMF2015* (p. 346-356). Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene.

Squalli, H., Suurtaam, C. et Freiman, V. (2013). Préparer les enseignants au développement de la pensée algébrique au primaire et au secondaire. Dans S. Oesterle, D. Allan et P. Liljedahl (dir.), *Actes de la rencontre annuelle du Groupe canadien d'étude en didactique des mathématiques* (p. 125-136). Université Laval.

Squalli, H., Larguier, M., Bronner, A. et Adihou, A. (2020). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 22*(1), 36-62. https://doi.org/10.7202/1070024ar

Squalli, H., Mary, C. et Marchand, P. (2011). Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre : cas du Québec et de l'Ontario. Dans J. Lebeaume, A. Hasni et I. Harlé (dir.), *Recherches et expertises pour l'enseignement scientifique* (p. 67-78). De Boeck.

Vergnaud, G. (1996). La théorie des champs conceptuels. Dans J. Brun (dir.), *Didactique des mathématiques* (p. 197-242). Delachaux et Niestlé.

Verillon, P. et Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of though in relation to instrumented activity. *European journal of psychology of education, 10*(1), 77-101. https://doi.org/10.1007/BF03172796

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: learning, meaning, and identity*. Cambridge University Press.

Annexe 1

Version présentée aux enseignants à la formation du 9 février 2015

Problème d'Arsène Ponton

Nous avons ici un problème de départ que nous avons complexifié peu à peu. À partir de quelle étape a-t-on besoin de l'algèbre pour le résoudre? Quelles sont les différences d'une étape à l'autre?

Problème 1 : Arsène Ponton lègue sa fortune à ses deux nièces, Marie et Chantal. Il donne 19 000 $ de plus à Marie qu'à Chantal. Si sa fortune s'élève à 133 000 $, combien recevront Marie et Chantal?

Problème 2 : Arsène Ponton lègue sa fortune à ses deux nièces, Marie et Chantal. Il donne 3 fois plus d'argent à Marie qu'à Chantal. Si sa fortune s'élève à 132 000 $, combien recevront Marie et Chantal?

Problème 3 : Arsène Ponton lègue sa fortune à ses trois nièces, Marie, Chantal et Sophie. Il donne 15 000 $ de plus à Marie qu'à Chantal, et il donne 5 000 $ de plus à Sophie qu'à Chantal. Si sa fortune s'élève à 158 000 $, combien recevront Marie, Chantal et Sophie?

Problème 4 : Arsène Ponton lègue sa fortune à ses trois nièces, Marie, Chantal et Sophie. Il donne 3 fois plus d'argent à Marie qu'à Chantal, et il donne 16 000 $ de moins à Sophie qu'à Marie. Si sa fortune s'élève à 208 000 $, combien recevront Marie, Chantal et Sophie?

Problème 5 : Arsène Ponton lègue sa fortune à ses trois nièces, Marie, Chantal et Sophie. Il donne 2 fois plus d'argent à Marie qu'à Chantal, 36 000 $ de plus à Sophie qu'à Chantal et finalement 43 000 $ de plus à Marie qu'à Sophie. Combien d'argent recevront Marie, Chantal et Sophie?